



# 《多媒体通信》

从变换编码到单像素相机...



2019年10月13日



电子工程与信息科学系



# 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码？
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换？

## ◆ CT图像的常识

- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建？

## ◆ 单像素相机

- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

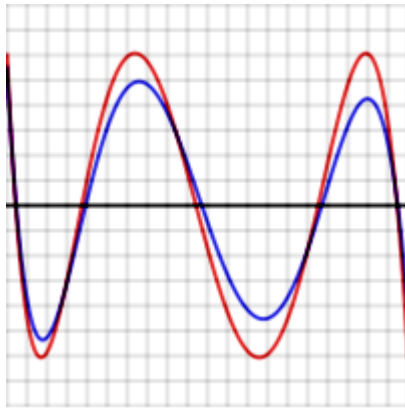
## ◆ 光场相机



# Approximation theory

◆ In mathematics, approximation theory is concerned with how functions can best be approximated with **simpler** functions, and with **quantitatively** characterizing the errors introduced thereby.

用来近似真实函数的简单函数最好是正交的



$$(S_N f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}.$$

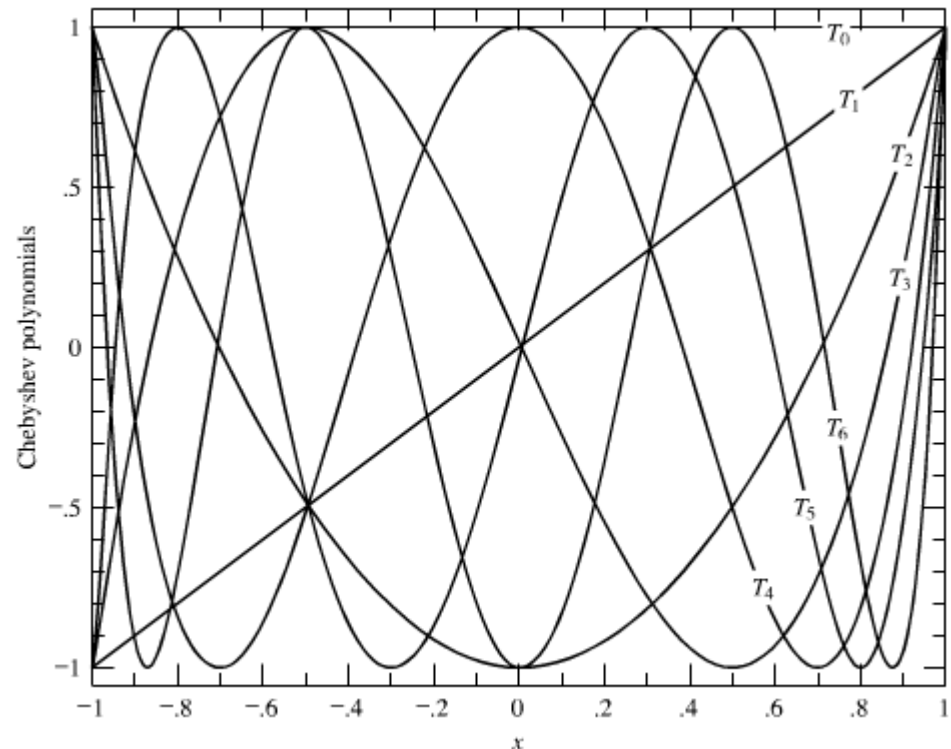
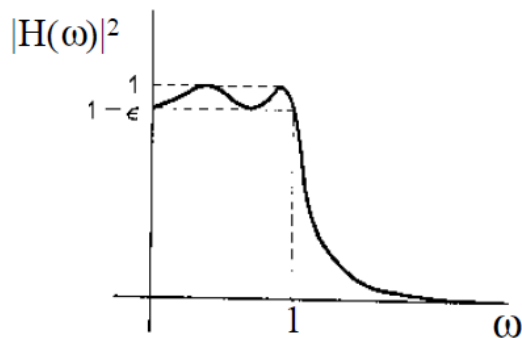


# Filter Approximation Theory: $T_n(\omega)$

◆ We want to determine classes of rational polynomials that approximate the “Ideal” low-pass filter response (high-pass band-pass and band-stop filters can be derived from a low pass design)

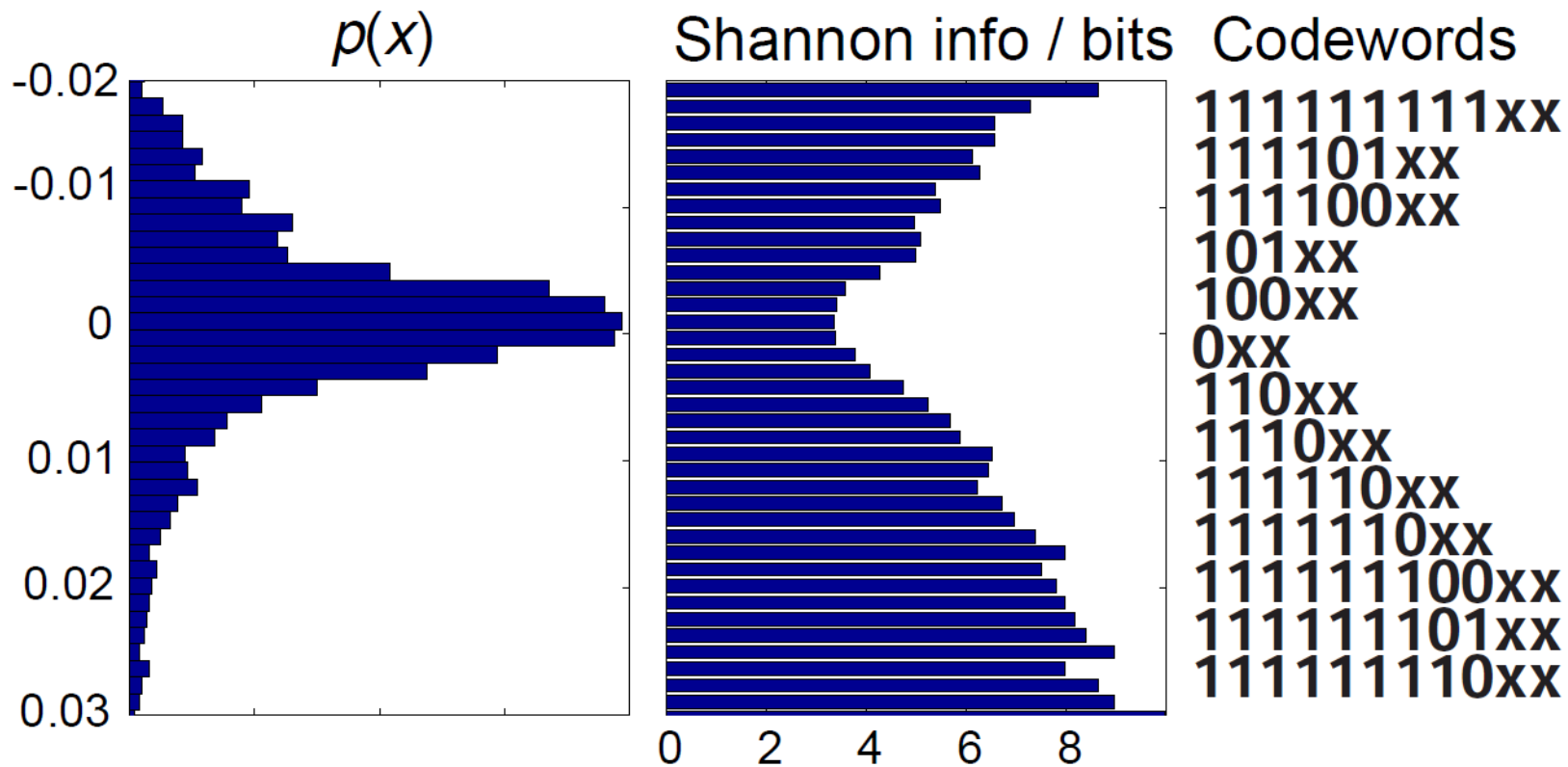
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 F^2(\omega)}$$

$$F(\omega) = T_n(\omega)$$





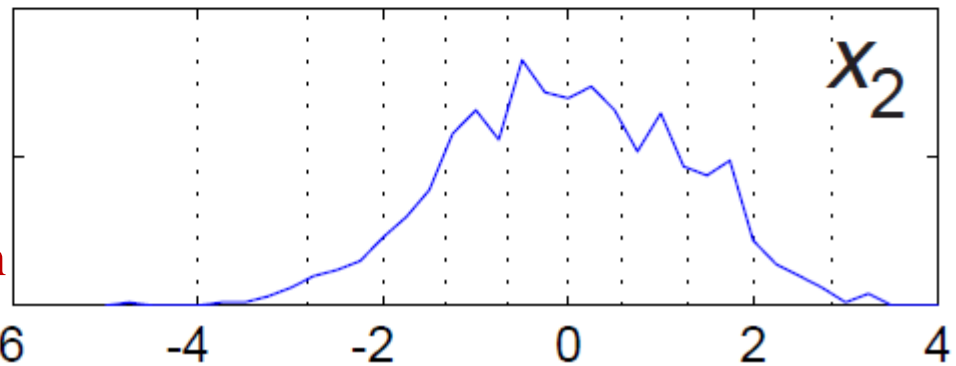
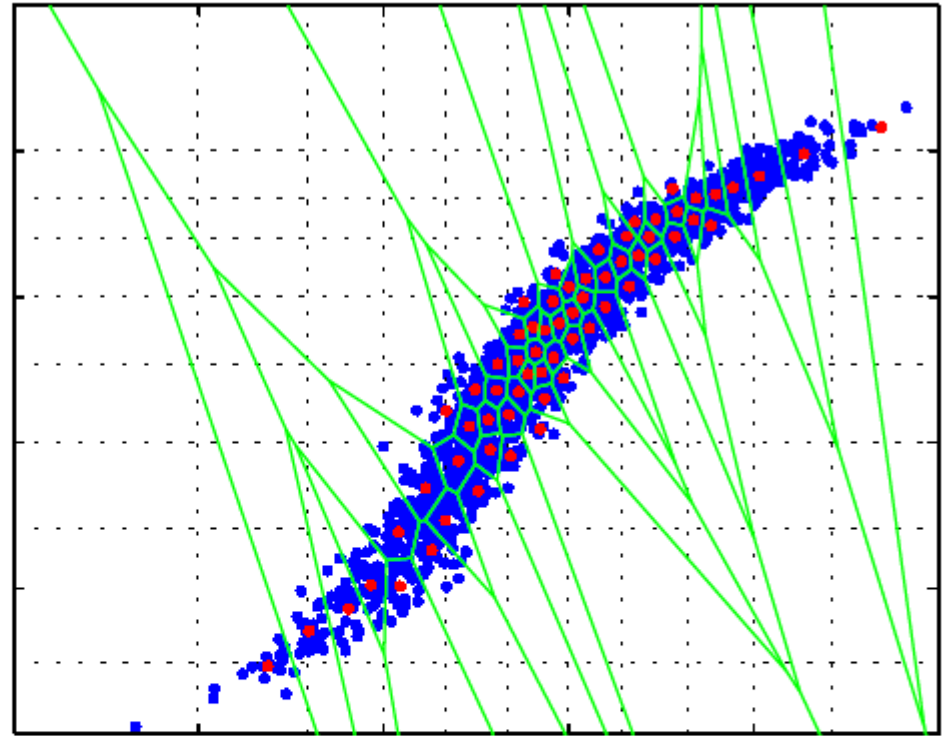
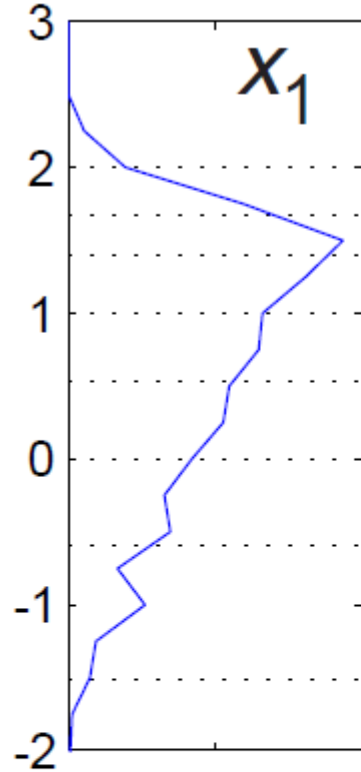
# 信源符号非均匀分布为压缩提供了可能 熵编码：根据熵选择码长



