

代数曲面理论：历史与展望

谈胜利
(华东师范大学)

2015年10月9日

问题:

1、为什么要研究理想?

2、下述积分为什么不可积?

$$\int_{\alpha}^w \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Ax + B}}$$

答案:

- 1、来自解多项式方程组（初等变换）
- 2、与下述三次曲线在复数域上的图形有关？

$$C: y^2 = x^3 + Ax + B$$

大学数学

- 数学分析 --- 微积分
- 高等代数 --- 多项式方程组
- 解析几何 --- 低次多项式解的几何

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \quad (*) \\&\dots\dots\dots \\f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}$$

解方程的基本定理

➤ 高斯代数基本定理:

每一个非常数多项式 $f(x)$ 有一个复根

➤ 希尔伯特零点定理

方程组 (*) 无复数解当且仅当存在多项式

$g_1, \dots, g_k$ 使得

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_k g_k = 1$$

解方程的诺特技巧

利用一般的线性变换

$$x_1 \rightarrow x_1 + \lambda_1 x_n$$

$$x_2 \rightarrow x_2 + \lambda_2 x_n$$

.....

$$x_{n-1} \rightarrow x_{n-1} + \lambda_{n-1} x_n$$

我们可以假设 $f_t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 都是 x_n 的首1多项式

$$f_t = x_n^m + a_1 x_n^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_n + a_m$$

代数几何

- 代数曲线 --- $C \subset \mathbb{C}^2$: $f(x, y) = 0$
- 代数曲面 --- $S \subset \mathbb{C}^3$: $f(x, y, z) = 0$
- 代数几何 --- 多项式解的几何

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 & (*) \\ &\dots\dots\dots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

低次的数学：一次、二次的数学

方程： 一次方程、二次方程

几何： 直线、圆、椭圆、抛物线、双曲线

数论： Pell 方程、初等数论

高次的数学：三次以上的数学

方程： 三次方程的求解、Galois 理论
三等分角问题，同余数问题 ...

几何： 椭圆曲线、代数曲线 ...

数论： BSD 猜想、费尔马大定理 ...

第一阶段（19世纪前）

一次二次的数学

欧几里得几何 (~ 公元前 300)

总结了公元前 7 世纪至 4 世纪希腊的几何成果。

研究对象: 直线 和 圆

解析几何 (17 世纪初)

笛卡儿和费尔马引进了坐标后

几何问题 $\longleftrightarrow$ 代数问题

研究对象: 直线 和 圆锥曲线

射影几何 (17 世纪初)

研究对象: 直线 和 二次曲线 的射影性质

第二阶段（19世纪）

代数曲线与曲面

- 单变量代数函数论 --- 代数曲线 C

$$y^m + a_1(x)y^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(x)y + a_m(x) = 0$$

