期中考试解答(部分)

2016年 12月 3日

三. 提供两种解法。

(1). 证明有无穷条(连续)曲线连接 p , q 两点，且这无穷条曲线仅交于端点处.然后对每条曲线应用连续函数的介值定理.

Σ 同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中的一个连通开集 U .故不妨直接考虑 U .

1. $\mathbb{R}^2$ 中开集的连通性与道路连通性等价(这是因为 $\mathbb{R}^2$ 是局部道路连通的)(可参考科大数院数学分析中讲高维欧式空间拓扑的章节).
2. 取一条连接 p , q 的曲线 C ,在 C 上每一点 x ,存在包含 x 的一个小球 $B(x,\epsilon_x)\subset U$, 因 C 是紧集(同胚于闭区间 $[0,1]$), C 可被有限多个 $B(x_i,\epsilon_i/2)(i=1,,,n)$ 覆盖。设 ϵ 为 $\epsilon_i(i=1,,,n)$ 中最小值.则
$$D=\{x\in U|d(x,C)<\epsilon/2\}\subset U$$
这是因为，对于任意 $x_0\in D$, 设 $x_0\in B(x_i,\epsilon_i/2)$,则
$$B(x_0,\epsilon/2)\subset B(x_i,\epsilon_i)\subset U.$$
$(\forall y\in B(x_0,\epsilon/2), d(y,x_i)<d(y,x_0)+d(x_0,x_i)<\epsilon/2+\epsilon_i/2<\epsilon_i)$
这样, D 同胚于 $C\times(-1,1)$,同胚于 $D'=[0,1]\times(-1,1)$. 而在 D' 中找到需要的曲线族是容易的，比如可以考虑最简单的折线.

(2). 首先，Σ 是道路连通的，故挖去有限个点后依然道路连通.

(对于任意的道路连通空间 X , 考察 $X'=X\backslash\{x_0\}(x_0\in X)$, 对于 X 中任意两点 p , q ,以及连接两点的曲线 C. 若 C 不经过 x_0, 则它给出 X' 中一条曲线.否则考察取 x_0 的一个邻域 U_0 ，然后将 $C\cap U_0$ 做调整，绕过 x_0 即可。用简单的归纳可得上述命题).

假设只有有限个 H 的零点，设为 $\{x_1,,,x_n\}$, 那么 $\Sigma'=\Sigma\backslash\{x_1,,,x_n\}$ 仍然道路连通.对于任一条连接 p , q 两点的曲线应用介值定理可得到矛盾.

四. (1). 陈维桓，微分几何，北京大学出版社.171 页，定理4.4.