练习二 *

2015年 3月 11日

1. 设$f : E \to F$是域同态。证明f是单射，且E在f下的像自然是F的子域；反之若G是F的子域，则存在域的自然的嵌入映射$g : G \to F$。
2. 群的一些基本性质

   设G是一个群，请证明下列性质：

   a.群G中元素的逆元是唯一的。

   b.群G中消去律成立，即如果$a \cdot b = a \cdot c$，那么$b = c$；如果$b \cdot a = c \cdot a$，那么$b = c$。

   c.设$x, y \in G$，证明$(x^{-1})^{-1} = x, (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$。
3. 证明不存在从$\mathbb{F}_2$到$\mathbb{Q}$的域同态。
4. 域的自同构

   a.设K是$\mathbb{Q}$的一个扩域，证明K的任意自同构均保持$\mathbb{Q}$不动。

   b.试证明$\mathrm{Aut}(\mathbb{R}) = \{id\}$，即实数域只有平凡的自同构。

   c.证明$\mathbb{F}_p$的自同构$\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p) = \{id\}$。$\mathbb{F}_p$的概念见上次习题。

若集合G及其上的二元运算满足结合律，即对任意 $a, b, c \in G$，

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

则称 $(G, \cdot)$为一个**半群**（semigroup）。进一步的若存在 **单位元** $1 = 1_G$，即对任意$a \in G$，

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$$

则称$(G, \cdot)$为**含幺半群**（monoid）。

*本次作业在下周三下课后上交

5 两个例子

a.$(\mathbb{Z},+)$是整数加法群，试分别找出满足如下条件的真子集:

c.1) 在加法运算下构成一个子群。

c.2) 在加法运算下构成一个含幺半群，但不是一个子群。

c.3) 在加法运算下构成有一个半群，但不是含幺半群。

b.令G_r是所有秩不大于r的$n \times n$阶复方阵的集合，试证在矩阵的乘法下G构成半群，且G_r是一个含幺半群当且仅当$r = n$。

6 设G是半群，若对任意的$a, b \in G$，方程$xa = b$和$ay = b$在G内有解，则G是群。