微分几何习题 13 *

2016年 12月 11日

1. Poincarè圆盘.

   考察平面上单位圆盘
   $$D = \{(u,v)|u^2+v^2<1\},$$
   赋以Poincarè度量
   $$I = \frac{4}{(1-(u^2+v^2)^2)^2}(dudu+dvdv).$$

   (1), (10')求曲线
   $$\boldsymbol{r} : (0,s) \mapsto D;\ (s<1)$$
   $$t \mapsto (t,0)$$
   的弧长。当 $s \to 1$ 时弧长怎样变化?

   (2), (10')求曲线
   $$\boldsymbol{r} : (0,s) \mapsto D;\ (s<1)$$
   $$t \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta); \theta\text{是常数}$$
   的弧长。

   (3), (10')求区域
   $$\tilde{D} = \{(r,\theta)|0<r<r_0, 0<\theta<\theta_0\} \subset D, (r_0, \theta_0\text{是常数});$$
   的面积。当 $r_0 \to 1$ 是面积如何变化?

2. 诱导度量.

   (1). (10')设 $(D, I = g_{ij}dx^i dx^j)$ 为n维黎曼流形,
   现有 $F(=(f^1,...f^n)) : \tilde{D} \mapsto D$,其中$\tilde{D}$是$\mathbb{R}^m$中单连通区域，$D$是$\mathbb{R}^n$中区域$(m \leqslant n)$.
   且$J(F)$ (Jacobian) 处处满秩。
   证明 $\tilde{I} = (g_{ij}\circ F)df^i df^j = \tilde{g}_{kl}dy^k dy^l$(其中$(\tilde{g}_{kl})_{m\times m} = J(F)^T_{m\times n}(g_{ij})_{n\times n}J(F)_{n\times m}$),是 $\tilde{D}$ 上的正定二次型.此时称 $(\tilde{D}, \tilde{I})$ 为由 F 诱导的黎曼流形，记为 $\tilde{I} = F^*I$

   (2). (10')特别地，考察曲面，
   $$\boldsymbol{r}(u,v) : D \mapsto E^3$$
   证明:若 E^3 赋以欧式度量 $I = dx^2+dy^2+dz^2$ ，则 D 由 $\boldsymbol{r}$ 诱导得到的度量 $\boldsymbol{r}^*I$ 恰是之前定义的第一基本形式。

3. (20') 给定2维黎曼流形 (D,I) ，并定义 D 关于 I 的协变微分 $\bigtriangledown_I$ (详见讲义).$\bigtriangledown_I$ 满足以下性质：

*本次作业在下周四下课后上交

(1). $\bigtriangledown_I(\mu_1+\mu_2)=\bigtriangledown_I(\mu_1)+\bigtriangledown_I(\mu_2)$,

(2). $\bigtriangledown_I(a\mu)=da\cdot\mu+a\bigtriangledown_I(\mu)$(Leibniz 法则),

(3). $d(<\mu_1,\mu_2>_I)=<\mu_1,\bigtriangledown_I(\mu_2)>_I+<\bigtriangledown_I(\mu_1),\mu_2>_I$ (度量相容).

证明上述前两条.

4. 平行移动.

(1). (15')考察平面上圆盘

$$D=\{(u,v)|u^2+v^2<1+\epsilon\},\epsilon>0$$

赋以度量

$$ds^2=\frac{4}{(1+(u^2+v^2)^2)^2}(dudu+dvdv).$$

计算点 $P_0=(-1,0)$ 处该点的切向量 $(1,0)$ 分别沿以下两条曲线移动到 $P_1=(1,0)$ 后得到的切向量：

1. $C_1:t\mapsto(-\cos t,-\sin t),t\in[0,\pi]$.
2. $C_2:t\mapsto(-\frac{\cos t}{1+\sin t},0),t\in[0,\pi]$.

(HINT：注意上述模型等价于E^3中的单位球面,那么那两条曲线对应于球面上的哪两条曲线？)

(2). (15')考察Poincarè圆盘 (D,I) (见第一题),以及 D 上的一条曲线

$$\boldsymbol{r}:t\mapsto(r\cos t,r\sin t),t\in[0,2\pi].$$

计算点 $(r,0)$ 处的切向量沿着此曲线的平行移动.