实验2　FFT 算法实现

2.1　实验目的

1、加深对快速傅里叶变换的理解。
2、掌握 FFT 算法及其程序的编写。
3、掌握算法性能评测的方法。

2.2　实验原理

一个连续信号 $x_a(t)$ 的频谱可以用它的傅立叶变换表示为

$$X_a(j\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(t)e^{-j\Omega t}dt \qquad (2\text{-}1)$$

如果对该信号进行理想采样，可以得到采样序列

$$x(n)=x_a(nT) \qquad (2\text{-}2)$$

同样可以对该序列进行 z 变换，其中 T 为采样周期

$$X(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n} \qquad (2\text{-}3)$$

当 $z=e^{j\omega}$ 的时候，我们就得到了序列的傅立叶变换

$$X(e^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(n)e^{j\omega n} \qquad (2\text{-}4)$$

其中ω称为数字频率，它和模拟域频率的关系为

$$\omega=\Omega T=\Omega/f_s \qquad (2\text{-}5)$$

式中的 f_s 是采样频率。上式说明数字频率是模拟频率对采样率 f_s 的归一化。同模拟域的情况相似，数字频率代表了序列值变化的速率，而序列的傅立叶变换称为序列的频谱。序列的傅立叶变换和对应的采样信号频谱具有下式的对应关系。

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}X_a(j\frac{\omega-2\pi m}{T}) \qquad (2\text{-}6)$$

即序列的频谱是采样信号频谱的周期延拓。从式（2-6）可以看出，只要分析采样序列的频谱，就可以得到相应的连续信号的频谱。注意：这里的信号必须是带限信号，采样也必须满

足 Nyquist 定理。

在各种信号序列中，有限长序列在数字信号处理中占有很重要的地位。无限长的序列也往往可以用有限长序列来逼近。对于有限长的序列我们可以使用离散傅立叶变换（DFT），这一变换可以很好地反应序列的频域特性，并且容易利用快速算法在计算机上实现当序列的长度是 N 时，我们定义离散傅立叶变换为：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} \qquad (2\text{-}7)$$

其中$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，它的反变换定义为：

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn} \qquad (2\text{-}8)$$

根据式（2-3）和（2-7）令$z=W_N^{-k}$，则有

$$X(z)|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=DFT[x(n)] \qquad (2\text{-}9)$$

可以得到$X(k)=X(z)\,|\,z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$,$W_N^{-k}$是 z 平面单位圆上幅角为$\omega=\dfrac{2\pi}{N}k$的点，就是将单位圆进行 N 等分以后第 k 个点。所以，X(k)是 z 变换在单位圆上的等距采样，或者说是序列傅立叶变换的等距采样。时域采样在满足 Nyquist 定理时，就不会发生频谱混淆；同样地，在频率域进行采样的时候，只要采样间隔足够小，也不会发生时域序列的混淆。

DFT 是对序列傅立叶变换的等距采样，因此可以用于序列的频谱分析。在运用 DFT 进行频谱分析的时候可能有三种误差，分析如下：

（1）混淆现象

从式（2-6）中可以看出，序列的频谱是采样信号频谱的周期延拓，周期是 2π /T，因此当采样速率不满足 Nyquist 定理，即采样频率$f_s=1/T$小于两倍的信号（这里指的是实信号）频率时，经过采样就会发生频谱混淆。这导致采样后的信号序列频谱不能真实地反映原信号的频谱。所以，在利用 DFT 分析连续信号频谱的时候，必须注意这一问题。避免混淆现象的唯一方法是保证采样的速率足够高，使频谱交叠的现象不出现。这就告诉我们，在确定信号的采样频率之前，需要对频谱的性质有所了解。在一般的情况下，为了保证高于折叠频率的分量不会出现，在采样之前，先用低通模拟滤波器对信号进行滤波。

（2）泄漏现象

实际中的信号序列往往很长，甚至是无限长序列。为了方便，我们往往用截短的序列来近似它们。这样可以使用较短的 DFT 来对信号进行频谱分析。这种截短等价于给原信号序列乘以一个矩形窗函数。而矩形窗函数的频谱不是有限带宽的，从而它和原信号的频谱进行卷积以后会扩展原信号的频谱。值得一提的是，泄漏是不能和混淆完全分离开的，因为泄露导致频谱的扩展，从而造成混淆。为了减小泄漏的影响，可以选择适当的窗函数使频谱的扩散减到最小。

（3）栅栏效应

因为 DFT 是对单位圆上 z 变换的均匀采样，所以它不可能将频谱视为一个连续函数。

这样就产生了栅栏效应，从某种角度来看，用 DFT 来观看频谱就好像通过一个栅栏来观看一幅景象，只能在离散点上看到真实的频谱。这样的话就会有一些频谱的峰点或谷点被“栅栏”挡住，不能被我们观察到。减小栅栏效应的一个方法是在源序列的末端补一些零值，从而变动 DFT 的点数。这种方法的实质是认为地改变了对真实频谱采样的点数和位置，相当于搬动了“栅栏”的位置，从而使得原来被挡住的一些频谱的峰点或谷点显露出来。注意，这时候每根谱线多对应的频率和原来的已经不相同了。

从上面的分析过程可以看出，DFT 可以用于信号的频谱分析，但必须注意可能产生的误差，在应用过程中要尽可能减小和消除这些误差的影响。

快速傅立叶变换 FFT 并不是与 DFT 不相同的另一种变换，而是为了减少 DFT 运算次数的一种快速算法。它是对变换式（2-7）进行一次次的分解，使其成为若干小点数 DFT 的组合，从而减小运算量。常用的 FFT 是以 2 为基数，其长度 $N=2^M$ 。它的运算效率高，程序比较简单，使用也十分地方便。当需要进行变换的序列的长度不是 2 的整数次方的时候，为了使用以 2 为基的 FFT，可以用末尾补零的方法，使其长度延长至 2 的整数次方。IFFT 一般可以通过 FFT 程序来完成，比较式（2-7）和（2-8），只要对 X(k)取共轭，进行 FFT 运算，然后再取共轭，并乘以因子 1/N，就可以完成 IFFT。

2.3 实验内容

1、 编制自己的 FFT 算法。

2、 选取实验 1 中的典型信号序列验证算法的有效性。

3、 对所编制 FFT 算法进行性能评估。

2.4 实验报告要求

1、 总结自己实现 FFT 算法时候采用了哪些方法减小了运算量。
2、 给出自己的 FFT 算法与实验 1 中自己的 DFT 算法的性能比较结果。
3、 给出自己的 FFT 算法与 Matlab 中 FFT 算法的性能比较结果。
4、 总结实验中根据实验现象得到的其他个人结论。