非均匀程度越高，熵编码的压缩比越高



# 矢量量化→非均匀程度提高 Vector Quantization



Quantize mutually dependent values in joint space May help even if values are largely independent

larger space  $\{x_1, x_2\}$  is easier for Huffman

# MC DFT vs. DCT

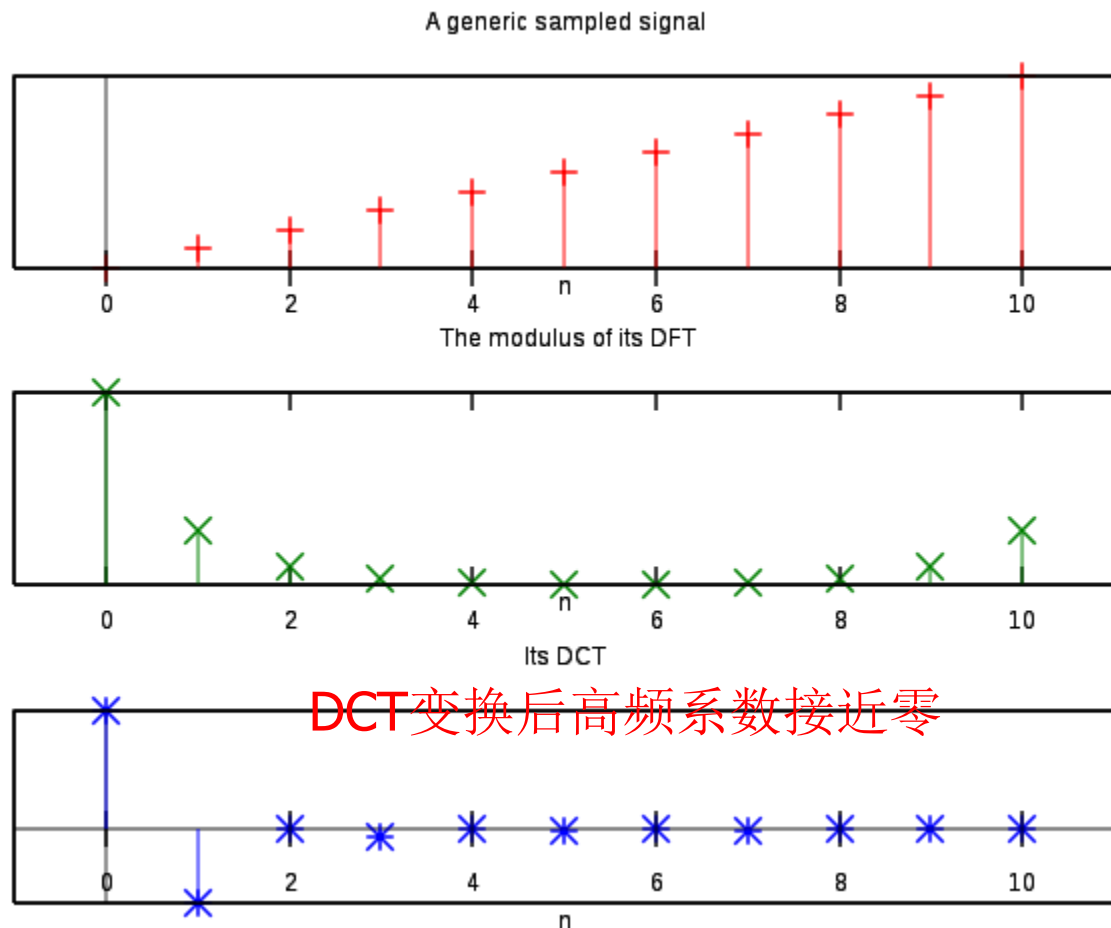
相比于DFT，DCT变换系数的分布更加不均匀

从时域→变换域，系数向低频集中。只需要保存大的系数即可反变换获得原始信号。

需保留的变换域系数越少，压缩比将越高

$$X_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-i2\pi kn/N}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos \left[ \frac{\pi}{N} \left( n + \frac{1}{2} \right) k \right]$$

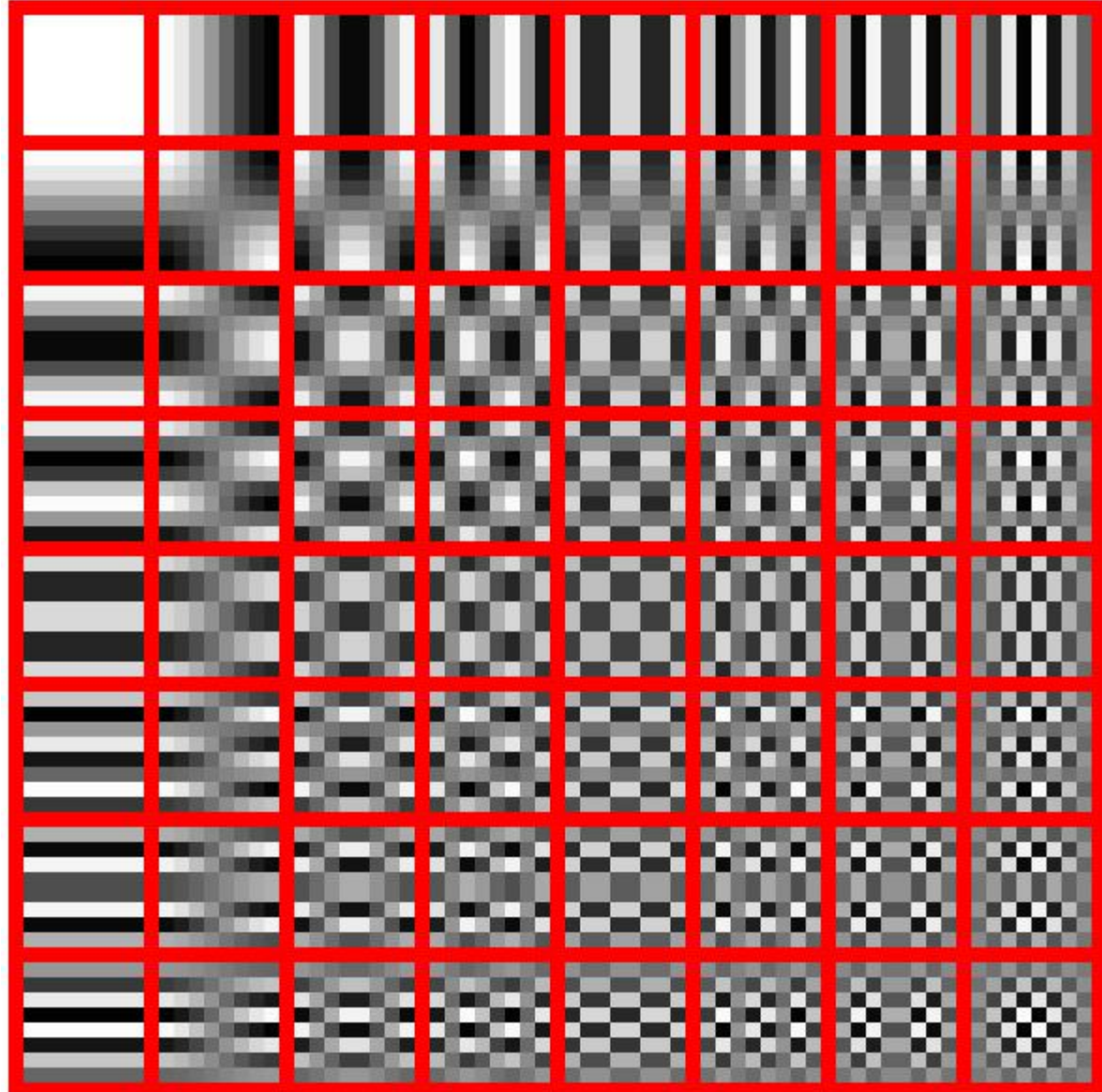




# JPEG图像编码中用的二维DCT

The source data (8x8) is transformed to a linear combination of these 64 frequency squares.

