则h的图与$f+g$ 的图沿直线$\{(x,y,z)|z\in R,\ \lambda x+C_1=\frac{\pi}{2},-\lambda y+C_2=-\frac{\pi}{2}\}$可以光滑拼接起来，在这条直线附近有参数表示：

$$\vec{r}(y,z)=(\frac{\arccos[e^{\lambda(z-C)}\cos(-\lambda y+C_2)]-C_1}{\lambda},y,z),$$

上式中arccos定义在$\frac{\pi}{2}$附近。 由此我们可以得到一个更“完整(完备)”的曲面。定义:

$$Q_{k,j}=\{(x,y)\big||\lambda x+C_1-k\pi|\leq\frac{\pi}{2},|-\lambda y+C_2+j\pi|\leq\frac{\pi}{2}\}$$
$$L_{k,j}=\{(x,y)\big|\lambda x+C_1-k\pi=\frac{\pi}{2},-\lambda y+C_2+j\pi=\frac{\pi}{2}\}$$
$$\Omega=\cup_{-\infty<k,j<\infty,\ k+j\text{为偶数}}Q_{k,j}$$

则h在Ω 上的图与$\cup_{-\infty<i,j<\infty}L_{i,j}$的并是一个光滑的曲面
☺补充习题：求该曲面Gauss映照的像集。
☺补充习题：对$z=f(x+y)+g(y)$是否有类似结论?

3.2.36

下面我们给出直纹极小曲面为平面或正螺面的两个证明。
方法一：设我们所考虑的直纹面为$\vec{p}(u)+v\vec{q}(u)$, 则在每点处存在向量$\vec{X}$, s.t. $\vec{X}\perp\vec{q}$ 并且$\vec{X}\wedge\vec{q}=\vec{m}$ (这里$\vec{m}$是曲面的法向)，我们考虑向量场$\vec{X}$的一条积分曲线，记为$\vec{a}(s)$，$\vec{a}$ 的切向，主法向，副法向分别记为$\vec{t},\vec{h},\vec{b}$。
现在我们得到曲面的更加简约的参数表达式$\vec{r}(s,t)=\vec{a}(s)+t(\cos\theta(s)\vec{h}+\sin\theta(s)\vec{b})$。

$$\vec{r}_s=\vec{t}+t(-\sin\theta\theta'\vec{h}+\cos\theta(-k\vec{t}+\tau\vec{b})+\cos\theta\theta'\vec{b}+\sin\theta(-\tau\vec{h}))$$
$$\vec{r}_t=\cos\theta\vec{h}+\sin\theta\vec{b},\ \vec{r}_{tt}=0$$

我们记曲面的第一第二基本形式为$\mathrm{I}=Eds^2+2Fdsdt+Gdt^2,\ \mathrm{II}=Lds^2+2Mdsdt+Ndt^2$.

$$\Rightarrow\ \vec{r}_s\cdot\vec{r}_t=F=0,\ \vec{r}_{tt}\cdot\vec{m}=N=0$$

故平均曲率$=0\Leftrightarrow\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}=0\Leftrightarrow L=0\Leftrightarrow\vec{r}_{ss}\cdot\vec{m}=0$
直接计算有：$\vec{m}$ 平行于 $t(-\tau-\theta')\vec{t}+(\cos\theta\vec{b}-\sin\theta\vec{h})(1-tk\cos\theta)$

$$\begin{aligned}\vec{r}_{ss}=&(k-t\cos\theta\theta'^2-t\sin\theta\theta''-2t\cos\theta\theta'\tau-t\sin\theta\tau'-t\cos\theta k^2-t\cos\theta\tau^2)\vec{h}\\&+t(-\sin\theta\theta'^2+\cos\theta\theta''-2\sin\theta\theta'\tau+\cos\theta\tau'-\sin\theta\tau^2)\vec{b}\\&+t(2k\sin\theta\theta'+\sin\theta\tau k-\cos\theta k')\vec{t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\vec{r}_{ss}\cdot\vec{m}=0\quad\Leftrightarrow\\&\quad 0=-k\sin\theta+t(\tau'+\theta''+\sin2\theta k^2)\\&\quad\quad+t^2(-\theta''k\cos\theta-\tau'k\cos\theta-\sin\theta\cos^2\theta k^3-(\tau+\theta')(2k\sin\theta\theta'+\sin\theta\tau k-\cos\theta k'))\end{aligned}$$

上式等于零在整个曲面上成立，故作为t的多项式，各项系数为零，

$$\Rightarrow\ \theta=0,\ \tau k'=0,\ k\tau'=0$$

故在$k\neq 0$且$\tau\neq 0$ 的地方，k,τ 均为常数，由k,τ的连续性，$\vec{a}(s)$为正螺线。 若在$k\neq 0$的地方，τ恒为零，则k为非零常数，$\vec{a}(s)$为圆。若k恒为零，$\vec{a}(s)$ 为直线。
说明：从上面的分析中，我们知道，R^3中的直纹面具有R上三个任意函数的自由度。而平均曲率$=0$ 转化为三个方程，我们推测这三个方程可以约化为R上一个函数的微分方程，其解空间应为实有限维的。所以我们估计直纹极小曲面，应该包含在某具有有限参数的曲面族中。经过详细计算，可以确定，直纹极小曲面只能是正螺面或平面。注意到，在上面的计算中，我们可以简化计算并不需要得到$\vec{r}_{ss}$的完整的表达式, 我们将$\vec{r}_{ss}\cdot\vec{m}$的表达式具体写出，是为了体现证明的思想。

方法二： 对于R^3中的直纹极小曲面S，我们可在其上定义光滑向量场$\vec{X}$, $\vec{X}$ 垂直于直母线方向， 取$\vec{X}$ 的一条积分曲线$\vec{r}(s)$, $\vec{r}(s)$的切向和主法向分别记为$\vec{t},\vec{h}$。由于直母线方向为渐近方向，且S为极小曲面，每点处两渐近方向互相垂直。故$\vec{r}(s)$为渐近线，$\vec{h}(s)$为直母线方向。故对任意λ足够小，$\vec{r}(s)$与$\vec{r}(s)+\lambda\vec{h}(s)$为Beltrand曲线对。由(本辅导第二章) Beltrand曲线对的性质得出，$\vec{r}(s)$为平面曲线或正螺线，由此S为平面或正螺线。

3.2.37 ☺思考题1

(1)f是在R^2上所有点处有定义的一个光滑函数，且$\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in R^2\}$是一个极小曲面。证明 f恒为常数。
(2)不存在R^2上所有点处有定义的一个光滑函数f，使得$\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in R^2\}$的Gauss曲率恒正。

3.2.38 ☺思考题2

4 平行移动与结构方程

4.1 结构方程+外微分

4.1.1 如何由第一第二基本形式构造曲面

4.2 习题解析

4.2.1

(1)

$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}=trace\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}=traceI=2$$

更具体一些，若记：$g_{11}=E$, $g_{12}=g_{21}=F$, $g_{22}=G$, 则 $g^{11}=\frac{G}{EG-F^2}$，$g^{12}=g^{21}=\frac{-F}{EG-F^2}$，$g^{22}=\frac{E}{EG-F^2}$
一般地，若$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$, 则 $a_{ij}b_{ji}=traceAB$, $a_{ii}=traceA$, $(\Sigma_j a_{ij}b_{jk})=AB$.
☺补充习题:

$$g^{1\alpha}g_{\alpha 2}=?,\quad g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g^{\gamma\theta}g_{\theta\alpha}=?,\quad g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g^{\gamma\theta}g_{\theta\phi}g^{\phi\xi}g_{\xi\alpha}=?$$