代数曲面在丢番图几何上的应用

谈 胜 利

合 肥

2015年10月9日

一、问题的背景：Arakelov 理论

1.1 丢番图几何: $k = \mathbb{Q}$

1.1 丢番图几何: $k=\mathbb{Q}$

- **丢番图问题:** 求代数曲线 C 上的有理点。

$$C: \quad f(x,y)=0, \qquad f\in\mathbb{Z}[x,y]$$

1.1 丢番图几何: $k = \mathbb{Q}$

- **丢番图问题:** 求代数曲线 C 上的有理点。

$$C: \quad f(x, y) = 0, \qquad f \in \mathbb{Z}[x, y]$$

- **Mordell 猜想**: 如果 C 的亏格 g 大于 1, 则 C 上最多只有有限个有理点 P.

- **丢番图问题:** 求代数曲线 C 上的有理点。

$$C: \quad f(x,y)=0, \qquad f\in\mathbb{Z}[x,y]$$

- **Mordell 猜想**: 如果 C 的亏格 g 大于 1, 则 C 上最多只有有限个有理点 P.

- 有理点的高度:

$$P=\left(\frac{p}{r},\frac{q}{r}\right)\in C(\mathbb{Q}), \qquad \gcd(p,q,r)=1$$

1.1 丢番图几何: $k = \mathbb{Q}$

- **丢番图问题:** 求代数曲线 C 上的有理点。

$$C: \quad f(x,y) = 0, \qquad f \in \mathbb{Z}[x,y]$$

- **Mordell 猜想**: 如果 C 的亏格 g 大于 1, 则 C 上最多只有有限个有理点 P.

- 有理点的高度:

$$P = \left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}\right) \in C(\mathbb{Q}), \qquad \gcd(p,q,r) = 1$$

$$h(P) = \max\{\ |p|, |q|, |r|\ \}$$

- **丢番图问题**: 求代数曲线 C 上的有理点。

$$C: \quad f(x,y)=0, \qquad f \in \mathbb{Z}[x,y]$$

- **Mordell 猜想**: 如果 C 的亏格 g 大于 1, 则 C 上最多只有有限个有理点 P.

- 有理点的高度:

$$P = \left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}\right) \in C(\mathbb{Q}), \qquad \mathrm{gcd}(p,q,r)=1$$

$$h(P) = \max\{\ |p|, |q|, |r|\ \}$$

- 希望找出高度不等式:

$$h(P) \leq Const., \quad \forall \quad P \in C(\mathbb{Q})$$

这里的常数只与曲线本身的量有关。

- **如何用代数曲面的理论研究丢番图问题?**

$$C: \quad f(x,y) = 0, \qquad f \in \mathbb{Z}[x,y]$$

- **如何用代数曲面的理论研究丢番图问题?**

$$C: \quad f(x,y) = 0, \qquad f \in \mathbb{Z}[x,y]$$

- **新思想**: 对任何素数 p, 作 p 元有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的曲线

$$F_p = \{ (x,y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \mid f(x,y) \equiv 0 \pmod{p} \}$$

1.1 丢番图几何: $k = \mathbb{Q}$

- **如何用代数曲面的理论研究丢番图问题?**

$$C: \quad f(x,y) = 0, \qquad f \in \mathbb{Z}[x,y]$$

- **新思想**: 对任何素数 p, 作 p 元有限域 $\mathbb{F}_p$ 上的曲线

$$F_p = \{\, (x,y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \mid f(x,y) \equiv 0 \pmod{p} \,\}$$

- 环 $\mathbb{C}[t]$ 与 $\mathbb{Z}$ 的相似性

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[t]) &= \{\ \text{极大理想}\ \ \mathcal{I} \lhd \mathbb{C}[t]\ \} \\ &= \{ < t - a > \ \mid a \in \mathbb{C}\ \} \\ &= \mathbb{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[t]) &= \{\ \text{极大理想}\ \ \mathcal{I} \lhd \mathbb{Z}\ \} \\ &= \{ < p > \ \mid p\ \text{素数}\ \ \} \\ &= \{ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ p,\ \cdots \} \end{aligned}$$