在JPEG标准中，8x8 的图像块被表示为右图64种图像块的线性组合



# MC 二维DCT示例

8x8

A



8x8 的原始图像块被  
表示为右图64种图像  
块的线性组合

+ 6.192 ×



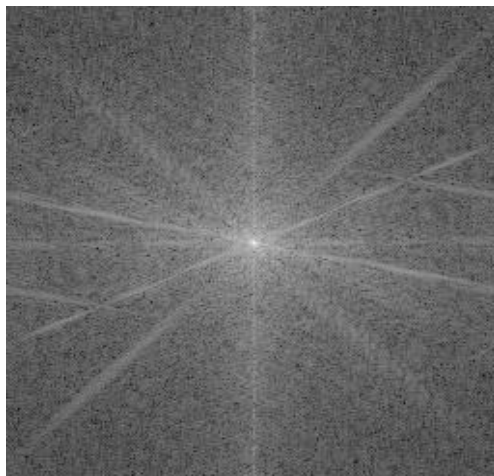


# 图像压缩中的DCT变换

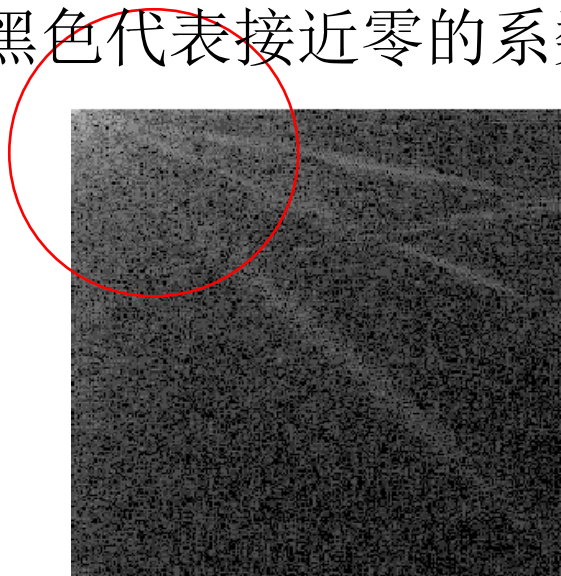
白色代表大的系数；黑色代表接近零的系数



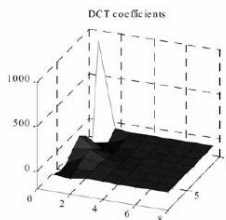
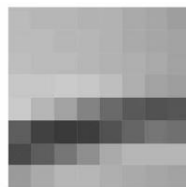
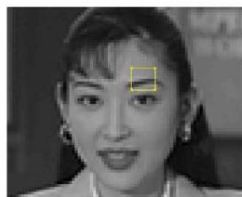
original



DFT



DCT

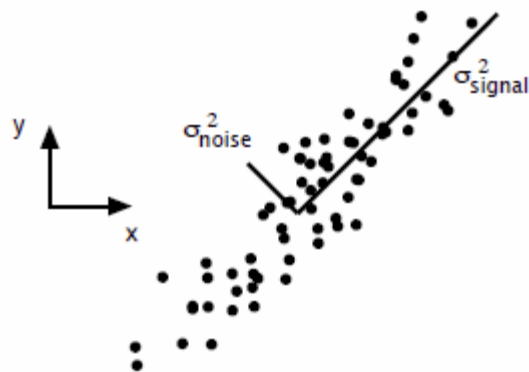




# 通过线性变换降维的原理剖析

假设是一个摄像机采集一个物体运动得到的图片，上面的点表示物体运动的位置，假如我们想要用一条直线去拟合这些点，那我们会选择什么方向的线呢？

如果把这些点单纯的投影到x轴或者y轴上，最后在x轴与y轴上得到的方差是相似的（因为这些点的趋势是在45度左右的方向，所以投影到x轴或者y轴上都是类似的），看不出来这些点真正的方向是什么。但若进行坐标系的变化，横轴变成了signal的方向，纵轴变成了noise的方向，则就很容易发现什么方向的方差大，什么方向的方差小了。



PCA(Principle Component Analysis)就是对原始的空间中顺序地**找一组相互正交的坐标轴**，**第一个轴是使得方差最大的**，**第二个轴是在与第一个轴正交的平面中使得方差最大的**，第三个轴是在与第1、2个轴正交的平面中方差最大的，这样假设在N维空间中，我们可以找到N个这样的坐标轴，我们取前r个去近似这个空间，这样就从一个N维的空间压缩到r维的空间了，但是我们选择的r个坐标轴能够使得空间的压缩使得数据的损失最小。



# 什么样的变换是最佳的？

## K-L变换

### ◆ 卡洛南-洛伊变换

### ◆ Karhunen-Loève Transform

### ◆ 定义

- 以矢量信号 $\mathbf{X}$ 的协方差矩阵 $\Phi$ 的归一化正交特征矢量 $\mathbf{q}$ 所构成的正交矩阵 $\mathbf{Q}$ ，来对该矢量信号 $\mathbf{X}$ 做正交变换 $\mathbf{Y}=\mathbf{Q}\mathbf{X}$ ，则称此变换为K-L变换（K-LT或KLT）。
- 可见，要实现KLT，首先要从信号求出其协方差矩阵 $\Phi$ ，再由 $\Phi$ 求出正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 。 $\Phi$ 的求法与自相关矩阵求法类似。

### ◆ 缺点

- 无快速算法，且变换矩阵随不同的信号样值集合而不同

# MC 优化问题 (Optimization problems)

◆ 目标函数

$$f_0(x)$$

Source: 《Convex Optimization》, Stephen Boyd  
Chapter 4 Convex optimization problems

◆ 不等式约束

$$f_i(x), i=1, \dots, m$$

◆ 等式约束

$$h_i(x), i=1, \dots, p$$

We use the notation

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{subject to} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{4.1}$$

to describe the problem of finding an  $x$  that minimizes  $f_0(x)$  among all  $x$  that satisfy the conditions  $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$ , and  $h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$ . We call  $x \in \mathbf{R}^n$  the *optimization variable* and the function  $f_0 : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  the *objective function* or *cost function*. The inequalities  $f_i(x) \leq 0$  are called *inequality constraints*, and the corresponding functions  $f_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  are called the *inequality constraint functions*. The equations  $h_i(x) = 0$  are called the *equality constraints*, and the functions  $h_i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  are the *equality constraint functions*. If there are no constraints (*i.e.*,  $m = p = 0$ ) we say the problem (4.1) is *unconstrained*.



# 拉格朗日对偶

Source: 《Convex Optimization》, Stephen Boyd  
Chapter 4 Convex optimization problems

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_0(x) \\ & \text{subject to} && f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

◆ The basic idea in Lagrangian duality is to take the constraints into account by augmenting the objective function with a weighted sum of the constraint functions.

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x)$$

◆ The vectors  $\lambda$  and  $\nu$  are called the *dual variables* or *Lagrange multiplier vectors* associated with the Problem.

$$g(\lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \nu) = \inf_{x \in \mathcal{D}} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x) \right)$$



# 什么样的变换是最佳的？

思路：寻找使数据方差最大的变换

- Principle Component Analysis (PCA)
- Karhunen-Loeve transformation (KL transformation)

找一组合适的变换基，使得变换后的数据有着最大的方差

◆ Let  $\mathbf{A}_{n \times m}$  是数据矩阵，每一行代表一个数据样本

◆ Projection of data along  $w$  is  $\mathbf{A}w$ .

◆ Variance:  $\sigma_w^2 = (\mathbf{A}w)^T(\mathbf{A}w) = w^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} w = w^T \mathbf{C} w$

where  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  is the covariance matrix of the data ( $\mathbf{A}$  is centered!)

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \mathbf{a}_1 & - \\ - & \mathbf{a}_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{a}_n & - \end{pmatrix}$$

◆ Task: **maximize variance** subject to **constraint**  $w^T w = 1$ .

◆ Maximize  $f = w^T \mathbf{C} w - \lambda(w^T w - 1)$ ,  $\lambda$  is the Lagrange multiplier



# 什么样的变换是最佳的？

## 求解方法： Optimization Problem

### ◆ Maximize

$$f = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} - \lambda (\mathbf{w}^T \mathbf{w} - 1)$$

$\lambda$  is the Lagrange multiplier

### ◆ Differentiating with respect to $\mathbf{w}$ yields

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{C}\mathbf{w} - 2\lambda\mathbf{w} = 0$$

### ◆ Eigenvalue equation: $\mathbf{C}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ , where $\mathbf{C} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ .

◆ Once the first principal component is found, we continue in the same fashion to look for the next one, which is orthogonal to (all) the principal component(s) already found.



## 小结：为什么趋向变换编码

◆ Representation → Approximation → Compression

◆ 图像在空间域中的数据平方和与图像在变换域中的数据平方和存在能量守恒关系。

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} |f(x, y)|^2 = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} |F(u, v)|^2$$

◆ 能量集中性：大部分正交变换将图像的大部分能量集中到相对少数几个系数上，由于能量守恒，因此这意味着许多变换系数只含有很少的能量。

# MC 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码？
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换？

## ◆ CT图像的常识

- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建？

## ◆ 单像素相机

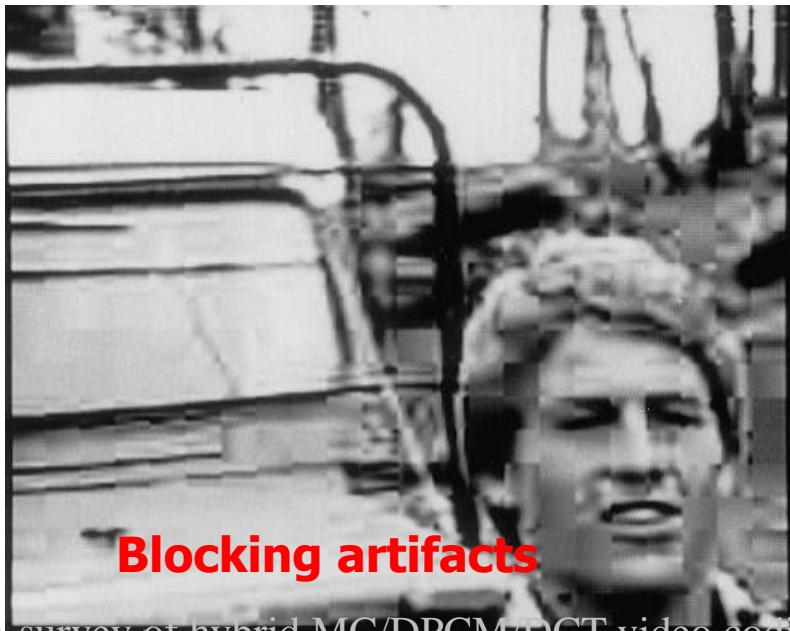
- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

