

练习四 *

2015年 3月 25日

1. 设 a, b 是群 G 的两个元素, 其中 a 的阶是7, 有 $a^3b = ba^3$, 证明: $ab = ba$ 。
2. 设 G 是 n 阶阿贝尔群, $r \in \mathbb{Z}$ 且 $(r, n) = 1$ 。证明: 映射

$$\varphi: G \rightarrow G, \varphi(x) = x^r$$

是一个群同构 (先证明这是一个群同态)。

3. 回答下面的问题:
 - a. 设 p 是素数, 则 p 方幂阶群是否一定含有 p 阶元素?
 - b. 35阶群是否一定含有5阶和7阶元素?
 - c. 若有限阶群 G 含有一个10阶元素 x 和一个6阶元素 y , 试证明 $30 \mid |G|$ 。是否存在一个阶为30的群同时含有阶为6和阶为10的两个元素, 若有, 请举出一例。
4. 设 $G = GL_n(\mathbb{R})$, H 是其中行列式为正的方阵构成的子集, 证明 H 是 G 的正规子群, 并具体写出 G/H 中的元素。
5. 证明: 群 G 中指数为2的子群一定是 G 的正规子群。
6. 设 $G = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$, 乘法定义为

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)。$$

试证: $K = \{(1, b) \mid b \in \mathbb{R}\}$ 是 G 的正规子群且 $G/K \cong \mathbb{R}^\times$ 。

7. 证明积群 $G \times G'$ 的子集 $G \times 1$ 是一个与 G 同构的正规子群, 且

$$G \times G' / G \times 1 \cong G'.$$

*本次作业在下周三下课后上交

8. 设 M, N 为 G 的正规子群。若 $M \cap N = 1$ ，则对任意的 $a \in M, b \in N, ab = ba$ 。
9. 设 $N \triangleleft G$ ， g 是群 G 的任意一个元素。如果 g 的阶和 $|G/N|$ 互素，则 $g \in N$ 。
10. 设 G 是 n 阶有限群，若对 n 的每个因子 m ， G 至多有一个 m 阶子群，则 G 是循环群（此题选做）。