练习十六

1. 略

2. 答案可在近世代数三百题中找到，4.1.4 以下也是

3. 4.1.16

4. 4.2.2　　　　Pdf 文件也在主页上.

5. 4.2.5
   4.2.6

6. 设 $G' = G_1 \cup G_2$，则显然有 $K^{G_i} \supset K^{G'}$　$i=1,2$，
故 $K^{G_1} \cap K^{G_2} \supseteq K^{G'}$，又设 $x \in K^{G_1} \cap K^{G_2}$，则 $\forall\, g = g_1^1 g_1^2 \cdots g_i^1 g_j^1$（$\in G'$）
$g_k^1 \in G_1$，$g_k^2 \in G_2$ 有 $gx = x$，故 $x \in K^{G'}$
$\therefore K^{G_1} \cap K^{G_2} \subseteq K^{G'}$　　□.

$K^{G_i} \subset K^{G_1 \cap G_2}$　$i=1,2$　$\therefore$ $K^{G_1 \cap G_2} \supset K^{G_1} \cup K^{G_2}$.

而又 $Gal(K : K^{G_1} \cup K^{G_2}) \subset G_1 \cap G_2 \Rightarrow K^{G_1 \cap G_2} \subset K^{G_1} \cup K^{G_2}$

$\therefore$ $K^{G_1 \cap G_2} = K^{G_1} \cup K^{G_2}$.

7.
(1) 因为 α 为 K/F 的本原元，即 $F(\alpha) = K$，f 为 α 在 F 上的极小多项式，则 f 在 K 上分裂. 而 $KE = E(\alpha)$，显然 f 在 KE 上分裂.
故 KE/E 为 Galois 扩张

令 $\sigma\in Gal(KE/E)$，则 $\sigma|_{K\cap E}=Id$，故有君(?)同态

$$Gal(KE/E) \xrightarrow{\cancel{显然}} Gal(KE/_{K\cap E}) \longrightarrow Gal(K/_{K\cap E})$$

又若 $\sigma|_K=Id$，即 $\sigma(\alpha)=\alpha$，则 $\cancel{\sigma|_K=I \cdot \sigma=I}$ 由于 $KE=E(\alpha)$，

故 $\sigma=Id$，所以为单同态。又 设 α 在 E 上极小多项式为 $g\in E[x]$，$\deg g=n$，则 $n=|Gal(KE/E)|$ 且 $g|f$ 又 f ~~的~~ 在 K 上分裂。故 g 的系数为~~所有~~根的对称多项式 故也落在 K 中，

于是 $g\in K[x]$ $\therefore g\in K\cap E[x]$，而 $K=F(\alpha)=K\cap E(\alpha)$

知 $[K:K\cap E]\le \deg g=n$。(g 也为 α 在 $K\cap E$ 上极小多项式)。

故 ~~$[K:\ ]$~~ $|Gal(K/_{K\cap E})|\le n=|Gal(KE/E)|$ 故为同构。

(2)。

$F(\xi_n)/F$ ~~的~~ Galois 扩张证明略，又

$$Gal(F(\xi_n)/F)\cong Gal(Q(\xi_n)/_{Q(\xi_n)\cap F})\ (由(1))。$$

8 令 u 为 x^n-a 在 F 中的一个根，E 为 x^n-a 在 F 上的分裂域。则 $E=F(u)$。

设 m 为使得 $x^m-a=0$ 在 F 中有解的最大 m，$m|n$。

令 $d=\frac{n}{m}$，$b^m=a$ 则 $Gal(f)=Gal(g)$ $g=x^m-b$。

下证 g 为不可约多项式。设 $g=g_1\cdots g_k$，g_i 不可约。

则 g_i 为某 $\cancel{\xi_n^{k_i}\cdot a}$ $\cancel{\xi_n^{k_i}\cdot u}$ $\xi_n^{k_i}\cdot u$ 的极小多项式。

故 $\deg g_i=$ ~~$[E:F(u)][F(u):F]$~~ $[E:F]$ 所以 ~~$\deg g_i\cdot n$~~ $k\cdot\deg g_1=d$。

此时设 C_0 为 g_1 的常数项 于是 $C_0=\xi_n^b\cdot u^{\deg g_1}\in F$ $\therefore u^{\deg g_1}\in F$

由极小性知 $k=1$，即 g 在 F 上不可约. 故 .

$$\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(g) \cong \mathbb{Z}/\cancel{\ }d\mathbb{Z}$$

$$(u \to \zeta_n^{m i} \cdot u) \longmapsto \bar{i}$$

$\square$