## ◆ 光场相机

# 分块变换编码的固有问题

## Blocking artifacts

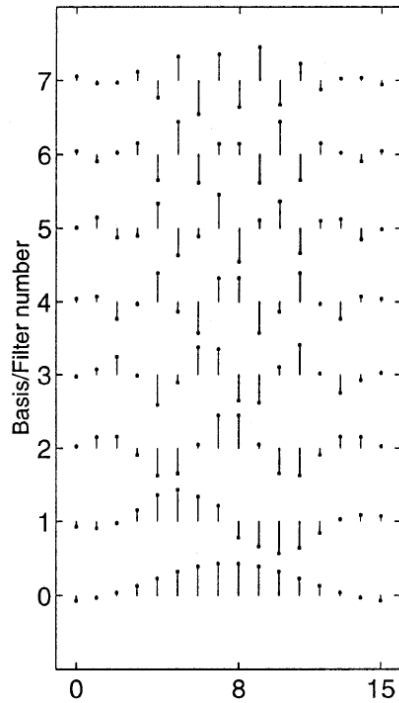
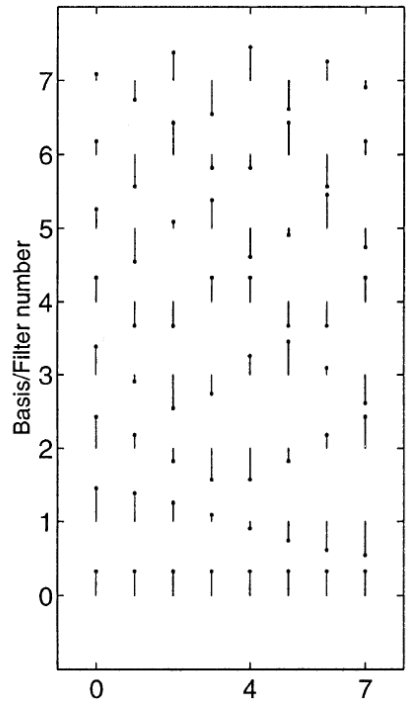
- ◆ The cause of the blocking effect with respect to **block-based coding** is intuitively obvious.



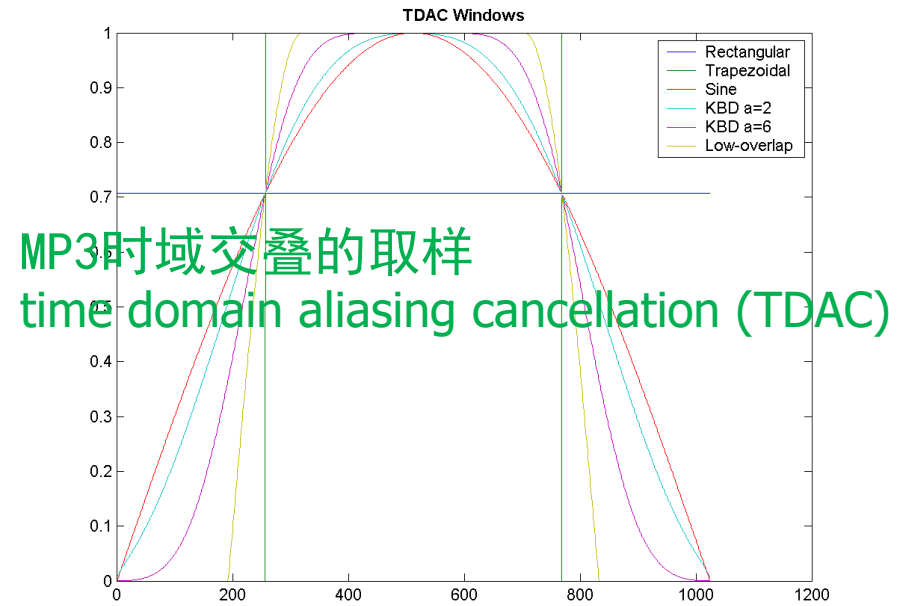
Examples of the blocking effect; most evident in the **smoothly textured regions** which are of **low-to-medium luminance**.



# 分块进行变换编码的缺陷



JPEG XR中的正交交叠变换  
LOT: Orthogonal Lapped Transforms



# 去块效应滤波器(Deblocking filter)

◆ 消除由于相邻宏块由不同的运动估计或者量化导致的人工痕迹。

- Whether or not to filter a particular block boundary
- Whether to apply strong or normal deblocking



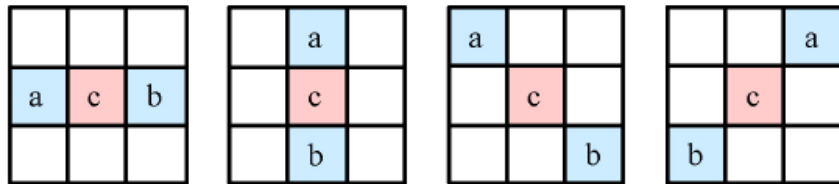


# H.265(HEVC)的去块效应手段之一

## SAO: edge offset (EO)

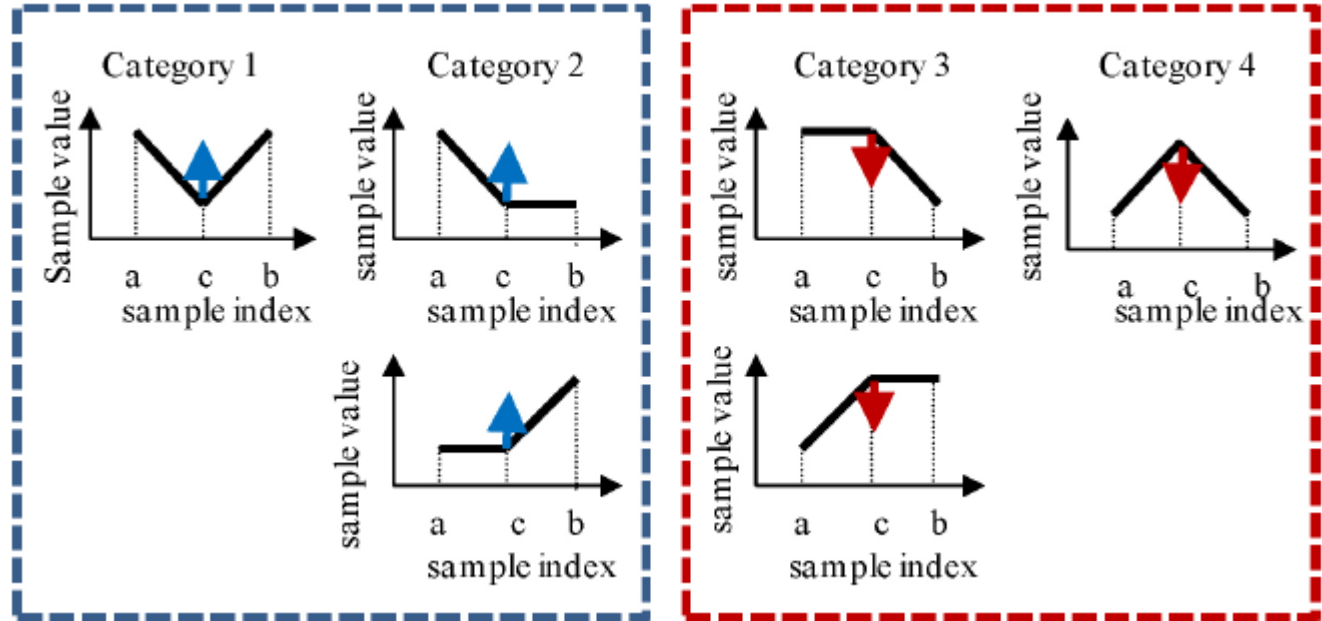
### Sample Classification Rules for Edge Offset

Four 1-D directional patterns for EO sample classification



Category	Condition
1	$c < a \ \&\& \ c < b$
2	$(c < a \ \&\& \ c == b) \    \ (c == a \ \&\& \ c < b)$
3	$(c > a \ \&\& \ c == b) \    \ (c == a \ \&\& \ c > b)$
4	$c > a \ \&\& \ c > b$
0	None of the above

Positive offsets for EO categories 1 and 2 and negative offsets for EO categories 3 and 4 result in smoothing.





# 傅里叶变换的问题

## Gibbs phenomenon

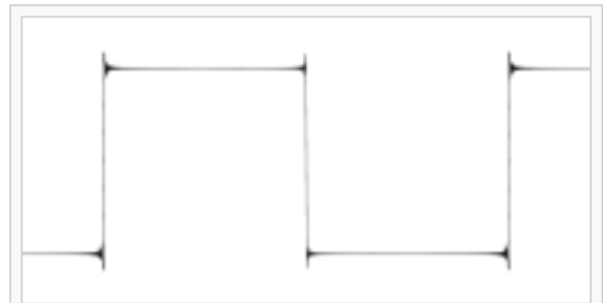
The Gibbs phenomenon involves both the fact that Fourier sums overshoot at a jump discontinuity, and that this overshoot does not die out as the frequency increases.



