微分几何习题 15 *

2016年 12月 15日

1. (习题五,18).

   设曲面 S 上以 P 为中心, r 为半径的测地圆的周长为 $L(r)$, 所围区域的面积为 $A(r)$, 证明: P 点的 Gauss 曲率

   $$K(P) = \lim_{r\to 0}\frac{3}{\pi}\frac{2\pi r - L(r)}{r^3}$$
   $$\lim_{r\to 0}\frac{12}{\pi}\frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4}.$$

   (由于 $2\pi r$, πr^2 分别是 Gauss 曲率为 0 时测地圆的周长,面积. 本题说明了 Gauss 曲率的一个几何表现,即反映了"圆"的周长或面积与平直情形的偏离程度.)

2. (习题五,19).

   证明: 在常 Gauss 曲率曲面上,测地圆具有常测地曲率.

3. (习题五,20).

   证明: 若曲面上有两族测地线成定角,则曲面是可展曲面.

4. (习题五,21).

   设 $\boldsymbol{r}: D \to E^3$ 是一张曲面, D 是单连通区域, $\boldsymbol{r}$ 的 Gauss 曲率 $K < 0$. 证明: 从 D 内一点出发的两条测地线不会相交于 D 内另一点.

5. (习题五,23)

   求下述两个曲面间的等距变换:

   (1). $D = \{(u,v)|v>0\}, I = \frac{a^2}{v^2}(dudu + dvdv)$;

   (2). $D = \mathbb{R}^2, I = dudu + e^{\frac{2u}{a}}dvdv$.

6. (习题五,24).

   设给定黎曼流形 $(D = \{(u,v)\}, I)$, $C : (u(t), v(t))$ 是 D 的一条正则曲线, $\boldsymbol{v} = u'(t)\frac{\partial}{\partial u} + v'(t)\frac{\partial}{\partial v}$ 是 C 的切向量场.证明: C 是测地线当且仅当存在函数 $\lambda = \lambda(t)$ 使得沿 C , 有

   $$\frac{D\boldsymbol{v}}{dt} + \lambda\boldsymbol{v} = 0.$$

---

*本次作业在下周六习题课上交

7. (习题五,25).

   给定黎曼流形 $D=\{(u,v)|v>0\}, I=v(dudu+dvdv)$,求 D 上的测地线.

8 (测地平行坐标系).

   设 S 是 E^3 的曲面, 取曲面上一点 P, C 是过 P 点的测地线, C 的弧长参数为 $v(|v|,\delta)$, $v=0$ 对应 P 点, 过 C 的各点作与 C 正交的测地线, 它们的弧长参数记为 u. 显然 $u=0$ 就是曲线 C. (u,v) 构成了 P 点附近的一个参数网.

   设曲面 S 在 (u,v) 参数下的第一基本形式为 $I=Edudu+2Fdudv+Gdvdv$.

   (1). 证明:$E=1$.

   (2). 证明:$F=0$.

   (3). 证明:$G(0,v)=1$. 对于 $u\neq 0$, $G(u,v)=0$ 是否成立?

   (4). 若任取一条过的曲线，过 C 的各点作与 C 正交的测地线, 它们的弧长参数记为 u. $|u|,|v|$ 充分小时,(u,v) 构成了 P 点附近的一个参数网. 此时是否还有 $F=0$?

   ①. 注意本题提供了一种直接构造正交参数的方法.但是不能够做到使得自然基与任意的正交标架场平行.

   ②. 本题假设了 S 是 E^3 的曲面, 如果内蕴的做，需要黎曼联络的无挠性与度量相容.

9. 设给定黎曼流形 (D,I), 且满足 Gauss 曲率 $K\leqslant -1$, C 为 D 上的测地 n 边形.证明:

   (1). $n\geqslant 3$.

   (2). 若 $n=3$, 则 C 围成的面积 $\leqslant \pi$.

10. 考察旋转面

$$S(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

   其中 $\gamma(u)=(f(u),0,g(u))$ 为 xz -平面中的弧长参数曲线.

   取定 $u_1<u_2$. 令 $\gamma_1=(f(u_1)\cos v, f(u_1)\sin v, g(u_1))$, $\gamma_2=(f(u_2)\cos v, f(u_2)\sin v, g(u_2))(0<v<2\pi)$. $R=\{(u,v)|u_1\leqslant u\leqslant u_2, 0<v<2\pi\}$.

   直接计算

$$\int_0^{l(\gamma_1)}\kappa_g ds, \int_0^{l(\gamma_2)}\kappa_g ds, \iint_R K dA.$$

   并用这个例子验证 Gauss-Bonnet 定理.

11. 证明:设 P 是曲面 S 的一点, 则存在 P 点的一个小邻域 U, 使得对任意的 $Q\in U$, 在 U 内连接 P,Q 两点的测地线的长度在所有连接这两点的曲面曲线中最短.

    (§5.3 中提到曲面上连接两点的最短线是测地线,但反之不成立.本命题说明上述现象对于充分短的测地线是成立的.)

12. 设有黎曼流形 (D,I) ,在测地极坐标系下, $I=d\rho^2+Gd\theta^2$.

    (1). 用 Gauss 方程求出此时 Gauss 曲率的表达式

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

    并由此说明 $\lim\limits_{\rho\to 0}-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}=K(P)$.注意上式在 $\rho\to 0$ 时是 $\frac{0}{0}$ 的不定式.

    (2). 当 K 是常数时,分别在 $K=0$, $K>0$, $K<0$ 的情形求出对应的 G, 从而对应的第一基本形式 I.