

微分几何习题 14 *

2016年 12月 8日

一. 证明: $d(\langle \mu_1, \mu_2 \rangle) = \langle \nabla_I(\mu_1), \mu_2 \rangle_I + \langle \mu_1, \nabla_I(\mu_2) \rangle_I$, 其中 $\mu_1, \mu_2 \in T_D$, $\langle, \rangle_I$ 为定义在度量 I 上的内积。

二. 设 $\{\omega_1, \omega_2\}, \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2\}$ 满足 $I = \omega_1^2 + \omega_2^2 = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2$, ω_{12} 与 $\tilde{\omega}_{12}$ 分别为他们的联络1-形式, $\{e_1, e_2\}, \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\} \in T_D$ 分别为他们的对偶基。

证明: 对 $\forall \{f_1, f_2\}, \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}$, 满足 $f_1 e_1 + f_2 e_2 = \tilde{f}_1 \tilde{e}_1 + \tilde{f}_2 \tilde{e}_2$, 有

$$(df + f \cdot \omega) \cdot e = (d\tilde{f} + \tilde{f} \cdot \tilde{\omega}) \cdot \tilde{e}$$

其中 $df = (df_1, df_2), e = (e_1, e_2), \omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} \\ -\omega_{12} & 0 \end{pmatrix}$, $d\tilde{f}, \tilde{e}, \tilde{\omega}$ 定义类似。

三. 回忆 $r_* : TD \rightarrow TS, f \frac{\partial}{\partial u} + g \frac{\partial}{\partial v} \mapsto fr_u + gr_v$ 。

证明: 对 $\forall \mu, \nu \in TD$, 有 $r_*(\nabla_\nu(\mu)) = Pr \circ [d_{r_*(\nu)}(r_*(\mu))]$, 其中 $Pr : T_{\mathbb{R}^3} \rightarrow TS$ 为垂直投影。

四. 给定义在区域一 $\mathcal{D}_1 = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ 的度量 $ds^2 = \frac{4}{(1-(u^2+v^2)^2)}(dudv + dvdu)$ 和定义在区域二 $\mathcal{D}_2 = \{(x, y), y > 0\}$ 上的度量 $ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$ 。证明:

1. 这两个度量之间存在等距变换。

2. 求区域一在该度量下的测地线。

五. 设 $\vec{v} = f^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + f^2 \frac{\partial}{\partial u_2}$ 是曲面 S 的切向量场。给定一个 I 形式, 令 $(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$, $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 为相应的Christoffel符号 (见课本P71)。

证明: $\vec{v}$ 的协变微分 $\nabla_I \vec{v} = (df^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha f^\beta du^\gamma) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ 。

六. 课本150页第10题。

七. 课本150页第11题。

八. 课本151页第14题。

九. 课本151页第15题。

十. 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面 S^2 以及起点为 $(-1, 0, 0)$ 的单位向量 $\vec{v} = (0, 0, 1)$ 。求向量 $\vec{v}$ 沿着 S^2 上的曲线 $\{(\cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi), \phi \text{ 从 } -\pi \text{ 到 } 0, \theta \text{ 固定}\}$ (该曲线为球面的一个大弧的一半) 做平行移动后得到的向量 $\tilde{v}$ 与 $\vec{v}$ 的夹角。

十一. 利用 $\mathbb{R}^3$ 中单位球面的测地线是大圆, 求在 $(\mathbb{R}^2, \frac{dudv + dvdu}{(1+u^2+v^2)^2}, u, v \in \mathbb{R})$ 度量下的测地线方程。

*本次作业在下周四下课后上交