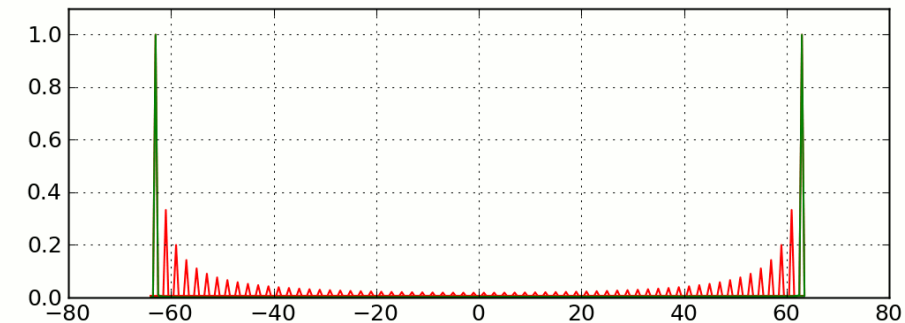
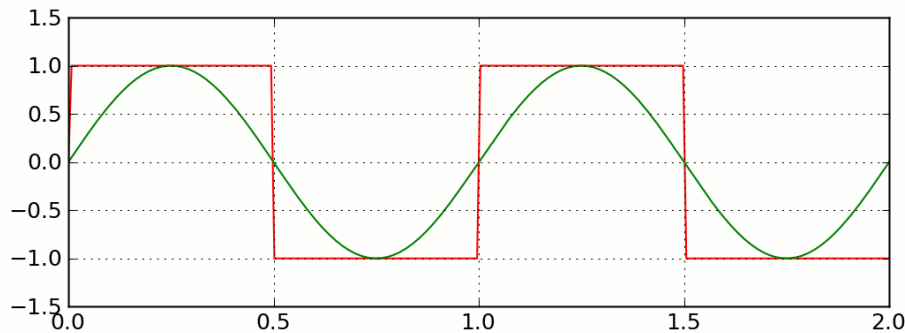
Functional approximation of square wave using 5 harmonics



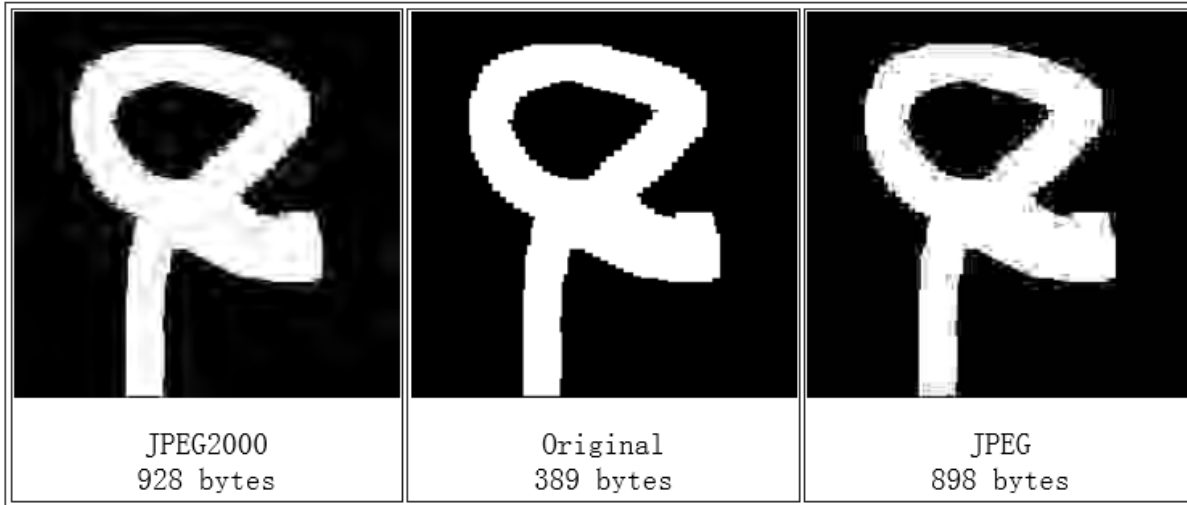
Functional approximation of square wave using 25 harmonics



Functional approximation of square wave using 125 harmonics



# MC Ringing effect

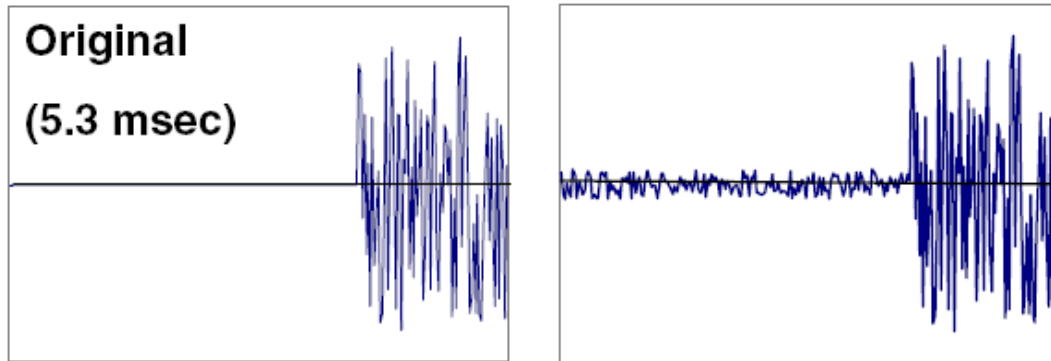


The ringing effect is fundamentally associated with **Gibb's phenomenon**, and, as such, it is most evident along high contrast edges in areas of generally smooth texture in the reconstruction, and appears as a shimmering or rippling outwards from the edge up to the encompassing block's boundary.





# 傅里叶变换及其变种的缺陷



频域系数在编码过程中的量化产生的量化误差在时域被扩展了

- ◆ 1807年傅里叶分析方法提出以来，傅里叶分析已成为信号处理的主要工具之一，但是令人遗憾的是，在分析**突变**信号和**非平稳**信号时，傅里叶分析却无能为力。
- ◆ 1898年，Gibbs' paper
- ◆ 寻找新的正交展开系，使之能适应突变信号和非平稳信号分析的需求成为研究热点之一。小波变换正是在这一背景下产生的。



# 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码?
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换?

## ◆ CT图像的常识

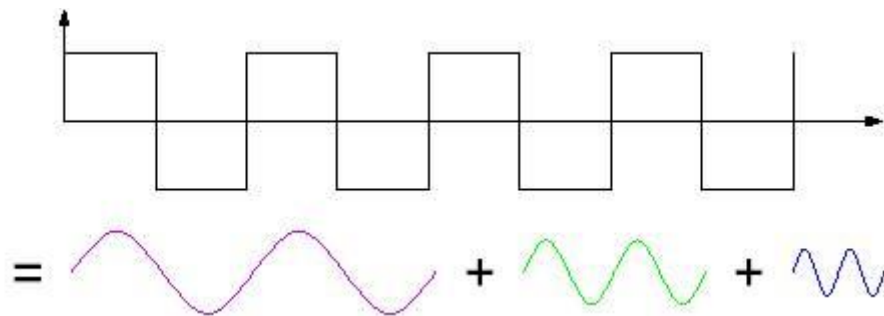
- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建?

## ◆ 单像素相机

- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

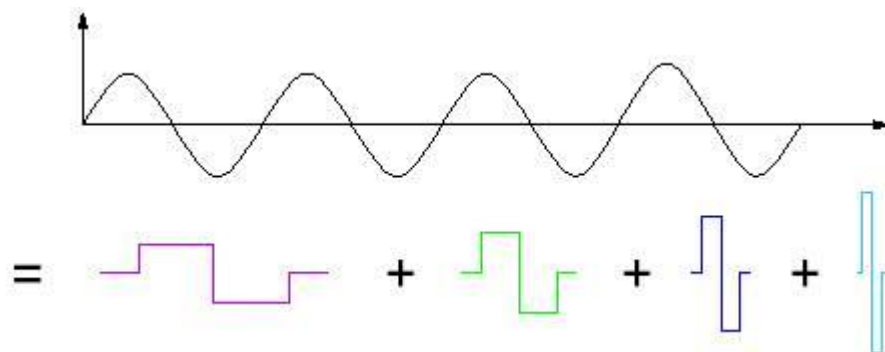
## ◆ 光场相机

# MC 变换：基函数的线性组合



傅里叶变换只是用基函数线性组合表示信号的一种情况

- 傅里叶变换在整个时间轴上积分，表示了信号的全局特征。如果需要分析信号的局部信号怎么办？
- 定义一组能够表现出信号瞬时性的基函数



Haar小波展开信号→

1910: Alfred Haar discovers the Haar wavelet



# Gabor变换

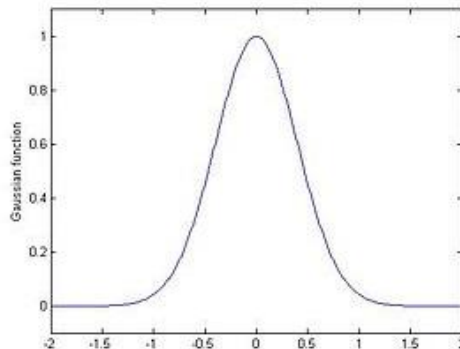
Dennis Gabor, 1946

窗口傅里叶变换能够完成局部分析的关键是窗口，当窗函数取为高斯窗时一般称为Gabor变换。

$$G_f(a; b, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_a^*(t - b)e^{-i\omega t} dt$$

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right)$$

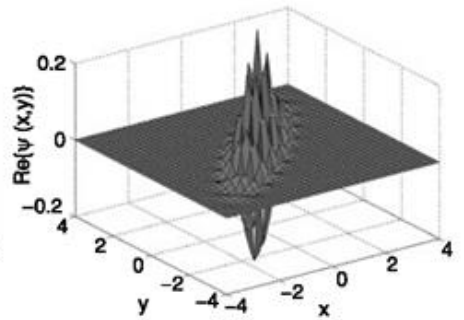
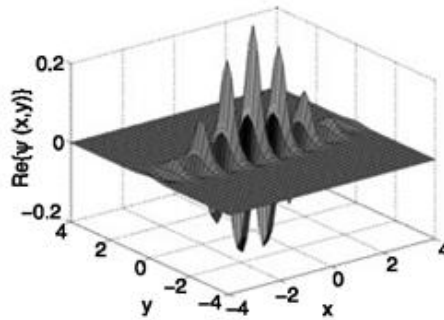
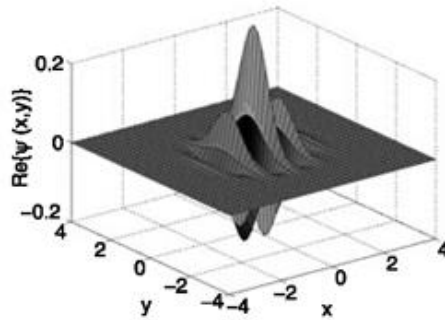
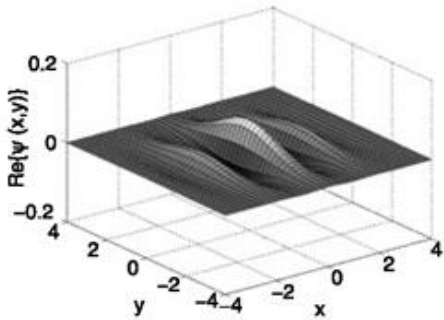
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_f(a; b, \omega)g_a(t - b)e^{i\omega t} d\omega db$$



