练习一 *

2015年 3月 4日

1. 给定素数p，考虑整数集$\mathbb{Z}$模p的剩余类集合$S=\{\bar{0}=0 \mod p, \bar{1}, ..., \overline{p-1}\}$,$\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in S$，证明如下定义的运算
$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{a\cdot b}$$
是良好定义的，即与代表原选取无关，再证明剩余类集合和上述运算构成了一个域，记作$\mathbb{F}_p$。

2. 试证明若$(K,+,\cdot)$是域，则下列命题成立：
(1)对任何K中元素x，$0\cdot x=0$。
(2)对任何K中元素x和y，$x\cdot(-y)=-(x\cdot y)=x\cdot(-y)$。
(3)对于任何K中元素x和y，$(x\cdot y)=(-x)\cdot(-y)$。

3. 有方程$x^2+ax+b=0$（其判别式不是有理数的平方），其中系数是有理数。
设α和β是两个根，考虑如下问题：
(1)证明复数域的子集：
$$\mathbb{Q}(\alpha)=\{a+b\cdot\alpha，其中a和b是有理数\}$$
是一个子域。
(2)计算$\mathbb{Q}(\alpha)$中元素$1+\alpha$的乘法逆元，即$(1+\alpha)^{-1}$。
(3)证明$\mathbb{Q}(\alpha)$上有一个自然的$\mathbb{Q}-$线性空间结构（即域$\mathbb{Q}$上的线性空间，下同），并求其维数。

*本次作业在下周三下课后上交

提示：由$\mathbb{Q}(\alpha)$上的乘法可以诱导出有理数域在$\mathbb{Q}(\alpha)$的作用，之后验证向量空间的定义。

(4)证明$\mathbb{Q}(\alpha)$和$\mathbb{Q}(\beta)$作为复数域子集合是一样的，进而$\mathbb{Q}(\beta)$也是复数域的子域。

4. 本题是上一题的具体化。考虑实数域中子集合：

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) := \{a + b \cdot 2^{\frac{1}{3}} + c \cdot 2^{\frac{2}{3}} \mid \text{其中}a, b, c\text{是有理数}\}$$

(1)证明$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$是实数域的子域。

(2)计算它作为有理数上的线性空间维数。

(3)对于其中的元素$1+\sqrt[3]{2}$和$(\sqrt[3]{2})^2+1$，求它们的乘法逆元。

5. (1)有两域E和F，其中E是F的子域，即$F／E$，证明F自然是一个$E-$向量空间。

提示：参考Ex.2。

(2)域扩张次数：设$F／E$，那么F作为$E-$向量空间的维数叫做域扩张次数，记为 $[F:E]$。

  i) 试给出 $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ 作为 $\mathbb{Q}$-向量空间的基，同时找出一组 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ 作为$\mathbb{Q}(\sqrt[2]{2})$-向量空间的基。

  ii) 试给出 $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{2}), \mathbb{Q}(\sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{3})$ 作为 $\mathbb{Q}$-向量空间的基，同时找出一组 $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{3})$ 作为$\mathbb{Q}(\sqrt[2]{2})$-向量空间的基。

这里$\mathbb{Q}(a)$指复数域的包含a的最小子域，$\mathbb{Q}(a,b)$是包含a,b的最小子域。

一般的，假设有三个域E, F, G，其中$G／F$并且$F／E$，试给出它们域扩张次数的关系。

6. 设F是一个域, 1是F的单位元。记$m \cdot 1$为m个1相加，若不存在正整数m使得$m \cdot 1 = 0$，则称域F是特征0的；否则设n为满足$n \cdot 1 = 0$的最小正整数，我们称n是F是特征。现设F的特征不是0。

(1)试证明F的特征是某个素数p。

(2)证明F有一个p个元素的子域F_p，故F是一个F_p-向量空间。

提示：参考Ex.1。

(3)证明不存在6个元素的域。