- 作曲面

$$X = \cup_p F_p$$

1.1 丢番图几何: $k = \mathbb{Q}$

- 作曲面
$$X = \cup_p F_p$$
- 作曲线
$$C = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ p,\ \cdots\}$$

1.1 丢番图几何: $k=\mathbb{Q}$

- 作曲面
$$X=\cup_p F_p$$
- 作曲线
$$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \cdots,\ p,\ \cdots\}$$
- 有一个自然的映射
$$f: X\to C$$
- 任何整数解（齐次化后，对任何有理数解）(a,b) 给出了纤维 F_p 中的一个点，$(\bar{a},\bar{b})$, 即给出了一个映射
$$s=(a,b): C\to X$$

1.2. 函数域的情形：$k = \mathbb{C}(t)$

1.2. 函数域的情形：$k = \mathbb{C}(t)$

- 函数域上的代数曲线 $k = \mathbb{C}(t)$:

$$C: \quad f(x, y, t) = 0, \qquad f \in \mathbb{C}[t][x, y]$$

1.2. 函数域的情形：$k=\mathbb{C}(t)$

- 函数域上的代数曲线 $k=\mathbb{C}(t)$:

$$C: \quad f(x,y,t)=0, \qquad f\in\mathbb{C}[t][x,y]$$

- C 上的有理点: $P=(x(t),y(t))\in C$

1.2. 函数域的情形: $k = \mathbb{C}(t)$

- 函数域上的代数曲线 $k = \mathbb{C}(t)$:

$$C: \quad f(x, y, t) = 0, \qquad f \in \mathbb{C}[t][x, y]$$

- C 上的有理点: $P = (x(t), y(t)) \in C$

$$x(t) = \frac{p(t)}{r(t)},\ y(t) = \frac{q(t)}{r(t)} \in \mathbb{C}(t), \quad \gcd(p,\ q,\ r) = 1$$

1.2. 函数域的情形: $k = \mathbb{C}(t)$

- 函数域上的代数曲线 $k = \mathbb{C}(t)$:

$$C: \quad f(x,y,t) = 0, \qquad f \in \mathbb{C}[t][x,y]$$

- C 上的有理点: $P = (x(t), y(t)) \in C$

$$x(t) = \frac{p(t)}{r(t)},\ y(t) = \frac{q(t)}{r(t)} \in \mathbb{C}(t), \qquad \gcd(p,\ q,\ r) = 1$$

$$f(x(t), y(t), t) \equiv 0$$

1.2. 函数域的情形: $k = \mathbb{C}(t)$

- 函数域上的代数曲线 $k = \mathbb{C}(t)$:

$$C: \quad f(x, y, t) = 0, \qquad f \in \mathbb{C}[t][x, y]$$

- C 上的有理点: $\quad P = (x(t), y(t)) \in C$

$$x(t) = \frac{p(t)}{r(t)}, \ y(t) = \frac{q(t)}{r(t)} \in \mathbb{C}(t), \qquad \gcd(p,\ q,\ r) = 1$$

$$f(x(t), y(t), t) \equiv 0$$

- 例子: $P = (t, t)$

$$C: \ (t^4 + t)\mathbf{y}^3 - (t^3 + 1)\mathbf{x}^4 - t\mathbf{x}^3 + t^4 = 0$$

1.2. 函数域的情形: $k=\mathbb{C}(t)$

- 函数域上的代数曲线 $k=\mathbb{C}(t)$:

$$C: \quad f(x,y,t)=0, \qquad f\in\mathbb{C}[t][x,y]$$

- C 上的有理点: $P=(x(t),y(t))\in C$

$$x(t)=\frac{p(t)}{r(t)},\ y(t)=\frac{q(t)}{r(t)}\in\mathbb{C}(t), \qquad \gcd(p,\ q,\ r)=1$$