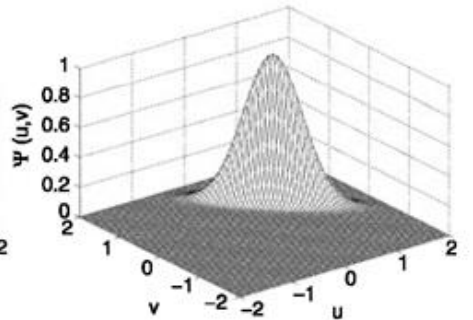
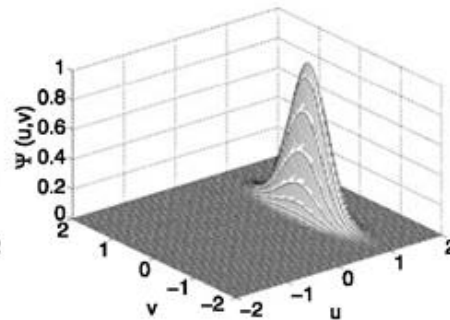
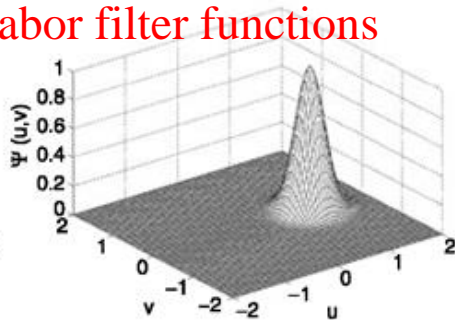
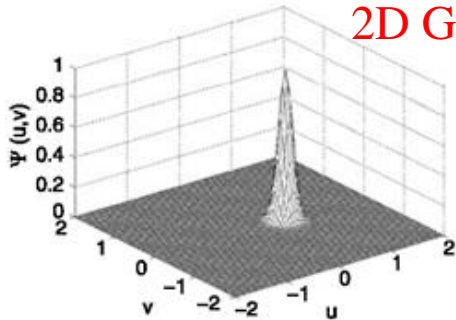
Gabor变换在要分析的信号上提取出信号中的每一个小段，将此小段进行两端周期性延拓，并对这样的信号进行传统傅里叶分析，得到此小段内信号的频率特性，平移原有分析信号中小段的位置，得到整个要分析信号在每个小范围内频率成分。严格地讲gabor变换算不上小波，因为**构不成正交基**。

# MC 2D Gabor变换

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma\beta} e^{-\pi \left[ \frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} \right]} e^{i[\xi_0 x + \nu_0 y]}$$



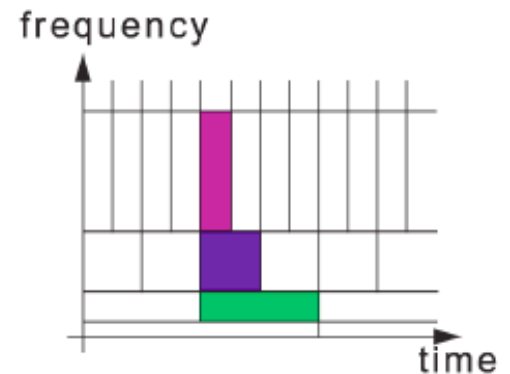
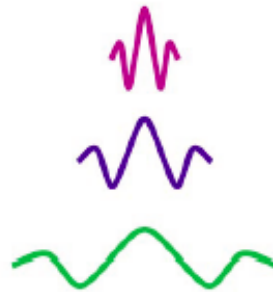
2D Gabor filter functions





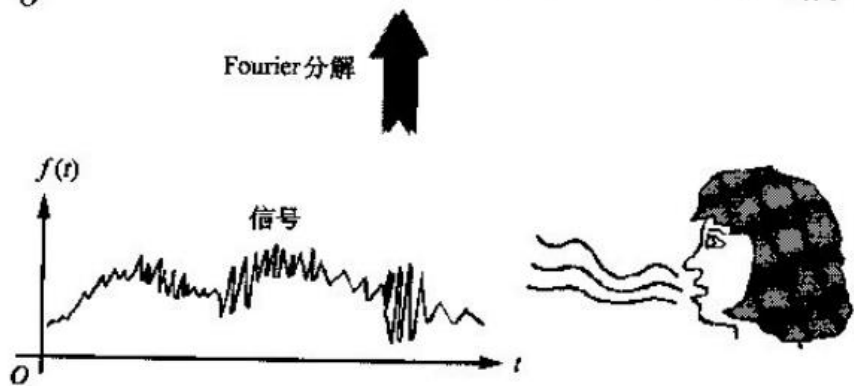
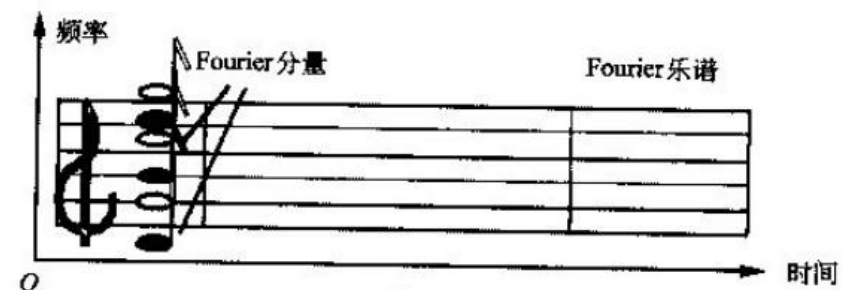
# Gabor变换的缺陷

◆ Gabor在1946年引入了窗口傅里叶变换。该变换自身也存在不可克服的缺陷，即当窗函数 $g(t)$ 确定后，矩形窗口的形状就已确定。故窗口傅里叶变换在时域具有等时宽/在频率具有等带宽特性。也就是说，窗口傅里叶变换在视频平面各处的分辨率相同。

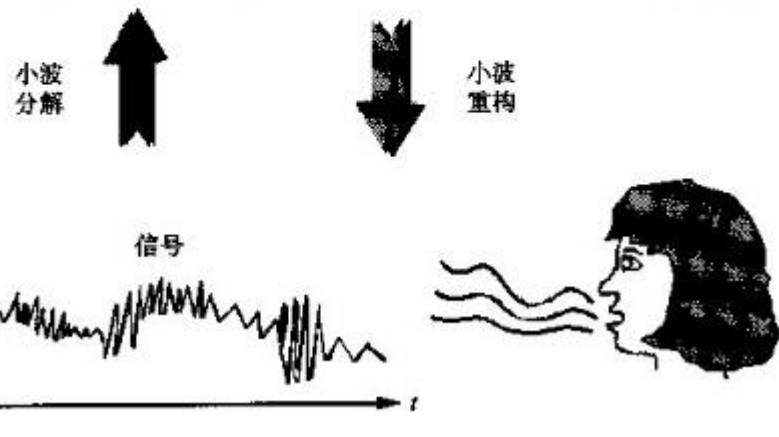


◆ 现在的小波序列：一个基本小波（母小波）经伸缩和平移得到。常见有Daubechies小波、Symlets小波、Morlet小波、Mexican Hat小波等。

# MC 时频局部化分析

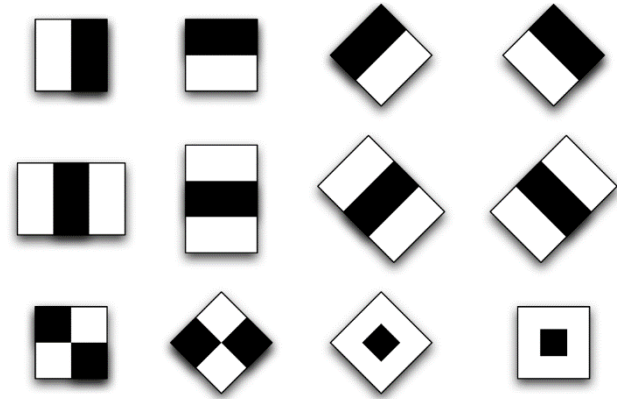
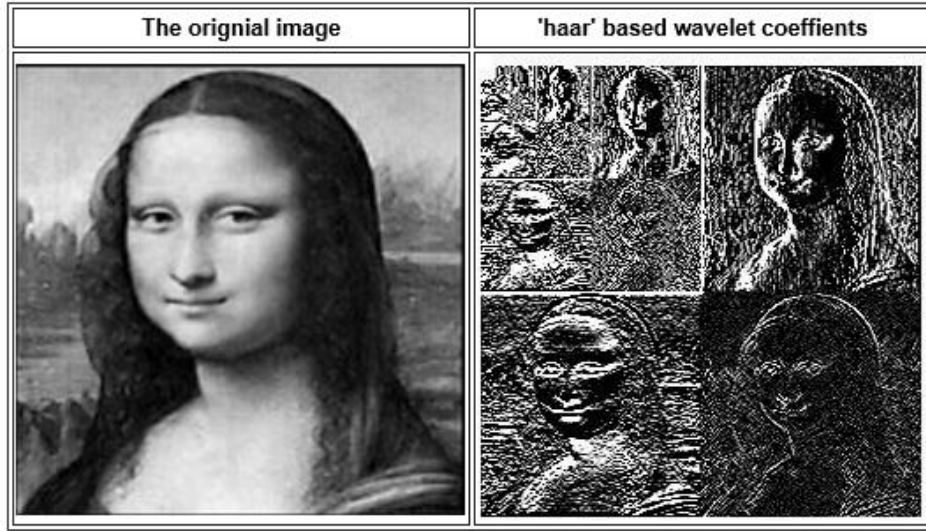


