练习五 *

2015年 4月 1日

1. 设N是G的正规子群，M及$\bar{M}$如下定义：

   $M=\{K|N\leq K\leq G\}$

   $\bar{M}=\{\bar{K}|\bar{K}\leq\bar{G}=G/N\}$

   证明：映射$\varphi:M\rightarrow\bar{M},K\mapsto\bar{K}=K/N$是一个一一映射。

2. a.证明：群G的中心$Z(G)$是正规子群。找一个例子说明$G/Z(G)$的中心不一定是平凡的。

   b.试求群$GL_n(\mathbb{R}),O_2(\mathbb{R}),SO_3(\mathbb{R}),SU_2(\mathbb{C})$ 的中心。

   c.设$N\leq M\leq G$，且N是G的正规子群，证明N一定是M的正规子群。

3. 设G是群

   a.对任意的$x\in G$，证明映射：

   $\sigma_x(g)=xgx^{-1},\forall g\in G,$

   是G的自同构，称为群G的内自同构。

   b.$I(G)$表示G的内自同构全体组成的集合，证明：

   1.$I(G)$是$Aut(G)$的子群，该子群称为内自同构群。

   2.$I(G)\cong G/Z(G)$。

4. 若$G/Z(G)$是循环群，证明G是阿贝尔群。

5. 设H是G的子群，验证如下公式

   $$(h,h')(x)=h'xh^{-1}$$

   给出群 $H\times H$ 在 G 上的作用，其中$(h,h')\in H\times H,x\in G$。

*本次作业在下周三下课后上交

6. 设群G在集合$\sum$上的作用是传递的，N是G的正规子群，则$\sum$在N作用下的每条轨道有同样多的元素。

7. 设X是$\mathbb{R}$上所有函数的集合。验证$a \cdot f(x) = f(ax)(a \in \mathbb{R}^{\times})$给出乘法群$\mathbb{R}^{\times}$在$X$上的作用，并确定所有稳定子群为$\mathbb{R}_{+}^{\times}$的函数$f$。

8. 集合$A \subseteq \mathbb{R}^n$的对称群是指将A映为自身的所有刚体变换得到的群。

   (1)求正方形，除正方形外的长方形，除正方形外的菱形，圆的对称群。

   (2)求正四面体，正立方体，正八面体，正十二面体，正二十面体的对称群各有多少元素？这五个对称群当中是否有同构的？

9. 设群G作用在集合$\sum$上。令t表示$\sum$在G作用下的轨道个数，对任意$g \in G$,$f(g)$表示$\sum$在g作用下的不动点个数。试证

   $$\sum_{g \in G} f(g) = t|G|.$$

   这就是说，G的每个元素在$\sum$ 上的作用平均使得t个元素不动。