$$f(x(t),y(t),t)\equiv 0$$

- 例子: $P=(t,t)$

$$C:\ (t^4+t)\mathbf{y}^3-(t^3+1)\mathbf{x}^4-t\mathbf{x}^3+t^4=0$$

- 高度: $h(P)=\max\{\ \deg p(t),\ \deg q(t),\ \deg r(t)\ \}$

1.2. 函数域的情形: $k = \mathbb{C}(t)$

- 函数域上的代数曲线 $k = \mathbb{C}(t)$:

$$C: \quad f(x, y, t) = 0, \qquad f \in \mathbb{C}[t][x, y]$$

- C 上的有理点: $P = (x(t), y(t)) \in C$

$$x(t) = \frac{p(t)}{r(t)}, \ y(t) = \frac{q(t)}{r(t)} \in \mathbb{C}(t), \qquad \gcd(p, \ q, \ r) = 1$$

$$f(x(t), y(t), t) \equiv 0$$

- 例子: $P = (t, t)$

$$C: \ (t^4 + t)\mathbf{y}^3 - (t^3 + 1)\mathbf{x}^4 - t\mathbf{x}^3 + t^4 = 0$$

- 高度: $h(P) = \max\{ \deg p(t), \ \deg q(t), \ \deg r(t) \}$
- **问题**: $g(C) \geq 2$, 求一个常数 h_0, 使得

$$h(P) \leq h_0, \qquad \forall \quad P \in C(k)$$

1.3. 几何模型: $f : X \to \mathbb{P}^1$

1.3. 几何模型: $f : X \to \mathbb{P}^1$

- 几何问题:

1.3. 几何模型: $f: X \to \mathbb{P}^1$

- 几何问题:

函数域 $k = \mathbb{C}(t)$	$\leftarrow\text{-----}\rightarrow$	曲线 $\mathbb{P}^1$
k 上的曲线 C	$\leftarrow\text{-----}\rightarrow$	代数曲面 $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$
$f(x,y,t) = 0$	$\leftarrow\text{-----}\rightarrow$	$f(x,y,t) = 0$

1.3. 几何模型: $f : X \to \mathbb{P}^1$

- 几何问题:

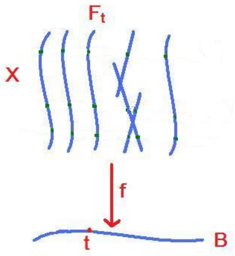
函数域 $k = \mathbb{C}(t)$	$\longleftarrow\!-\!-\!-\!\longrightarrow$	曲线 $\mathbb{P}^1$
k 上的曲线 C	$\longleftarrow\!-\!-\!-\!\longrightarrow$	代数曲面 $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$
$f(x, y, t) = 0$	$\longleftarrow\!-\!-\!-\!\longrightarrow$	$f(x, y, t) = 0$

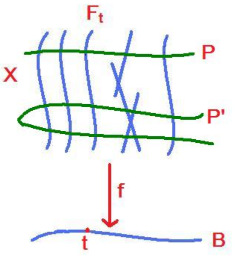
- $f : X \to \mathbb{P}^1$, t 上的纤维: $F_t = f^{-1}(t) \subset \mathbb{P}^2$

- 几何问题:

函数域 $k = \mathbb{C}(t)$	$\leftarrow\text{-----}\rightarrow$	曲线 $\mathbb{P}^1$
k 上的曲线 C	$\leftarrow\text{-----}\rightarrow$	代数曲面 $X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$
$f(x, y, t) = 0$	$\leftarrow\text{-----}\rightarrow$	$f(x, y, t) = 0$