小波变换有多分辨率分析的特点，在时域和频域都具有表征信号局部特征的能力。

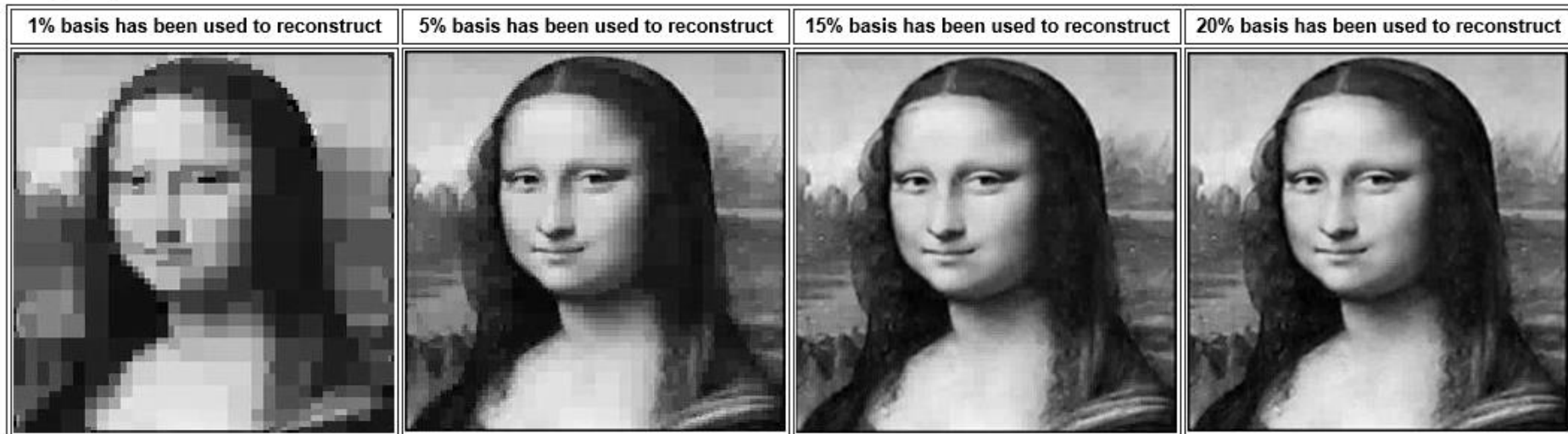




# Haar小波用于图像压缩示例



The sparsity of the wavelet 'haar' BASIS





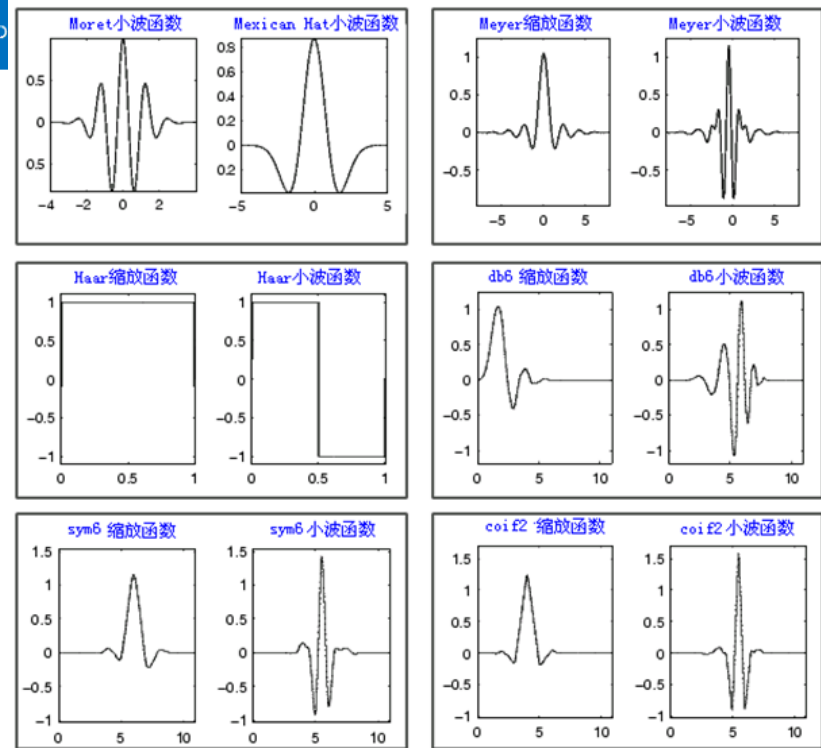
# 部分常见小波的基函数

将小波母函数 $\psi(t)$ 进行伸缩和平移，  
令伸缩因子（称尺度因子）为 $a$ ，平移因子为 $\tau$ ，则：

$$\psi_{a,\tau}(t) = a^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right), a > 0, \tau \in R$$

则称 $\psi_{a,\tau}(t)$ 是依赖参数 $a, \tau$ 的小波基函数。

将信号在这个函数系上分解，就得到连续小波变换。小波变换通过**平移**母小波(mother wavelet)可获得信号的时间信息，而通过**缩放**小波的宽度(或者叫做尺度)可获得信号的频率特性。

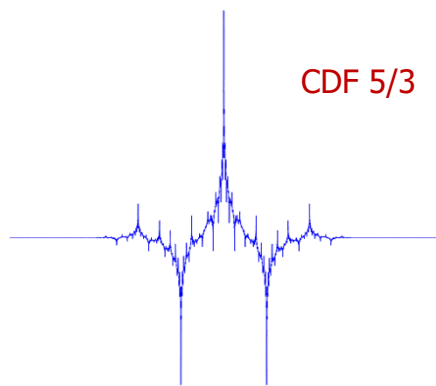




# 小波变换示例

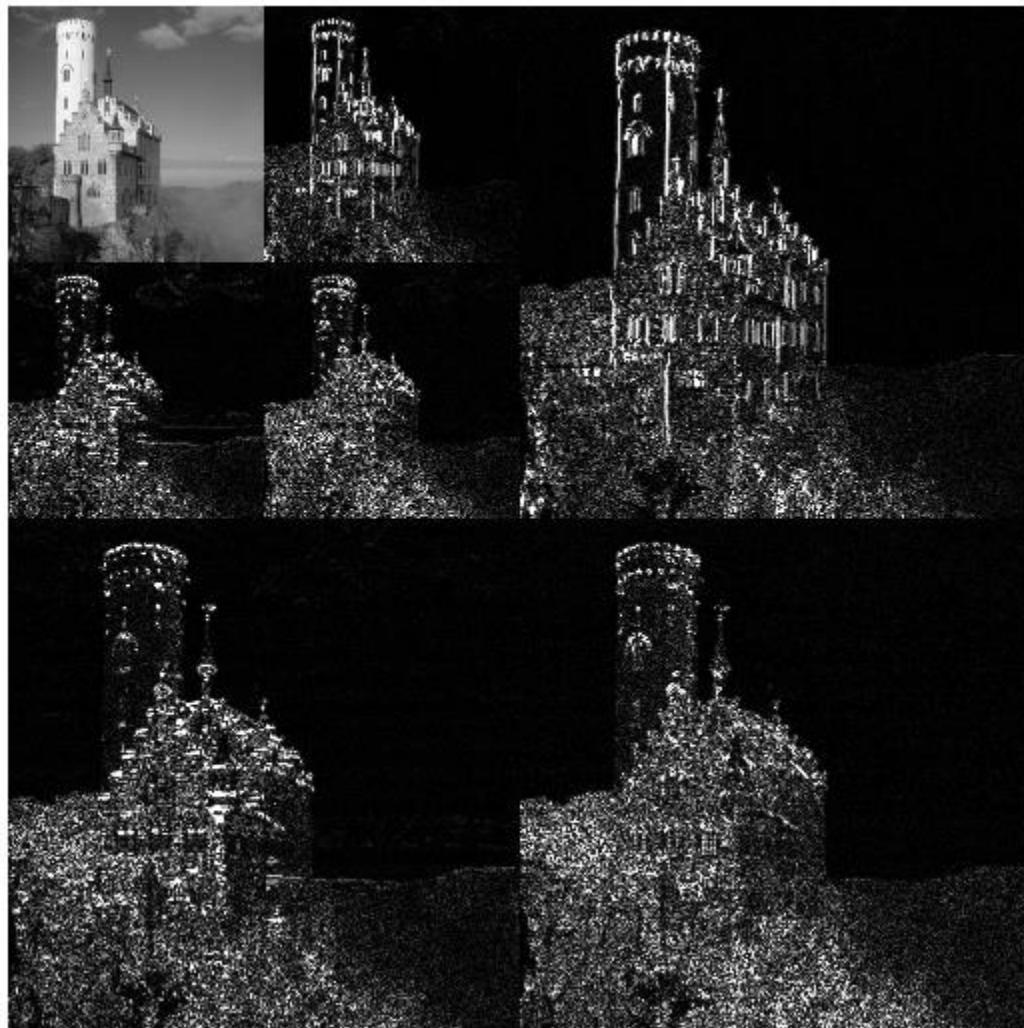
## CDF 5/3 wavelet

The JPEG 2000 compression standard uses the biorthogonal CDF 5/3 wavelet for lossless compression and a CDF 9/7 wavelet for lossy compression.



小波变换后图像的概貌信息主要集中在低频段，轮廓等细节部分主要集中在三个高频子带中。

二级小波变换子图像



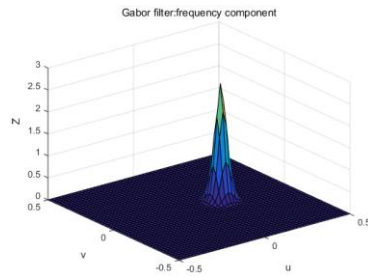
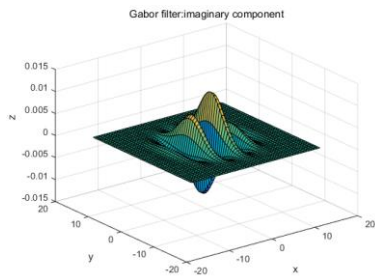
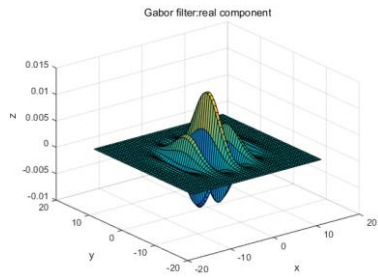
# MC 一维 → 二维

◆ 小波变换对于一维信号中的点奇异特征具有优良的表示能力，但是由各个正交方向上的一维小波张量积形成的高维基底却存在高效表示的缺陷。如对二维图像中曲线的奇异特征的表示能力不足。

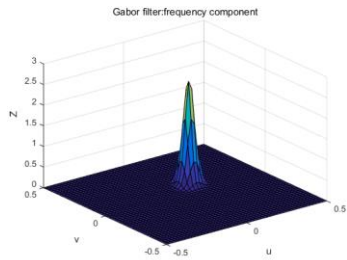
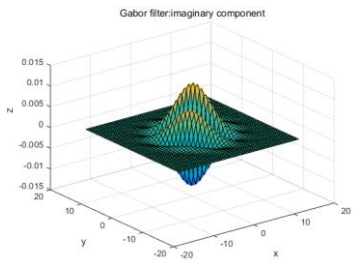
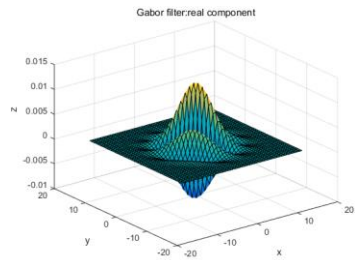
- Wedgelets [Donoho, 1999]
- Ridgelets [Candes, Donoho, 1998 Ph D thesis] 脊波
- Curvelets [Candes, Donoho, 1999] 曲波
  - 第2代 Curvelets在2005年提出
- Contourlets [Donoho, 2002 et al] 轮廓波
  - Multidirectional pyramids and contourlets
- .....