将 y 看成是 x 的多值函数 $y = y(x)$

黎曼为代表：黎曼曲面，亏格

- 双变量代数函数论 --- 代数曲面 S

$$z^m + a_1(x, y)z^{m-1} + \cdots + a_m(x, y) = 0$$

庞加莱为代表：代数拓扑

第三阶段（二十世纪）

代数曲面

- 覆盖平面: $S \rightarrow \mathbb{C}^2, (x, y, z) \rightarrow (x, y)$

域扩张理论: $\mathbb{C}(x, y)[z]$

- 纤维化曲面: $S \rightarrow \mathbb{C}, (x, y, z) \rightarrow z$

庞加莱的方法: $F_t: f(x, y, t) = 0, t \in \mathbb{C}$

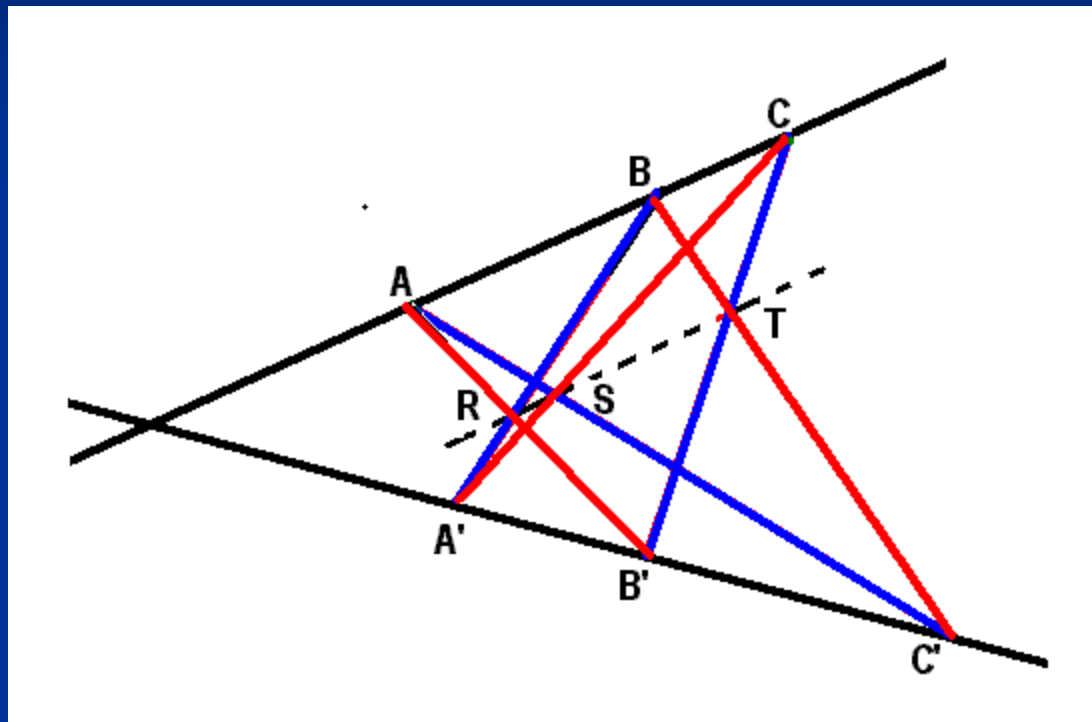
$$S = \cup F_t$$

- 紧复曲面: $S = \cup U_i$

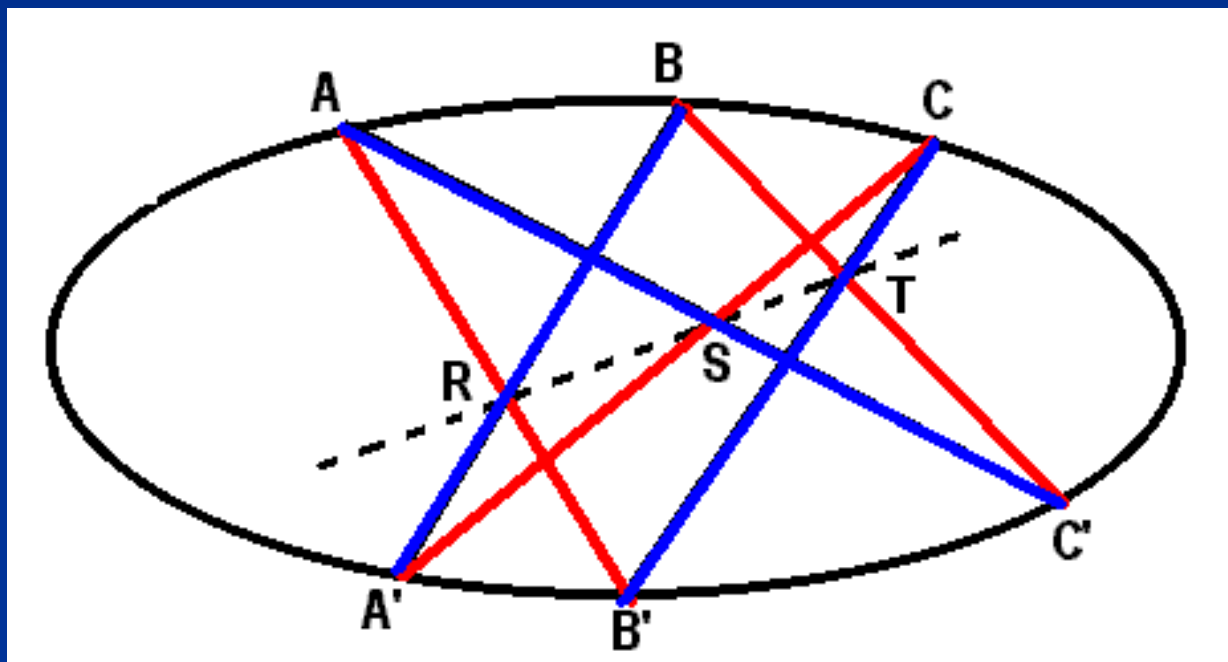
小平邦彦 Kodaira 1960 年代

一、从平面几何到 现代数学

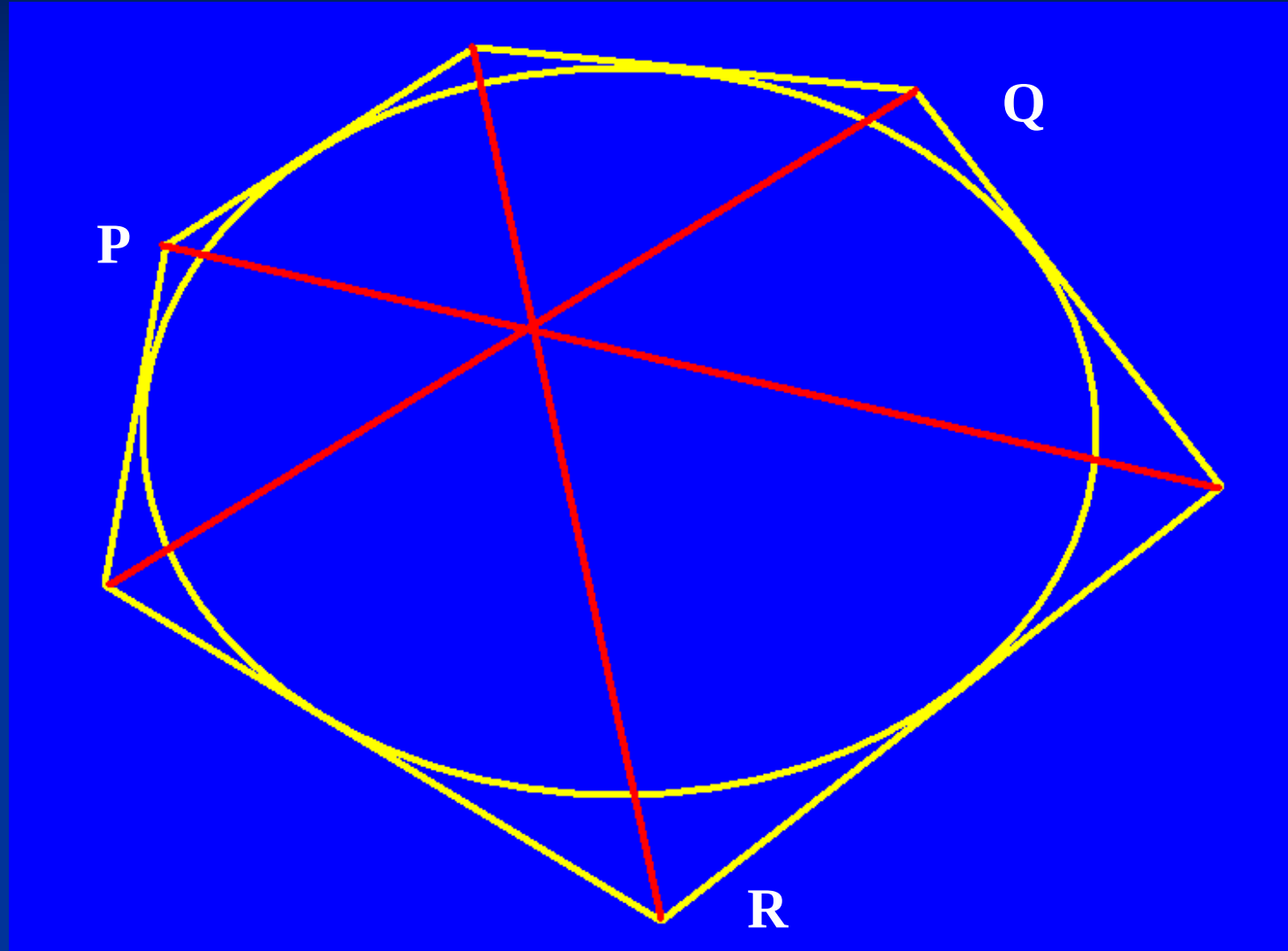
Pappus 定理 (公元 300 ~ 350)

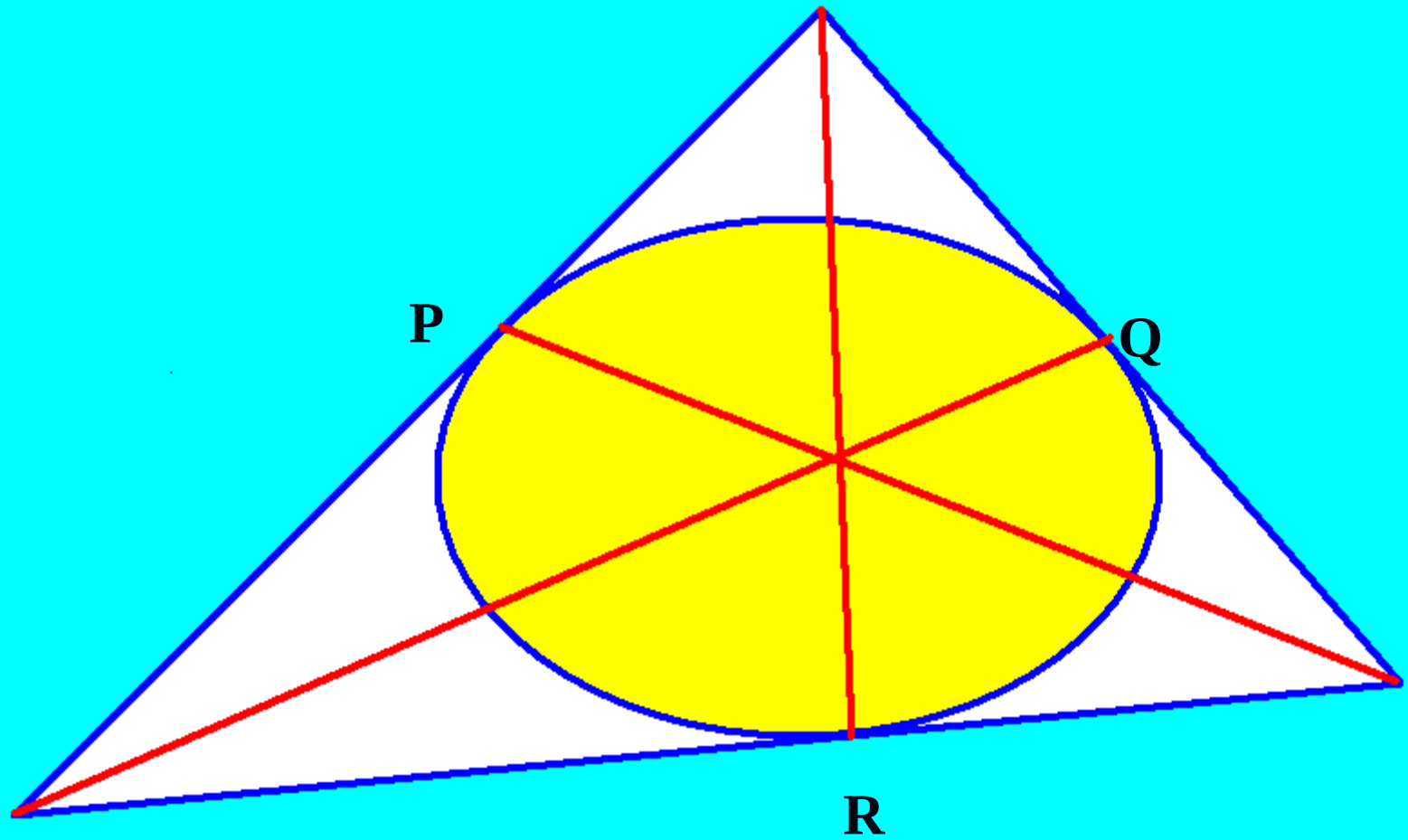


Pascal 定理 (公元 1640)



Brianchon 定理 (~ 1800s)





