

微分几何习题 04 *

2016年 9月 22日

1. 设曲线 γ 在两不同的参数 t_1, t_2 下的表示分别为 $\mathbf{r}_1(t_1)$ 和 $\mathbf{r}_2(t_2)$, $t_1 = \mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r}_2(t_2)$ 。
求证:

(1).

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}''_1|}{|\mathbf{r}'_1|^3} = \frac{|\mathbf{r}'_2 \wedge \mathbf{r}''_2|}{|\mathbf{r}'_2|^3}$$

(2).

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}''_1, \mathbf{r}'''_1)}{|\mathbf{r}'_1 \wedge \mathbf{r}''_1|^2} = \frac{(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}''_2, \mathbf{r}'''_2)}{|\mathbf{r}'_2 \wedge \mathbf{r}''_2|^2}$$

由此说明曲率 κ 和挠率 τ 是曲线内在的几何量（注意求导是关于各自的参数求）。

提示：仿照课上老师定义 $\Phi = \mathbf{r}_1^{-1} \circ \mathbf{r}_2(t_2)$ 来做

2. (1). 证明：教材68页习题3.1给出的五个表达式均是曲面（局部）。
(2). 证明： $\mathbf{r} = (g(u) \cos v, g(u) \sin v, f(u))$ 是曲面(局部), $f'g \neq 0$ 。
(3). 给出这几个曲面的几何直观图。
3. 回忆曲面中两点的距离定义为连结两点的, 在该曲面上的, 分段光滑的曲线的长度的下确界。证明这个距离构成该曲面的一个度量。
4. 回忆三维空间中的Frenet标架 $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ 及其运动方程:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

- (1). 仿课本20页, 试建立 $\mathbb{R}^4$ 中光滑曲线的Frenet标架。
(2). 给出这个标架的运动方程。
(3). 试找出该四维曲线 γ 在任意参数 t 下的不变量（曲线的内在几何量），并说明为什么是不变量。（此题选做）

*本次作业在下周四下课后上交