练习十五 *

2015年 6月 17日

1. (1) $f=x^2+px+q,\ p,q\in\mathbb{Q}$，试讨论所有可能并给出相应的 $\mathrm{Gal}(f)$。
   (2) $f=x^3+px^2+qx+r,\ p,q,r\in\mathbb{Q}$，其中 f 可约，试讨论所有可能并给出相应的 $\mathrm{Gal}(f)$。

2. (1)证明 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1+\sqrt{-1}))/\mathbb{Q}$ 是四次扩张，并求出它的 Galois 群。
   (2)试写出 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}(1+\sqrt{-1}))$ 的所有子域。

3. 设$f\in F[x]$无重根
   证明：f 不可约$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Gal}(f)$ 在根集合上的作用是传递的。

4. (1) ζ_{p^m} 是 p^m 次本原单位根，其中 $m\in\mathbb{N},p$ 为奇素数，则其为以下多项式的根：

$$\Phi_{p^m}(x)=\frac{x^{p^m}-1}{x^{p^{m-1}}-1}=x^{p^{m-1}(p-1)}+x^{p^{m-1}(p-2)}+\cdots+x^{p^{m-1}}+1$$

   利用$Eisenstein$判别法证明$\Phi_{p^m}(x)$是不可约多项式。
   (2) 对于任意 $\sigma\in Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{p^m})/\mathbb{Q})$，设 $\sigma(\zeta_{p^m})=\zeta_{p^m}^{a_\sigma}$，证明 $(a_\sigma,p^m)=1$ 且这给出群同构

$$Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{p^m})/\mathbb{Q})\to(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times,\quad \sigma\mapsto a_\sigma$$

   从而 $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_{p^m})/\mathbb{Q})\cong(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times\cong\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/p^{m-1}\mathbb{Z}$
   (3)证明对一般的 n 也有同构 $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})\to(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$
   从而 $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\cong(\mathbb{Z}/p_1^{m_1}\mathbb{Z})^\times\times\cdots\times(\mathbb{Z}/p_i^{m_i}\mathbb{Z})^\times$，其中 $n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdots p_i^{m_i}$ 为 n 的素分解，第二个同构号由中国剩余定理给出。

5. 设E/F是p次循环扩张，且F不含p次单位根，证明E/F不是根式扩张。

*本次作业在6月22日下课后上交

6. 证明：G 是可解群 $\Longleftrightarrow$ 存在可解列 $G_n = 1 \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 = G$，且$G_i/G_{i+1}$是素数阶循环群

7. （选做题）任一有限群均是某个域的 Galois 扩张的 Galois 群。