欧氏平面上的二次曲线

椭圆: 与无限远直线 L_∞ 不相交的二次曲线

抛物线: 与 L_∞ 相切的二次曲线

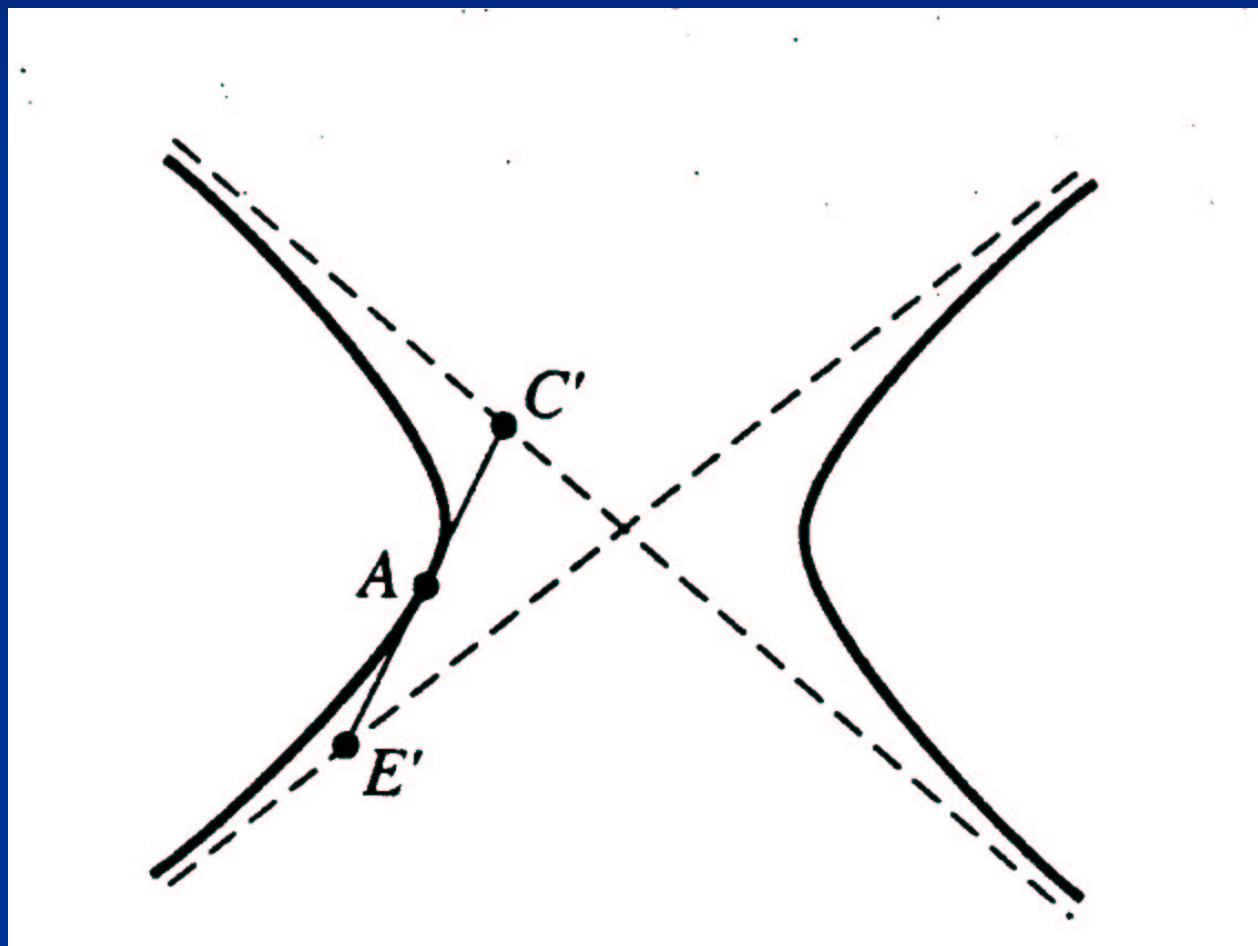
双曲线: 与 L_∞ 相交两个点的二次曲线

圆: 与 L_∞ 相交于下述两个固定虚点的二次曲线

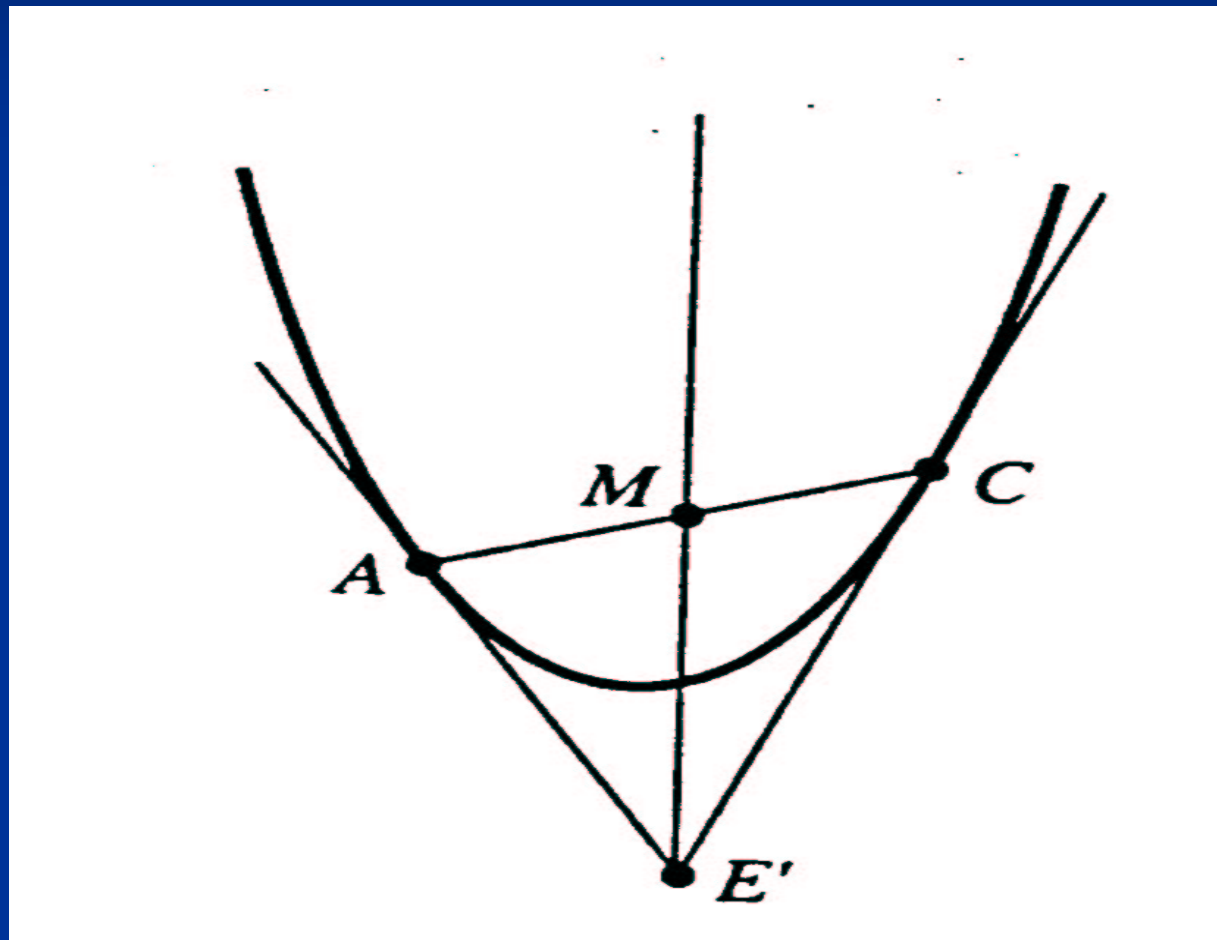
$$[1, i, 0], \quad [1, -i, 0]$$

平行线: 相交于无限远处的两直线

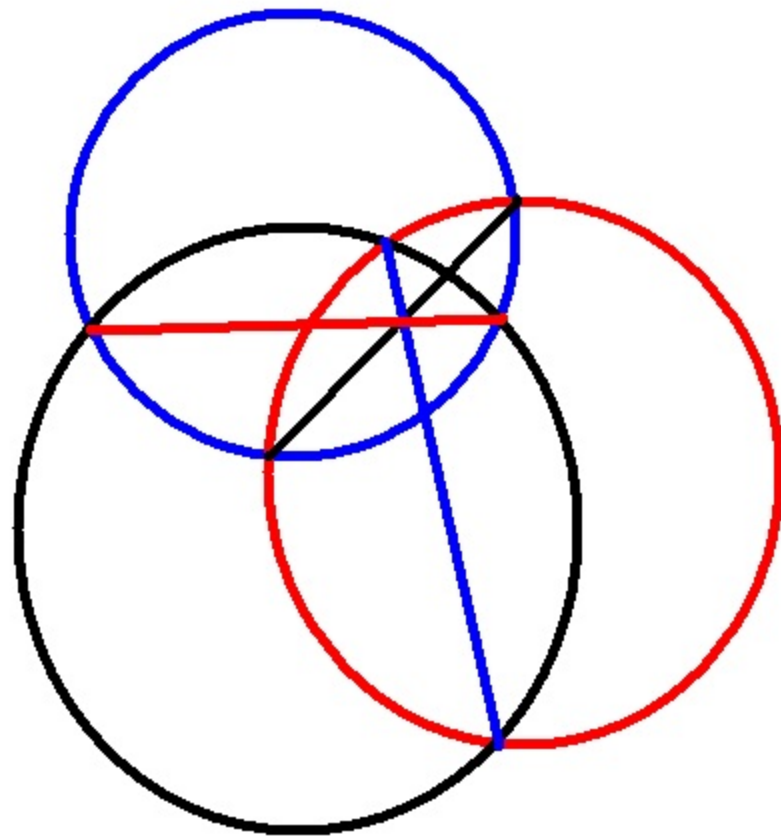
将P和Q的连线移至无穷远



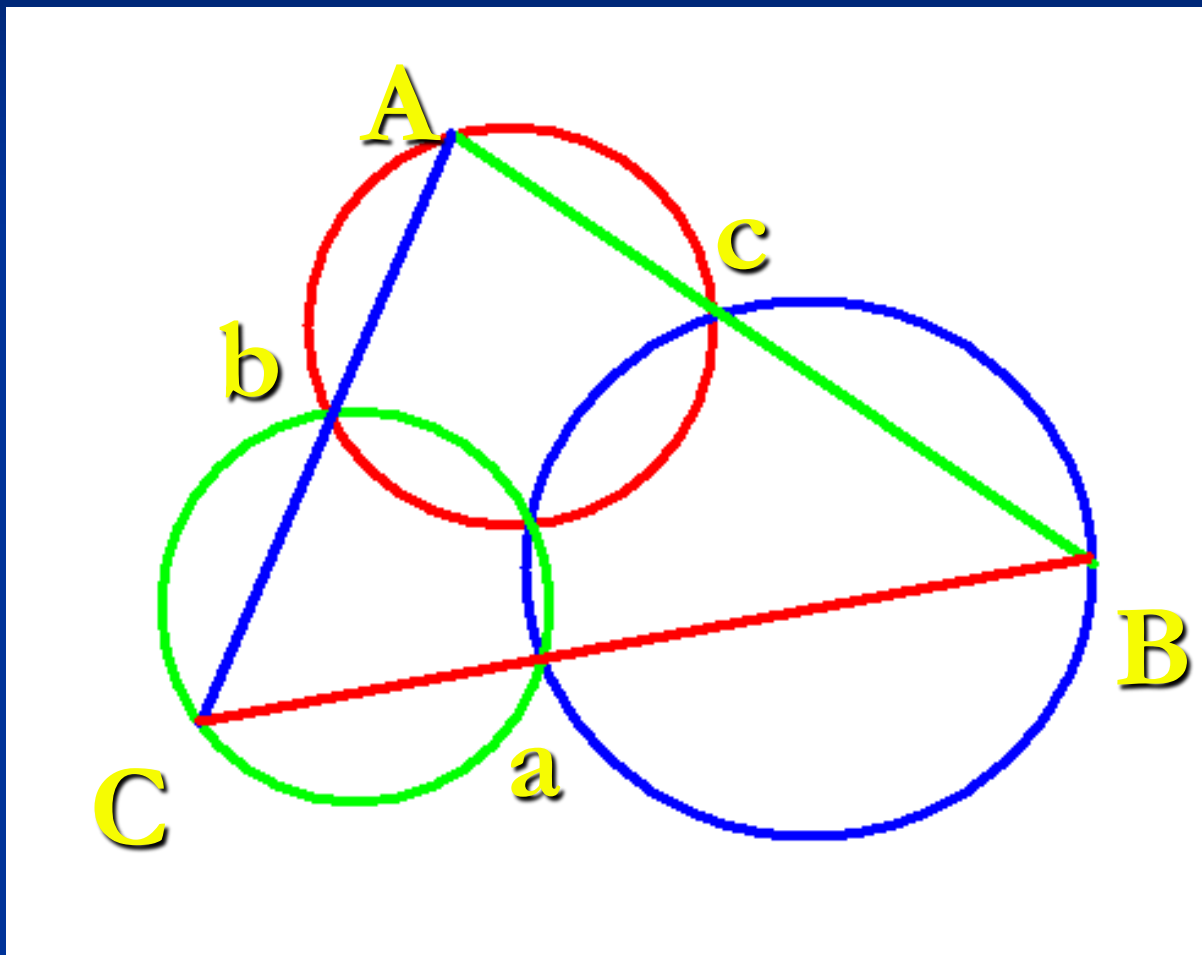
将过P的切线移至无穷远



关于圆的定理



关于圆的定理



曲线的相交（17 世纪开始）

牛顿 1665 年断言：如果虚点包含在内， m 次曲线和 n 次曲线有 mn 个交点.

