练习十六

2015年 6月 24日

1. 设$K=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\alpha_i$在$F$上的极小多项式是$f_i(x)$, 证明：$K/F$是伽罗瓦扩张当且仅当对于每个$i,f_i(x)$在$K$上分裂。

2. $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},u),u^2=(9-5\sqrt{3})(2-\sqrt{2})$, 证明：$E/\mathbb{Q}$是伽罗瓦扩张，并求出其伽罗瓦群。

3. 1）证明：$\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})/\mathbb{Q}$是伽罗瓦扩张，并求出其伽罗瓦群；

   2）求$\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}$在$\mathbb{Q}$上的极小多项式；

   3）证明$\sqrt{6}\in\mathbb{Q}(\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})$

4. 设F为实数域$\mathbb{R}$的子域,$f(x)$为$F[x]$中三次不可约多项式。证明$D(f)>0$当且仅当$f(x)$有三个实根。

5. 确定$f(x)$在域F上的伽罗瓦群，其中

   (1)$f(x)=x^4-5,F=\mathbb{Q},\mathbb{Q}(\sqrt{5}),\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

   (2)$f(x)=x^4-10x^2+4,F=\mathbb{Q}$.

   (3)$f(x)=x^5-6x+3,F=\mathbb{Q}$.

6. $G=Gal(K/F),G_1,G_2$是G的两个有限子群，证明：

   $K^{G_1\bigcup G_2}=K^{G_1}\bigcap K^{G_2},K^{G_1\bigcap G_2}=K^{G_1}\bigcup K^{G_2}$

   其中$G_1\bigcup G_2$表示包含这两个群的最小的群，$K^{G_1}\bigcup K^{G_2}$表示包含这两个域的最小的域。

7. 设K/F为有限伽罗瓦扩张，E/F为有限扩张。

   (1)证明：KE/E为伽罗瓦扩张，并且$Gal(KE/E)\cong Gal(K/K\bigcap E)$, 其中$Gal(K/K\bigcap E)$是$Gal(K/F)$的子群。

   (2)若ζ_n是n次本原单位根，证明$F(\zeta_n)/F$是伽罗瓦扩张，且有$Gal(F(\zeta_n)/F)$同构于$Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$的子群，$Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})\cong(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

8. 设F为域，F包含n次本原单位根ζ_n，$f(x) = x^n - a \in F[x]$. 试讨论$Gal(f)$.