代数曲面在微分方程中的应用

谈 胜 利
(华 东 师 范 大 学)

中 国 科 技 大 学

2015年10月9日

1. 常微分方程的几何方法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{ODE}$$

- Poincaré 引进了一个新的变量 t,

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} = \frac{dt}{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y). \end{cases}$$

- Darboux (1878) 建议:
  1. 要先在复平面 $\mathbb{C}^2$ 上研究该方程，考虑方程的复解析解
  2. 要考虑无穷远处的解，即在复射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上研究该方程

1. 常微分方程的几何方法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad \text{(ODE)}$$

- C 是过点 p 的局部复解析曲线： $f(x,y)=0.$
- 对定义方程微分

$$d(f(x,y)) = 0 \iff \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$$

- C 是微分方程（ODE）的“解”或“积分曲线” $\iff$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_C = -\left.\frac{f_x}{f_y}\right|_C = \left.\frac{Q}{P}\right|_C$$

- 方程的解的性质与方程的“奇点”有关。

1. 常微分方程的几何方法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{ODE}$$

- 方程的奇点: $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$
- 奇点的重数:

$$m_p = I_p(P, Q)$$

1. 常微分方程的几何方法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \qquad \text{(ODE)}$$

- 方程的奇点: $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$
- 奇点的重数:

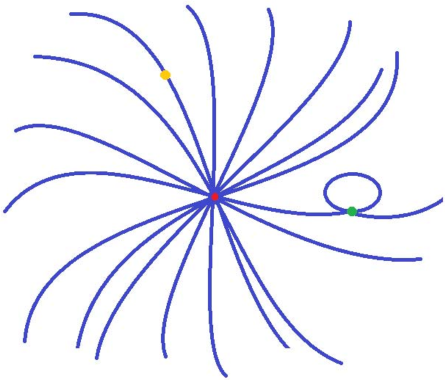
$$m_p = I_p(P, Q)$$

- **积分曲线的存在性:**
  1. 过任何点，至少有一条积分曲线；
  2. 过方程的光滑点有唯一一条积分曲线，曲线在该点光滑。
  3. 过方程的奇点 p, 有两种情形：

     (A) 要么有无限条积分曲线，此时称方程的奇点为 dicritical

     (B) 要么只有有线条积分曲线，此时称奇点为 non-dicritical

1. 常微分方程的几何方法



●: Dicritical; ●: Non-dicritical; ●: 光滑点

1. 常微分方程的几何方法

- 给定一个有理函数: $\varphi = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$
- 构造一个微分方程: $d\left(\varphi(x,y)\right) = 0$

$$\mathrm{ODE}(\varphi):\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{f\frac{\partial g}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

- 称 φ 是方程 ODE(φ) 的"有理首次积分"或"代数积分".
- 具有有理首次积分 φ 的微分方程 ODE 称为"代数可积"

$$\mathrm{ODE} = \mathrm{ODE}(\varphi)$$

- **Poincaré 问题:** 什么时候微分方程是代数可积的?
- Darboux (1878) 最先研究, Poincaré 和 Painlevé 二十年后又开始研究。

1. 常微分方程的几何方法

- 给定一个有理首次积分： $\varphi = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$
- 得到一簇有理首次积分： $\varphi - t = \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} - t$
- 得到一簇代数积分曲线： $C_t: \quad f(x,y) - t \cdot g(x,y) = 0.$

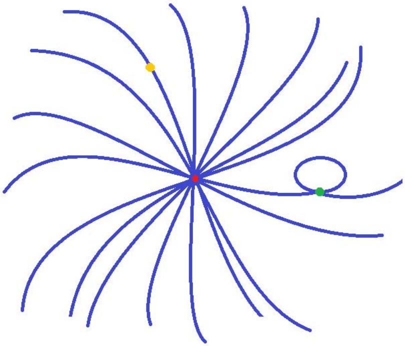
$$\mathscr{C}(\varphi) = \{\ C_t \mid \varphi(x,y) - t = 0\ \}$$

- 下述两类数学问题的研究是等价的
  1. 代数曲线束 $\mathscr{C}(\varphi)$ 的几何的研究
  2. 代数可积微分方程 ODE(φ) 的几何的研究

$$\mathrm{ODE}(\varphi): \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

1. 常微分方程的几何方法

$$C_t: \quad f(x,y) - t \cdot g(x,y) = 0, \quad t \in \mathbb{P}^1.$$



●: 基点（奇点）； ●: 奇点； ●: 光滑点.

1. 常微分方程的几何方法

Darboux (1878):

[1] Darboux, G., *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré* , Bull. Sci. Math. (1878)

- 将微分方程从 $\mathbb{R}^2$ 上扩充到 $\mathbb{CP}^2$

$$X\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)+Y\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dx}{dt}\right)+Z\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0$$

- 证明 d 次微分方程的奇点个数 $=\sum_p m_p = d^2+d+1$.
- 设 $C_1,\cdots,C_q$ 是 q 条代数积分曲线. 如果

$$q \geq \frac{1}{2}d(d+1)+1,$$

则方程有首次积分.

- (Jouanolou (1979)) 如果 $q \geq \frac{1}{2}d(d+1)+2$, 那么方程具有有理首次积分.