$$f(x, y)=0, \quad g(x, y)=0.$$

消元法（我国数学家于12世纪发现，Bezout 和欧拉于 1764 发现明显的算法）：

$$r(x)=f(x,y) u(x,y) + g(x,y) v(x,y).$$

Bezout 定理：牛顿的断言正确。

完整的证明在十九世纪末才找到。

➤ 个数守恒原理 1:

曲线连续变化时, 相交点的个数不变。

➤ 曲线退化原理 2:

任何 n 次曲线可以退化成 n 条一般位置的直线 (即无三线共点)。

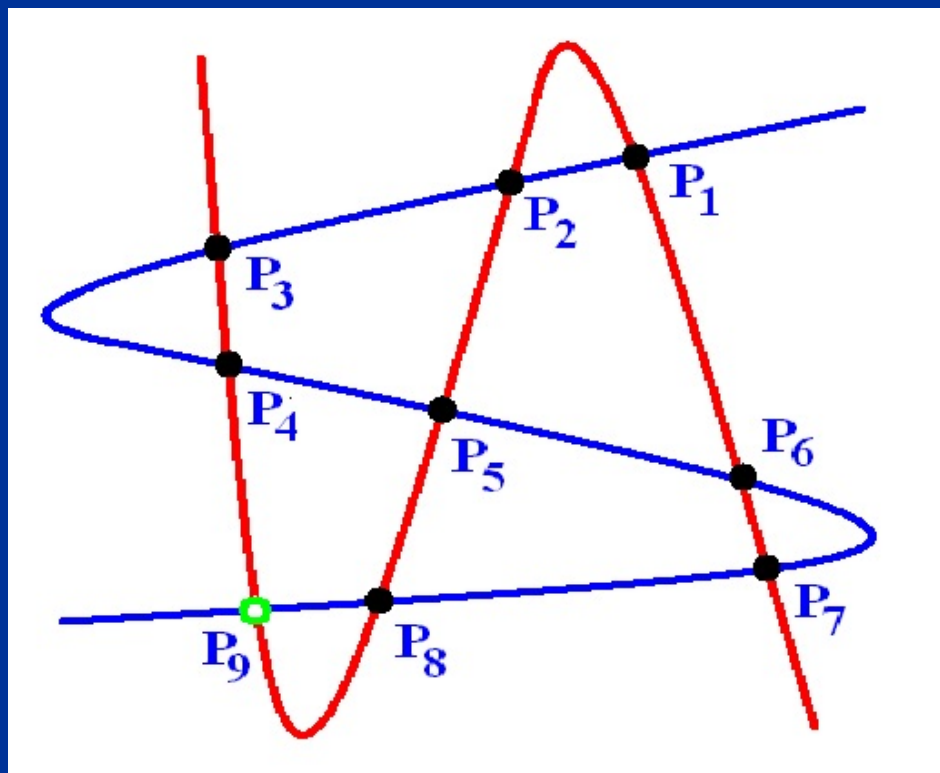
➤ Bezout 定理的“证明”:

$$\begin{aligned}\#(C \cap D) &= \#(\{m \text{ 条直线}\} \cap \{n \text{ 条直线}\}) \\ &= mn\end{aligned}$$



圆锥曲线的定理的推广

Chasles 定理：设两三次曲线交9个点，如果第三条三次曲线过其中8个点，那么它一定过第九个点。



圆锥曲线的定理的推广

Chasles 定理： 设两三次曲线交9个点，如果第三条三次曲线过其中8个点，那么它一定过第九个点。

- * 这是 Pappus 定理和 Pascal 定理的推广。
- * 欧拉给克莱姆的一封信中提到过此结果。

Cayley-Bacharach 定理:

设曲线 C^m 和 C^n 交 mn 个点, 如果第三条曲线 C^{m+n-3} 过其中 $mn-1$ 个点, 则它一定过剩下的点。

定理 (2000): 如果第三条曲线 C^{m+n-k} 过其中 $mn-(k-2)$ 个点, 则它一定过剩下的 $k-2$ 个点。

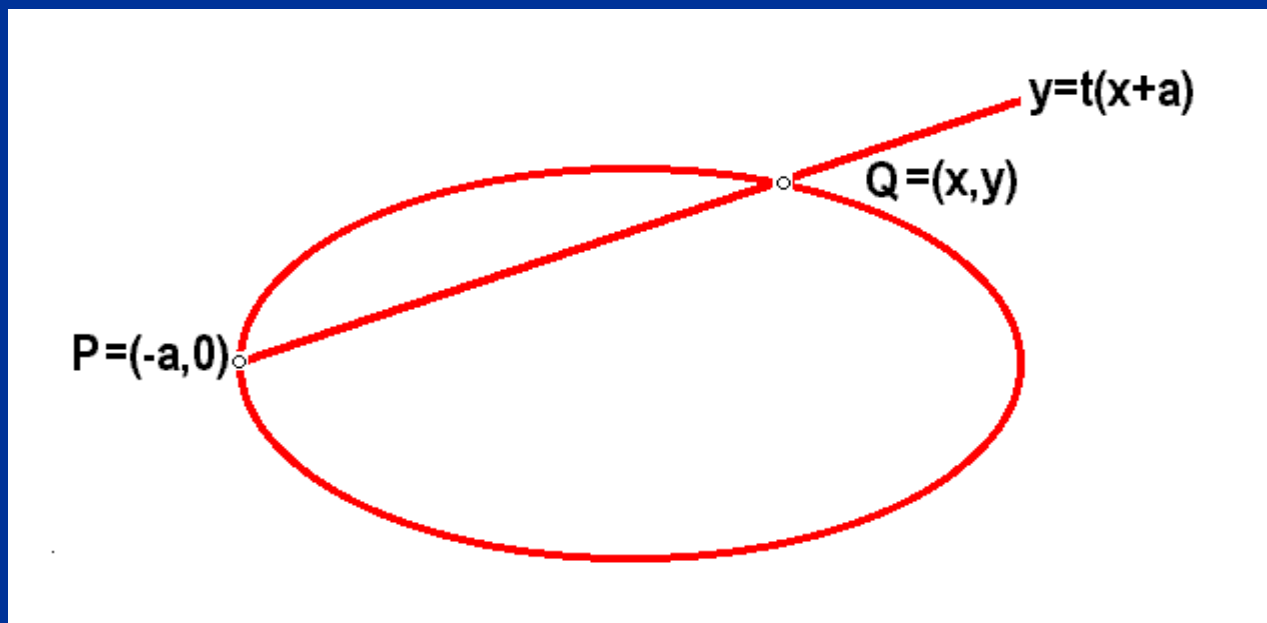
注意: 曲面是也成立。

高维时等价于著名的 Fujita 猜想

二、代数曲线上的有理点

圆锥曲线上有理点

$$\{ (x(t), y(t)) \mid t \text{ 取遍有理数} \}$$



例：求单位圆上的有理点

取单位圆上的一个有理点 $P = (-1, 0)$

解方程组：

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = t(x + 1)$$

解为

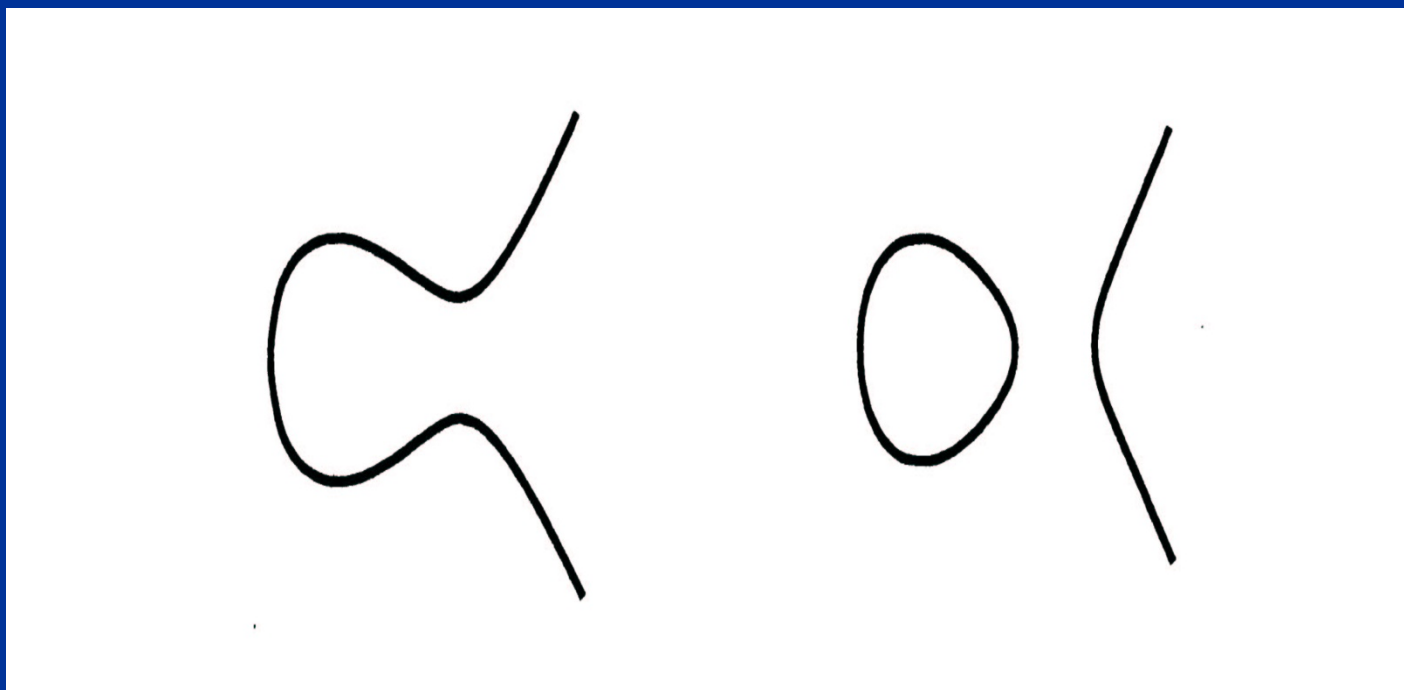
$$x = (1 - t^2) / (1 + t^2)$$

$$y = 2t / (t^2 + 1)$$

三次曲线的研究

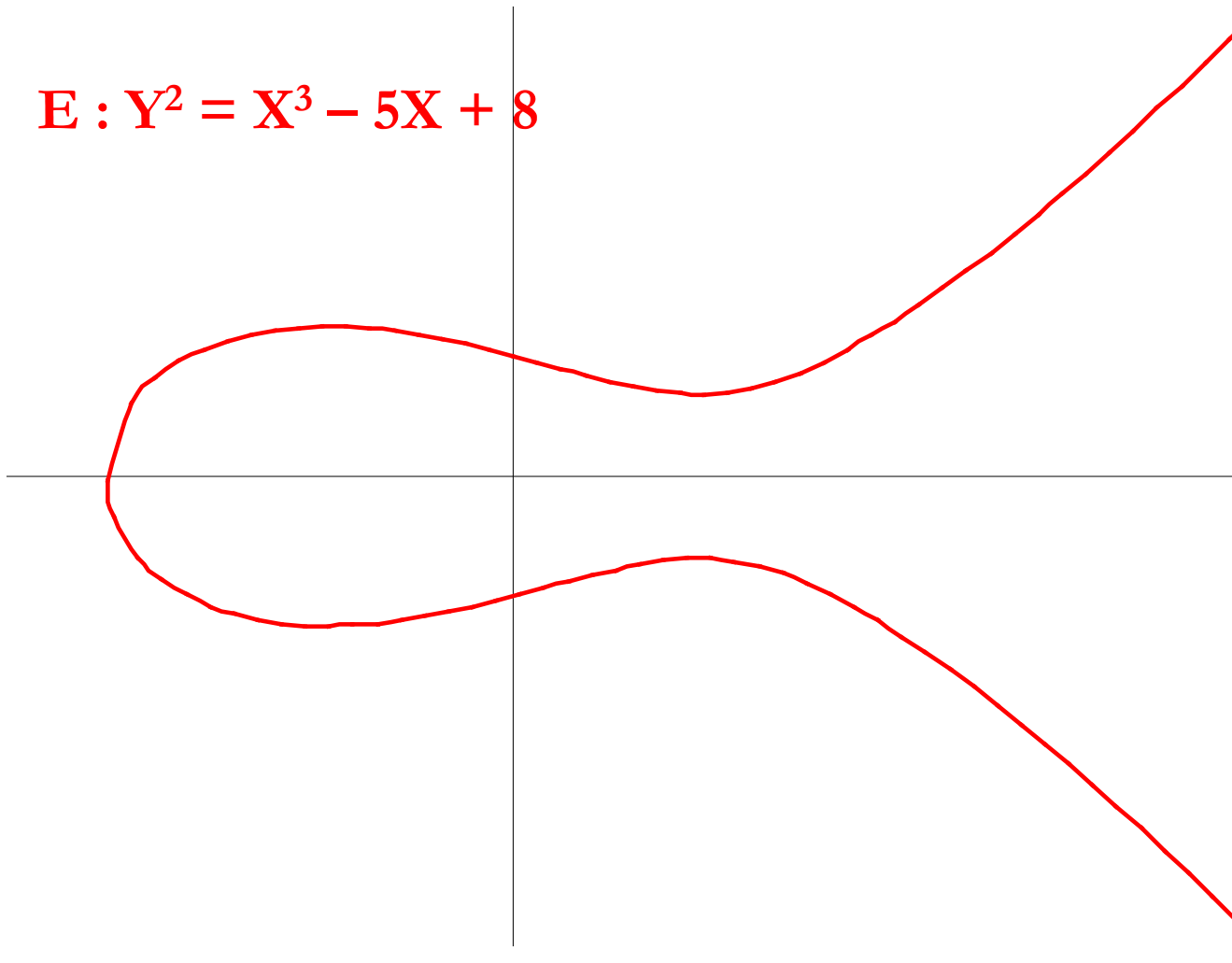
牛顿 1707 证明在坐标变换下三次曲线有标准方程:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