- $f : X \to \mathbb{P}^1$, t 上的纤维: $F_t = f^{-1}(t) \subset \mathbb{P}^2$





1.4. 几何高度不等式: $f : X \to \mathbb{P}^1$

1.4. 几何高度不等式: $f : X \to \mathbb{P}^1$

- $d = \deg F_t = \deg_{(x,y)} f(x, y, t) \geq 4$

  $g = g(F_t) = \dfrac{1}{2}(d-1)(d-2) \geq 2$

  $s = \#\{\ t \mid F_t$ 不光滑$\}$

  $\ell = \#\{$ 奇异纤维中的有理曲线$\}$

1.4. 几何高度不等式: $f : X \to \mathbb{P}^1$

- $d = \deg F_t = \deg_{(x,y)} f(x, y, t) \geq 4$

  $g = g(F_t) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \geq 2$

  $s = \#\{\ t \mid F_t$ 不光滑$\}$

  $\ell = \#\{$ 奇异纤维中的有理曲线$\}$

- **定理 (1995)**: 对方程 $f(x, y, t) = 0$ 在$\mathbb{C}(t)$ 中的任一有理解 $P = (x(t), y(t))$, 我们有

$$h(P) \leq \frac{(d^2 - 3d + 1)(s - 1) + \ell}{d - 3}$$

1.4. 几何高度不等式: $f : X \to \mathbb{P}^1$

- $d = \deg F_t = \deg_{(x,y)} f(x,y,t) \geq 4$

  $g = g(F_t) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) \geq 2$

  $s = \#\{\ t \mid F_t$ 不光滑$\}$

  $\ell = \#\{$ 奇异纤维中的有理曲线$\}$

- **定理 (1995)**: 对方程 $f(x,y,t) = 0$ 在$\mathbb{C}(t)$ 中的任一有理解 $P = (x(t), y(t))$, 我们有

$$h(P) \leq \frac{(d^2 - 3d + 1)(s-1) + \ell}{d-3}$$

- Minhyong Kim: *Height inequalities and canonical class inequalities*, **math.AG/0210330**

1.5. 一般情形：$k = \mathbb{C}(B)$

1.5. 一般情形：$k = \mathbb{C}(B)$

- **Theorem (1995):** s 是 $f: X \to B$ 的奇异纤维的最小个数.

  1) 如果 f 是半稳定的, 则

$$h_K(P) \leq (2g-1)(d(P)+s) - K_{X/B}^2 \tag{1}$$

1.5. 一般情形：$k = \mathbb{C}(B)$

- **Theorem (1995):** s 是 $f : X \to B$ 的奇异纤维的最小个数.

  1) 如果 f 是半稳定的, 则
  $$h_K(P) \leq (2g-1)(d(P)+s) - K^2_{X/B} \qquad (1)$$
  2) 如果f 不是半稳定的, 则
  $$h_K(P) < (2g-1)(d(P)+3s) - K^2_{X/B} \qquad (2)$$

- **Theorem (1995):** s 是 $f : X \to B$ 的奇异纤维的最小个数.

  1) 如果 f 是半稳定的，则
  $$h_K(P) \le (2g-1)(d(P)+s) - K_{X/B}^2 \tag{1}$$
  2) 如果f 不是半稳定的，则
  $$h_K(P) < (2g-1)(d(P)+3s) - K_{X/B}^2 \tag{2}$$

  1. 对有理点P，$d(P) = 2g(B) - 2$ 是一个常数.

1.5. 一般情形：$k = \mathbb{C}(B)$

- **Theorem (1995):** s 是 $f : X \to B$ 的奇异纤维的最小个数.
  1) 如果 f 是半稳定的, 则
  $$h_K(P) \le (2g-1)(d(P)+s) - K^2_{X/B} \qquad (1)$$
  2) 如果f 不是半稳定的, 则
  $$h_K(P) < (2g-1)(d(P)+3s) - K^2_{X/B} \qquad (2)$$

1. 对有理点P, $d(P) = 2g(B) - 2$ 是一个常数.
2. Tan, S.-L., *Height inequality for algebraic points on curves over function fields*, J. reine angew. Math. 461 (1995), 123-135