1. 常微分方程的几何方法

Poincaré (1891-1897)

[1] *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles*, C. R. Acad. Sci. **112** (1891) 761-764.

[2] *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo **5** (1891) 161-191.

[3] *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré*, Rendiconti del Circolo Matemático di Palermo **11** (1897) 193-239.

- 为了了解一阶一次微分方程是否代数可积，显然只要找到首次有理积分的次数的上限，然后就只剩下有效的纯代数计算
- 寻找有理首次积分 $\varphi = f/g$ 的高度不等式

$$h(\varphi) = \max\{\deg f,\ \deg g\} \leq H(\mathrm{ODE}).$$

1. 常微分方程的几何方法

- “这个问题看来是一个几何上要研究的问题……。自从 M. Darboux 发表在 Bulletin 上的杰出工作以来，这个问题被忽视了20年，值得引起新的注意，科学院提出了相同的问题作为数学科学大奖赛的题目。两篇论文获得奖励，M. Painleve 获得大奖，M. Autonne 获得提名奖。两篇论文分别发表在 Annales 和 Journal 上。”
- “Painlevé 提出了下述问题：给定一个微分方程，确定它是否具有一个给定亏格的代数积分。”
- “我证明了代数可积方程的几个性质。这些结果并没有现实的价值，但总有一天，我们可以判别这些性质是否可以扩充到非可积方程上去，或者，证明对非可积方程它们并不总是成立。”

1. 常微分方程的几何方法

- **主要问题:** 研究代数曲线束 $\mathscr{C}(\varphi)$ 的性质，并检查这些性质是否可以由微分方程 $\mathrm{ODE}(\varphi)$ 本身得出.
- **必要条件:** 这些性质必须与参数 t 无关.
- **寻找高度不等式**

$$h(\varphi) \leq H.$$

  H 只与微分方程 $\mathrm{ODE}(\varphi)$ 有关.

- **例子:** H 不能由微分方程的次数 d 确定.

$$\varphi = x^m y^n, \qquad \mathrm{ODE}(\varphi): \quad mydx + nxdy = 0$$

- **例子 (Lins Neto, 2002):** H 也不能由微分方程奇点的个数和拓扑类型决定.

$$\lim_{k\to\infty}(h(f_k/g_k)) = \infty$$

1. 常微分方程的几何方法

- **Poincaré 的高度公式**：如果 $C_t = \sum_i n_i(t) C_{t,i}$，那么

$$2h(\varphi) - 2 = d + \sum_{t,i} (n_i(t) - 1) \deg C_{t,i}$$

- **Poincaré 的亏格公式**：假设 d 次微分方程正好有 $d(\varphi)$ 有 $d^2 + d + 1$ 个不同的奇点，且 $d \geq 4$，则

$$g = \frac{d-4}{4} h(\varphi) + 1.$$

1. 常微分方程的几何方法

Painlevé (1891)

[1] *"Sur les intégrales algébriques des équations différentielles du premier ordre"* and *"Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre"*, 1890s.

- **Painlevé 问题 1:** 曲线束 $\mathscr{C}(\varphi)$ 的亏格 g 是否可以由微分方程 ODE(φ) 决定?
- 如果可以，那么对任何微分方程都可以类似地定义其亏格
- 不行!

例子（A. Lins Neto 2002): 对任何 k, 存在微分方程 ODE(φ_k)，它有相同个数的奇点，奇点类型也相同，但

$$\lim_{k\to\infty} g(\mathscr{C}(\varphi_k)) = \infty.$$

1. 常微分方程的几何方法

- **Painlevé 问题 2:** 给定亏格 g, 是否可以确定方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

  何时具有亏格 g 的代数积分?

- 等价于寻找亏格的上界

$$g = g(\mathscr{C}(\varphi)) \leq G,$$

  G 只依赖于 ODE(φ).

- **Lins Neto (2002):** G 不能由其奇点的个数和拓扑类型决定.

1. 常微分方程的几何方法

- **例子：** 对于任何 g, 两次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2g+1)x^2 - y^2}{2gxy}. \tag{1}$$

有亏格 g 的有理首次积分，双有理等价于曲线束

$$w^2 = z^{2g+1} + t^2$$

1. 常微分方程的几何方法

希尔伯特第 16 问题 — 代数曲线与代数曲面的拓扑

一、 d 次代数曲线、曲面的拓扑（分支的个数 N_d，相对位置）

1. 实 d 次平面曲线：$N_d \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$
2. 实 d 次空间曲面：$N_d \leq ???$

二、 实 d 次微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$

3. 方程的极限环的最大个数 H_d 是多少？极限环的相对位置是怎样的？

- **为什么放在一起**: “微分方程定义的曲线束的拓扑”把二者联系起来了。

1. 常微分方程的几何方法

- 经典语言　　几何语言
- 微分方程　　微分形式、切向量场、Foliation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

$$\omega = P(x,y)dy - Q(x,y)dx$$

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$$

$$\partial = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

- 方程的特解　　积分曲线、轨线、不变曲线
- 方程的通解　　首次积分

1. 常微分方程的几何方法

- 我们用代数曲面理论给任何微分方程定义了三个整体不变量：陈省身数，这给微分方程的研究提供了新方法。