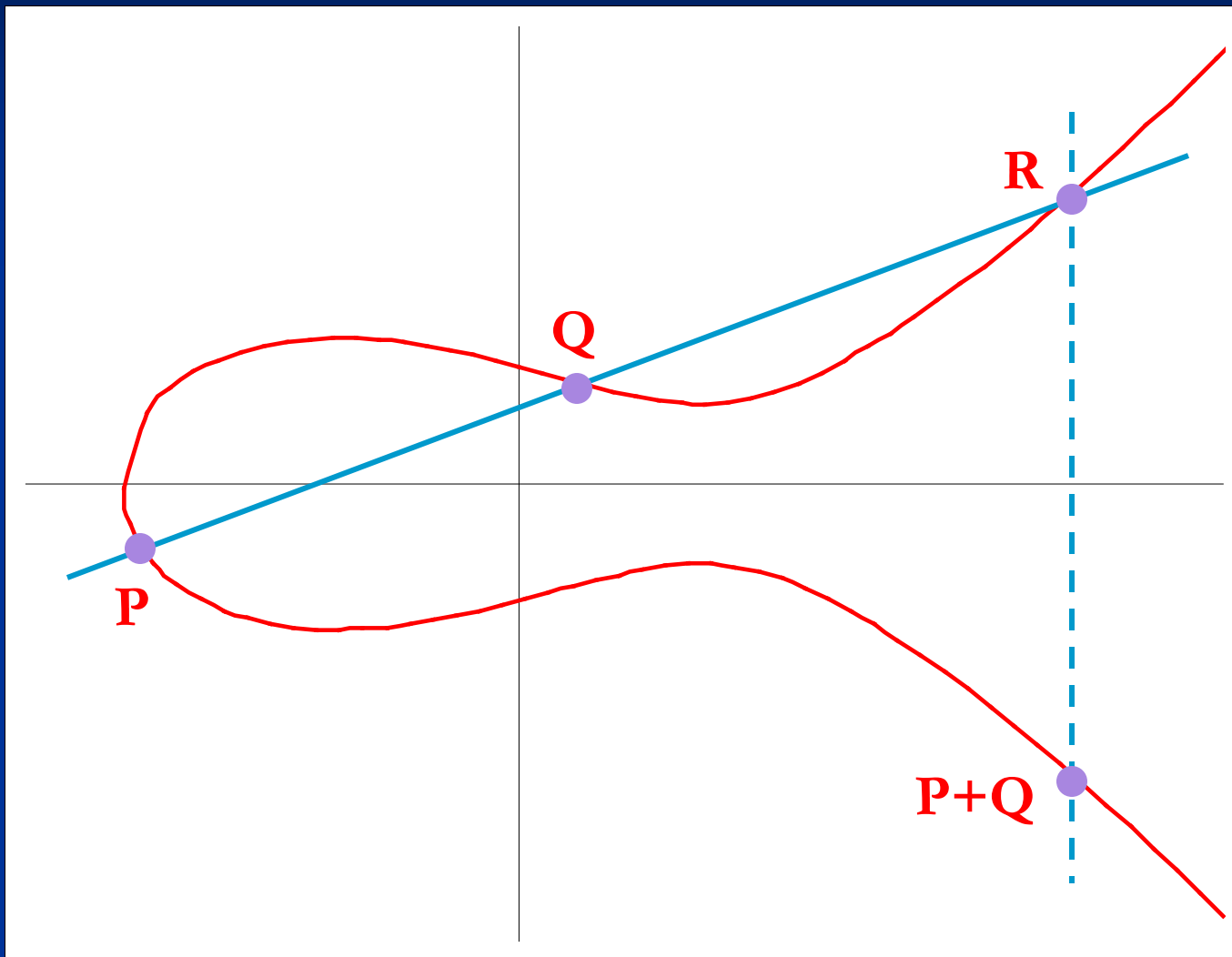


椭圆曲线的一个典型例子

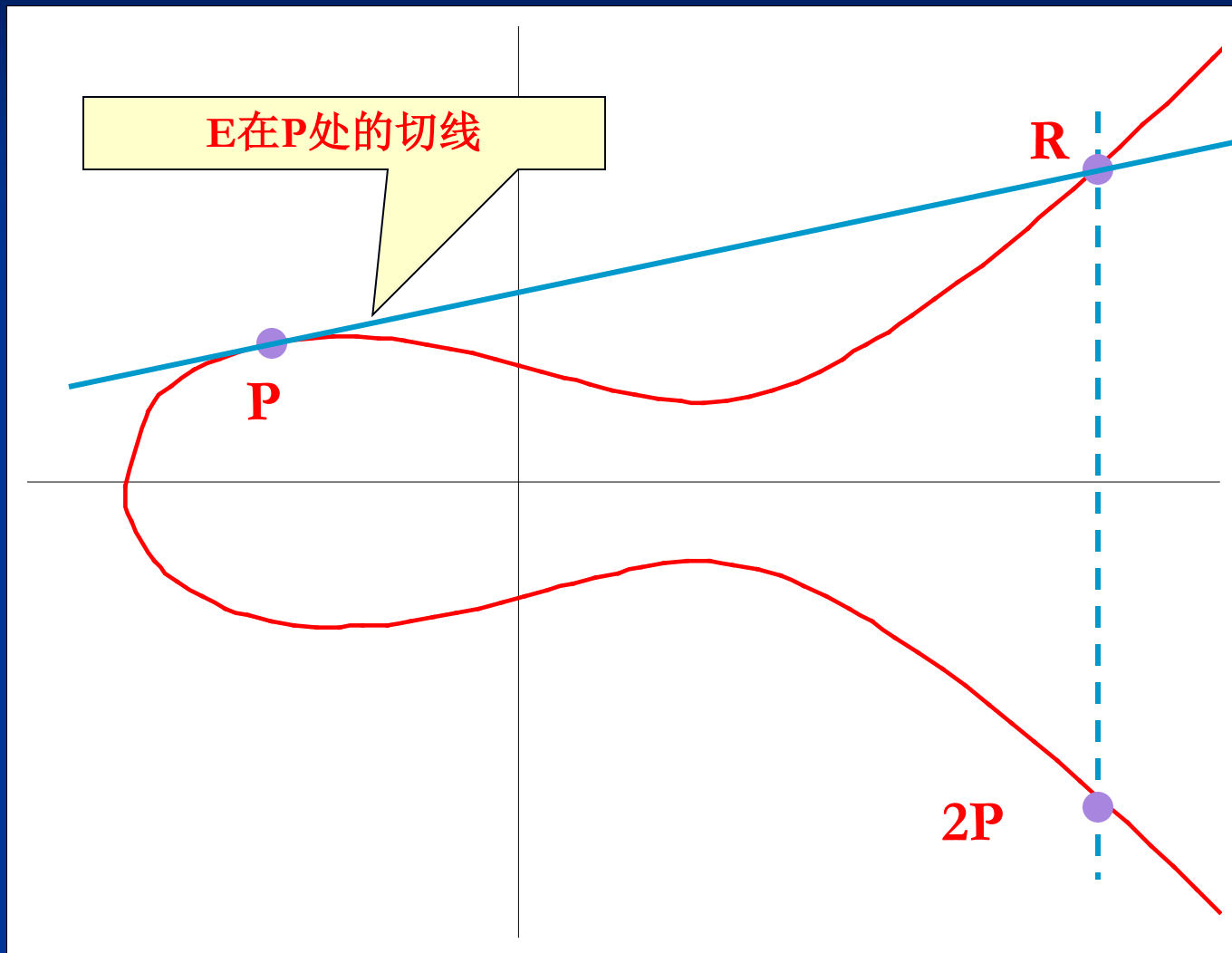
$$E : Y^2 = X^3 - 5X + 8$$



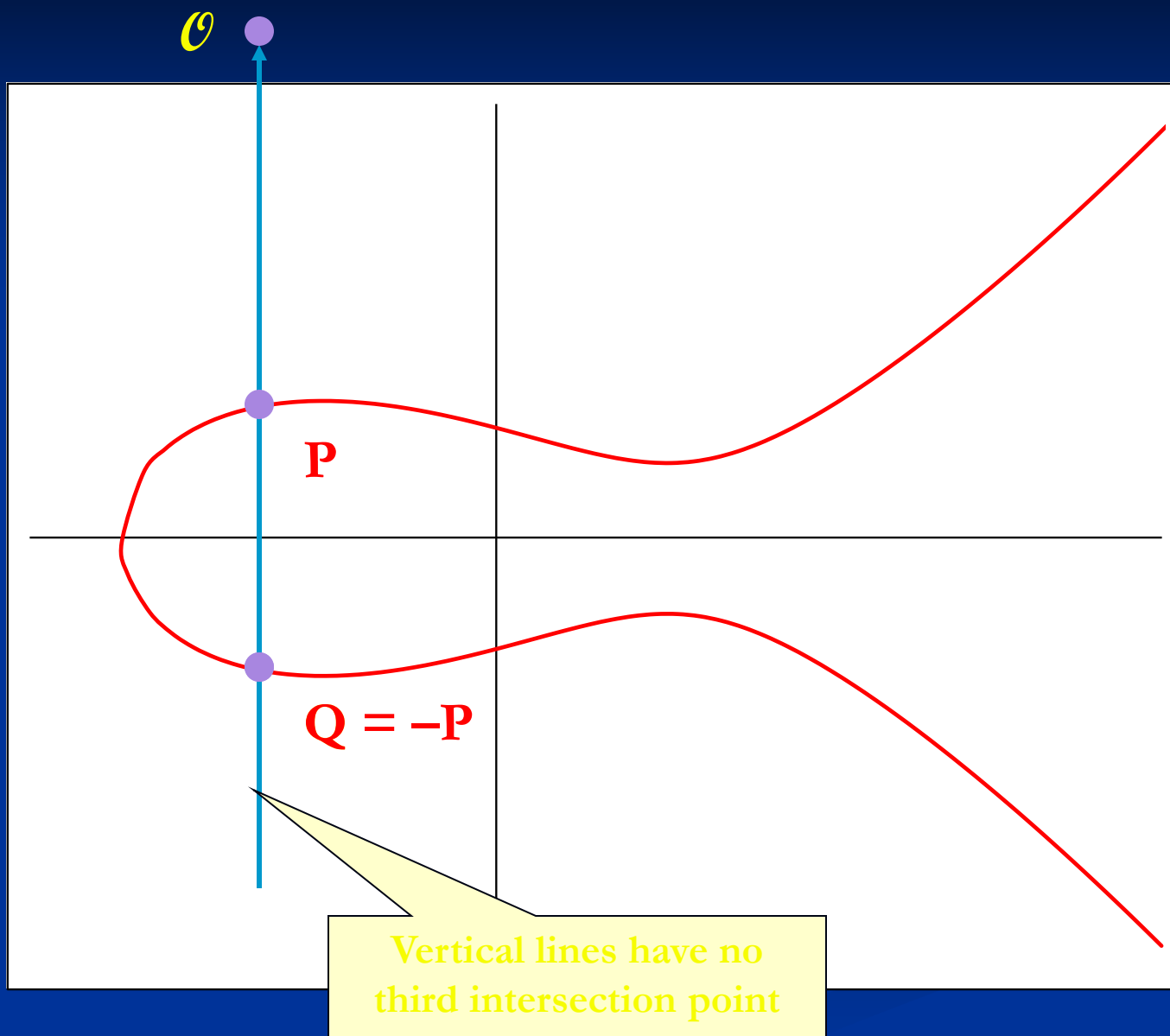
椭圆曲线上的加法 $P + Q$



$$P + P$$



- P



例子

$$E: Y^2 = X^3 - 5X + 8$$

点 $P = (1, 2)$ 在曲线 E 上.

求切线和交点

$$2P = P + P = (-7/4, -27/8).$$

求 P 和 $2P$ 的连线与 E 的交点

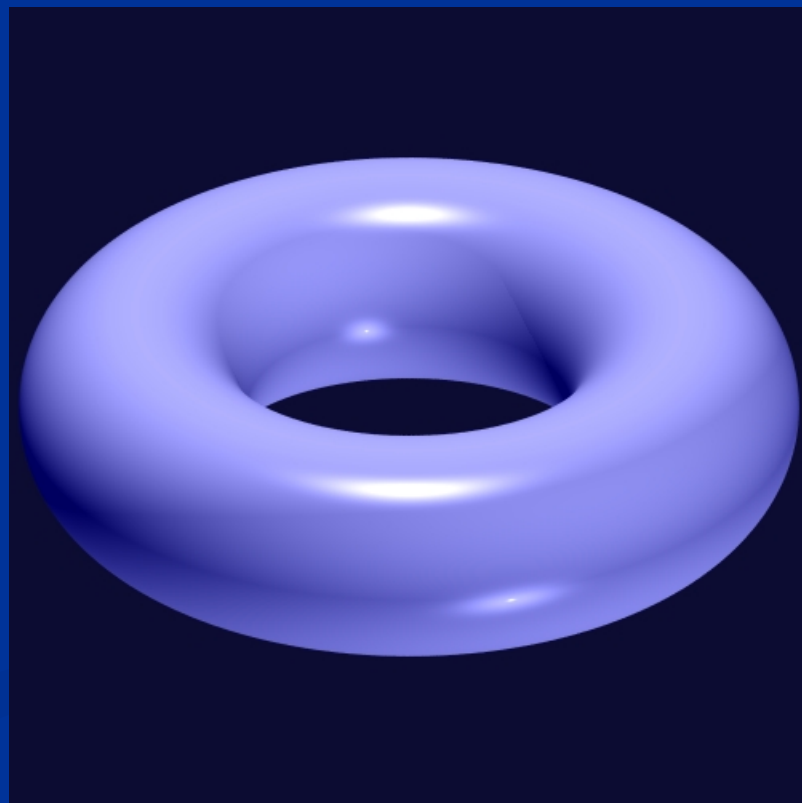
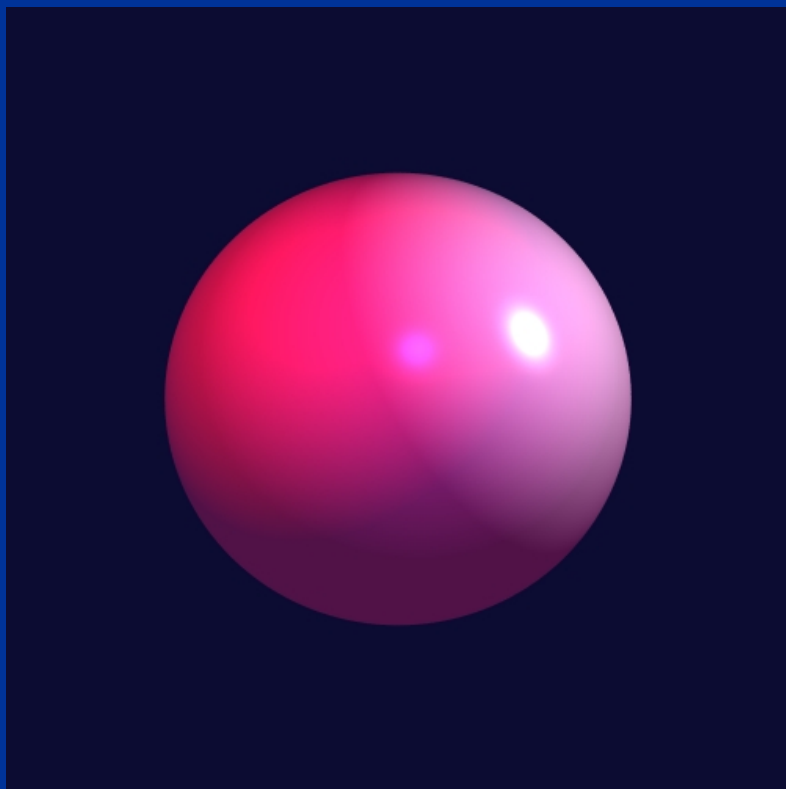
$$3P = 2P + P = (553/121, -11950/1331)$$

类似地 $4P = (45313/11664, 8655103/1259712).$

坐标变得越来越复杂.

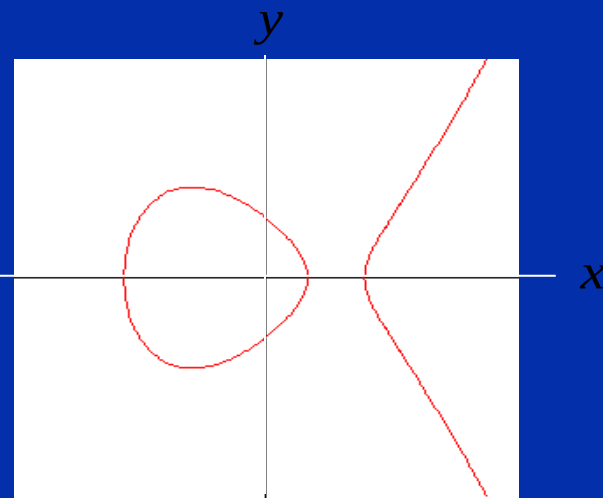
曲线的复图形不同：

直线和二次曲线的图形是球，
三次曲线的图形是环面。

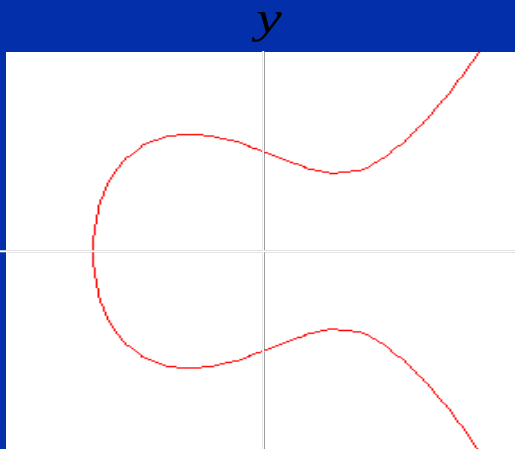


实三次曲线的图形

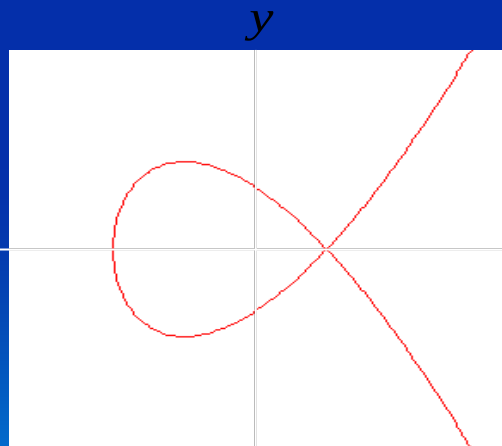
$$y^2 = x(x^2 - 1) + c$$



$$y^2 = x(x^2 - 1) + 0.3$$

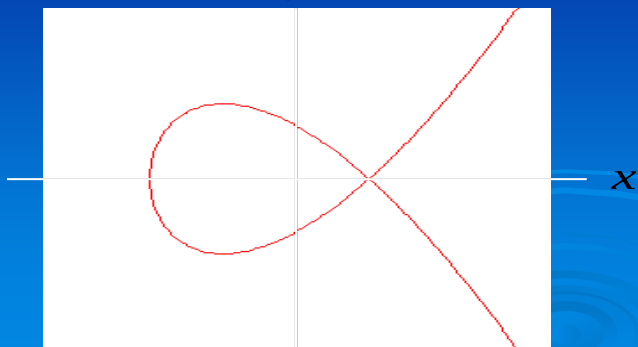
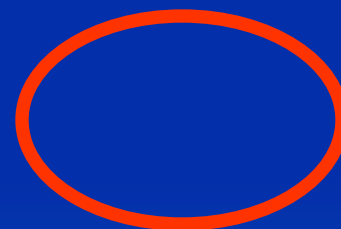
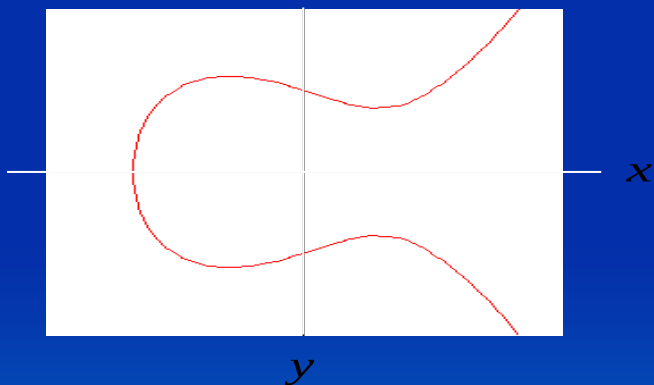
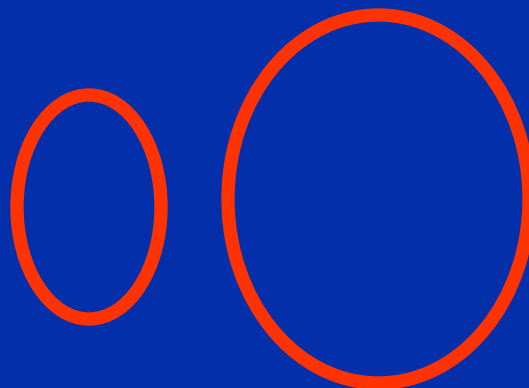
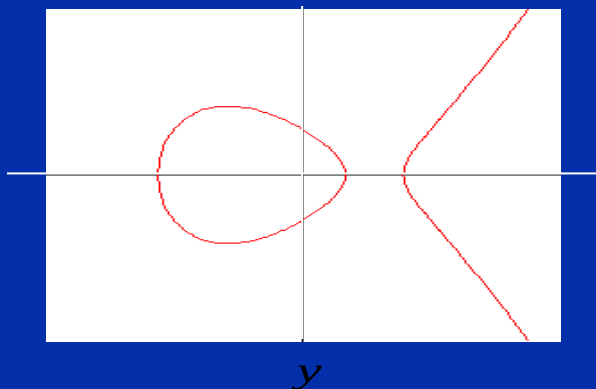


$$y^2 = x(x^2 - 1) + 1$$



$$y^2 = x(x^2 - 1) + 0.385$$

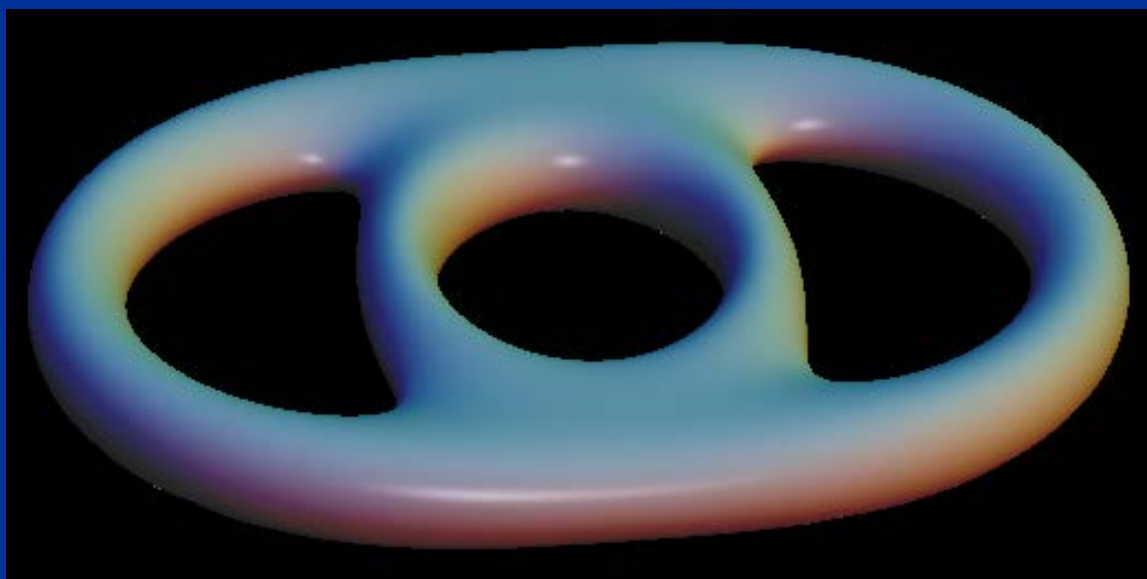
➤ 拓扑意义下的实图形



复曲线的想法来自 Riemann (1851), 他将多项式方程

$$f(w, z)=0$$

中的 w 看成是 z 的多值函数 $w=h(z)$, 复曲线的图形就是复 z -平面的多层覆盖所形成的 Riemann 曲面。这导致了现代数学中流形概念的产生。Riemann 曲面的图形为:



图形中洞的个数 g 称为亏格

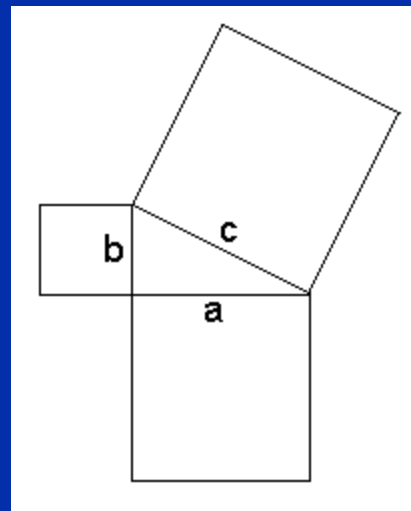
三次曲线与同余数



勾股定理

- 给出一个直角三角形

$$c^2 = a^2 + b^2$$



- 该定理是几何学的一个基础
- 如果 (a, b, c) 为有理数，我们称上三角形为“有理直角三角形”。
- 如果正整数 n 是某有理直角三角形的面积，则称 n 为“同余数”。
- 例如：边长为 $(3, 4, 5)$ 的直角三角形的面积为 6，所以 6 是同余数。

勾股数

- 希腊人意识到，当 $a = b = 1$ 时， c 不是有理数，

$$c = \sqrt{2}$$

也就是说， c 不是两个整数的商。

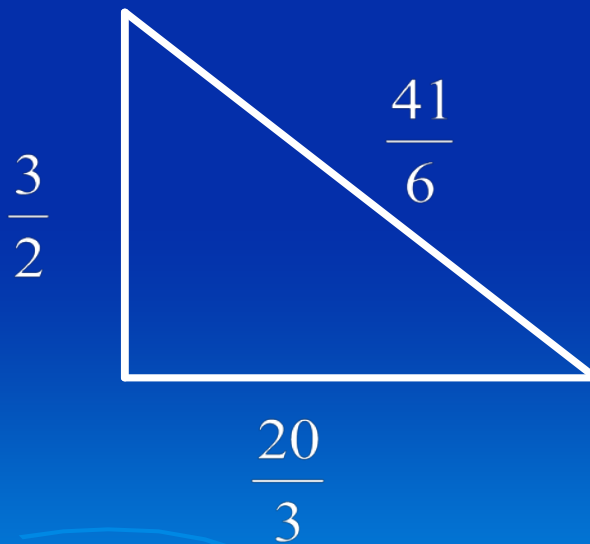
$$(a, b, c) = (x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$$

- 可以用上面的公式找到整数“勾股数”。这里 $x > y$ 都是正整数。

(勾股定理，毕达哥拉斯，欧几里得，丢番图.....)

同余数

- 一个困难问题：判断一个数是否为同余数。
- 例如，1, 2, 3, 4 不是；5, 6, 7 是。



- 面积为 5

同余数判别法

- **定理：** n 为同余数当且仅当下方程有除三个平凡解以外的整数解。（从而有无限多个有理数解。）

$$y^2 = x^3 - n^2 x$$

- 平凡解： $(0, 0)$ $(n, 0)$ $(-n, 0)$
- 例如
 - $n = 5$: 解 $(-4, 6)$
 - $n = 6$: 解 $(-3, 9)$
 - $n = 1$: 无非平凡解（费尔马证明）

同余数与 BSD 猜想

- Birch-Swinnerton-Dyer 猜想 (关于三次曲线 $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ 上的有理点的一个猜测)
- BSD 猜想的特例: 如果 n 是一个奇的非平方整数, n 是同余数当且仅当

$$\begin{aligned} & \# \{ (a, b, c) : 2a^2 + b^2 + 8c^2 = n \} \\ & = 2 \cdot \# \{ (a, b, c) : 2a^2 + b^2 + 32c^2 = n \} \end{aligned}$$

这里 a, b, c 为整数。

费尔马达定理的证明



椭圆曲线与现代数论

二次曲线上的有理点（坐标为有理数的点）可用参数化的方法完全求出。

Mordell (1950): 椭圆曲线上的有理点组成一个有限生成的交换子群。即从有限个有理点出发，通过 $+$, $-$ 运算可求出所有的有理点。

Faltings (1986): 亏格 $g > 1$ 的曲线上最多只有有限个有理点。

费尔马大定理: 不存在非零整数 a, b, c 使得 ($n > 2$)

$$a^n + b^n = c^n$$

➤ $n = 4$ 的情形

- 假设 $a^4 + b^4 = c^4$ with $a \neq 0$.
- 设 $x = 2\frac{b^2 + c^2}{a^2}, \quad y = 4\frac{b(b^2 + c^2)}{a^3}$
- 计算得 $y^2 = x^3 - 4x$
- 该椭圆曲线只有 3 个有理解:
 $(0, 0), \quad (2, 0), \quad (-2, 0)$
- 这些都对应于 $b = 0$. 费尔马方程没有非平凡解

➤ $n = 3$ 的情形

- 假设 $a^3 + b^3 = c^3$ and $abc \neq 0$
- 我们有 $a + b \neq 0$
- 设 $x = 12 \frac{c}{a+b}, y = 36 \frac{a-b}{a+b}$
- 计算得 $y^2 = x^3 - 432$
- 该椭圆曲线只有两个有理解
(12, 36), (12, -36)
- 我们得 $a=0$ 或 $b=0$. 所以, 费尔马方程没有非平凡整数解。

关于费尔马定理的证明

可归结为 $n=p>4$ 为素数的情形。设 a, b, c 是其解。

G. Frey (1985) 构造了一条椭圆曲线 (Frey 曲线):

$$y^2 = x(x + a^p)(x - b^p).$$

他证明此椭圆曲线不是“模曲线”(即不能用“模函数”参数化)。

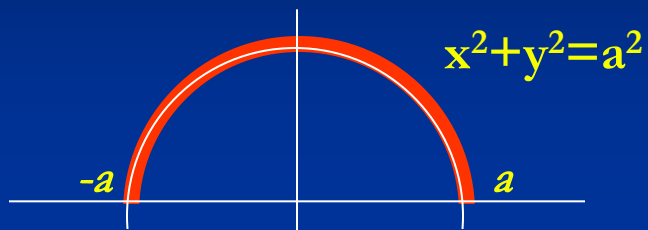
Taniyama-Shimura 猜测: 任何椭圆曲线都是模曲线。

1995 年, Wiles (Taylor) 证明了上述猜测。

三、新函数的发现

椭圆的弧长的计算

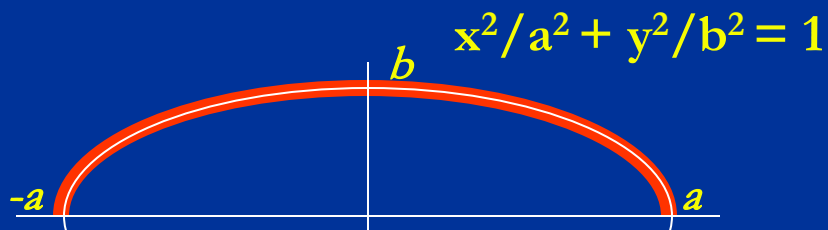
圆的弧长的计算



积分表达式

$$\int_{-a}^a \frac{a \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

椭圆的弧长的计算



更复杂的表达式

$$\int_{-a}^a \sqrt{\frac{a^2 - (1 - b^2/a^2)x^2}{a^2 - x^2}} \, dx$$

设 $k^2 = 1 - b^2/a^2$

坐标变换 $x \rightarrow ax$.

椭圆的弧长公式为

$$a \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 x^2}{1 - x^2}} dx$$

$$a \int_{-1}^1 \frac{1 - k^2 x^2}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx$$

$$\text{弧长} = a \int_{-1}^1 \frac{1 - k^2 x^2}{y} dx$$

椭圆曲线

$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2) =$ x 的四次多项式.

椭圆积分 $\int R(x, y) dx$, 其中 $R(x, y)$ 是坐标 (x, y) 的有理函数,
坐标落在一条椭圆曲线上

$E: y^2 = f(x)$, x 的三次或四次多项式.

三角函数

圆积分

$$\int_0^w \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

等于

$$z = \arcsin(w)$$

逆函数 $w = \sin(z)$ 是以 2π 为周期的周期函数.

椭圆函数

椭圆积分

$$\int_a^w \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Ax + B}}$$

的逆函数

$$w = \wp(z)$$

是有两个复周期 ω_1 和 ω_2 的双周期函数

$$\wp(z + \omega_1) = \wp(z + \omega_2) = \wp(z)$$

$$z \in \mathbb{C}.$$

双周期函数称为

椭圆函数.

$$\int_{\alpha}^w \frac{dx}{\sqrt{x^3 + Ax + B}}$$

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)}) dx$$

$$y^2 = P_n(x)$$

$$\int R(x, y) dx$$

$$f(x, y) = 0$$

$R(x, y)$ 有理多项式。 $n = 1, 2$ 时, 可以积出。 $n \geq 3$ 时, 一般积不出, 但当 $P_n(x)$ 有重根时, 有时可以积出。 为什么?

答案：与复曲线的图形有关。

复曲线： $f(x, y) = 0$

结论：积分可以积出当且仅当图形中洞的个数为 $g = 0$