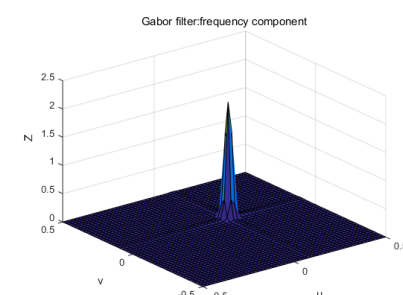
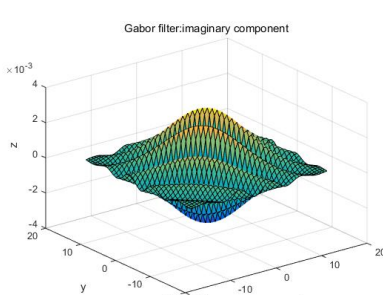
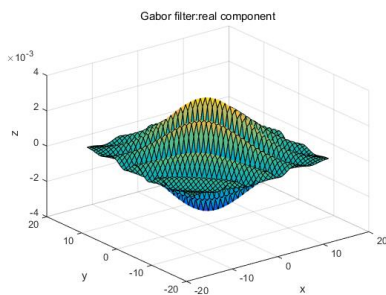
# 具有方向信息的2D Gabor滤波器



$$\theta=0, \omega=0.2, \delta_x=\delta_y=1$$



$$\theta=\pi/4, \omega=0.2, \delta_x=\delta_y=1$$



$$\theta=\pi/4, \omega=0.2, \delta_x=\delta_y=2$$

常用的偶对称二维Gabor滤波器可表示为:

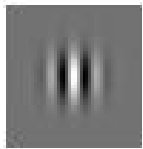
$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\delta_u\delta_v} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\delta_u^2} + \frac{v^2}{\delta_v^2}\right)\right\} \cos(\omega u)$$

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta \quad v = -y \sin \theta + x \cos \theta$$

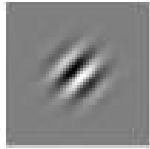
其中,  $\theta$  是滤波器的方向,  $\delta_u, \delta_v$  分别是高斯包络在  $u$  轴和  $v$  轴上的标准差 ( $u$  轴平行于  $\theta$ ,  $v$  轴垂直于  $\theta$ ).  $\omega$  表示复正弦函数的频率, 使 Gabor 滤波器有了频率选择特性。



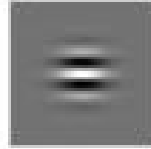
# 具有方向信息的2D Gabor滤波器



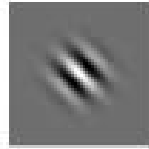
$\theta=0$



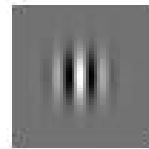
$\theta=\pi/4$



$\theta=\pi/2$

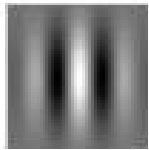


$\theta=3\pi/4$

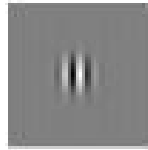


$\theta=\pi$

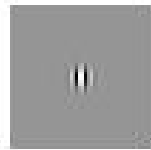
不同方向 $\theta$ 下的Gabor滤波器



$\omega=0.1$



$\omega=0.3$



$\omega=0.5$

不同频率 $\omega$ 下的滤波器

- 随着方向的变化，Gabor滤波器中明暗条纹方向改变。
- 随着频率的变化，Gabor滤波器中出现了很多宽窄不同的明暗条纹。
- 当滤波器纹理与图像作用时，滤波器覆盖下的局部纹理频率与滤波器的频率越接近响应就越大，反之越小。

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\delta_u\delta_v} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{\delta_u^2} + \frac{v^2}{\delta_v^2}\right)\right\} \cos(\omega u)$$

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta \quad v = -y \sin \theta + x \cos \theta$$

其中， $\theta$ 是滤波器的方向， $\delta_u$   $\delta_v$  分别是高斯包络在u轴和v轴上的标准差(u轴平行于 $\theta$ ，v轴垂直于 $\theta$ )。 $\omega$ 表示复正弦函数的频率，使Gabor滤波器有了频率选择特性。



# Gabor滤波示意图



(a) 提取的目标车辆

Gabor 滤波器 0 方向上, 尺度分别为 4、3、2、1、0 下的滤波结果



Gabor 滤波器  $\frac{\pi}{8}$  方向上, 尺度分别为 4、3、2、1、0 下的滤波结果



Gabor 滤波器  $\frac{2\pi}{8}$  方向上, 尺度分别为 4、3、2、1、0 下的滤波结果



Gabor 滤波器  $\frac{3\pi}{8}$  方向上, 尺度分别为 4、3、2、1、0 下的滤波结果



Gabor 滤波器  $\frac{4\pi}{8}$  方向上, 尺度分别为 4、3、2、1、0 下的滤波结果

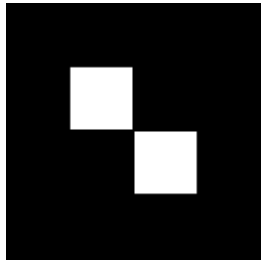




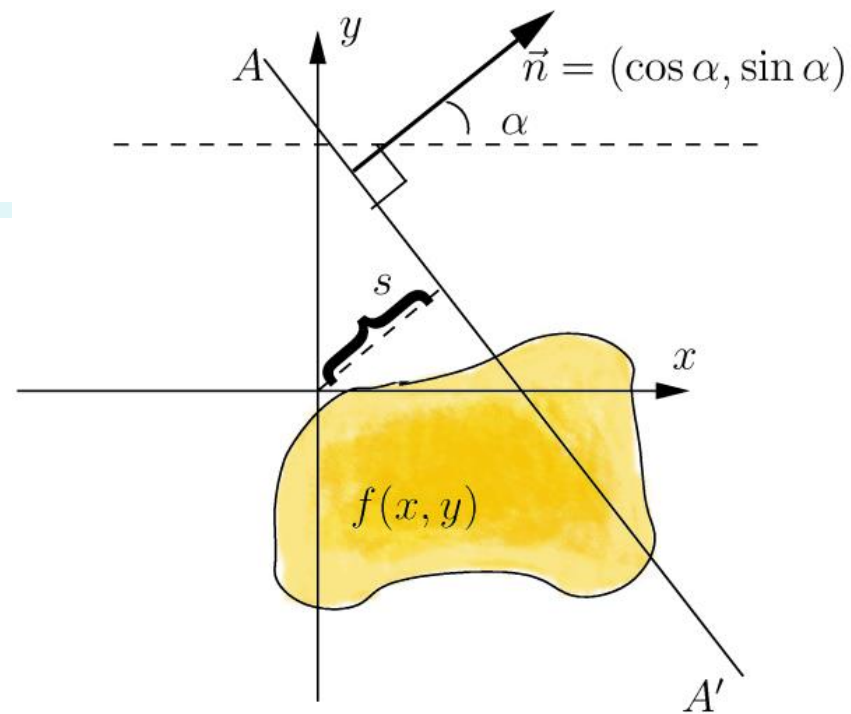
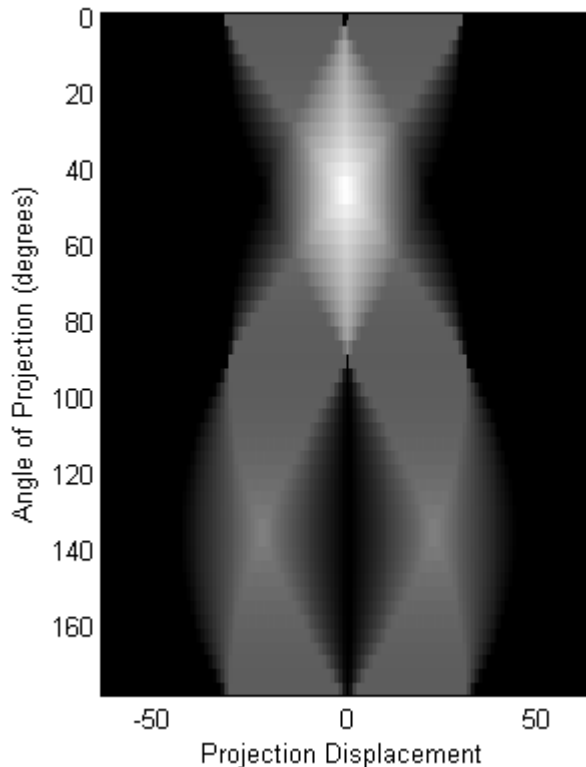
# Radon transform

Johann Radon, 1917

[https://en.wikipedia.org/wiki/Radon\\_transform](https://en.wikipedia.org/wiki/Radon_transform)



Sinogram of Phantom



$$Rf(\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(t), y(t)) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f((t \sin \alpha + s \cos \alpha), (-t \cos \alpha + s \sin \alpha)) dt$$

两维情况下radon变换大致可以这样理解：一个平面内沿不同的直线（直线与原点的距离为 $d$ ，方向角为 $\alpha$ ）对 $f(x, y)$ 做线积分，得到的像 $F(d, \alpha)$ 就是函数 $f$ 的Radon变换。也就是说，平面 $(d, \alpha)$ 的每个点的像函数值对应了原始函数的某个线积分值。

# MC Ridgelet Transform 脊波变换 1998

一个平方可积函数 $f(x,y)$ 的Ridgelet 变换定义为

$$R_f(a, b, \theta) = \iint f(x, y) \overline{\Psi}_{(a,b,\theta)}(x, y) dx dy$$

$$\Psi_{a,b,\theta}(x,y) = a^{-1/2} \Psi[(x \cos \theta + y \sin \theta - b) / a]$$

式中 $\Psi$ 为变换矩阵， $a, b, \theta$ 分别为该Ridgelet的尺度、位置和方向参数。

一个函数 $f(x,y)$ 的Ridgelet 变换可以看作首先做Randon 变换，对其再做小波变换得到。

$$R_f(a, b, \theta) = \int Randon(\theta, t) \overline{\Psi}[(t - b) / a] dt$$



# Ridgelet变换的优点

◆ Ridgelet变换实际上是将小波变换与一个方向参数的多尺度表示法相融合的产物，这种变换能够更**有效地表征信号内具有方向性的奇异特征**。Ridgelet变换不仅具有小波的局部时频分析能力的特性外，对于含有直线奇异性的高维信号其能够更优地逼近。

◆ Radon变换使二维空间中的点与线相互联系在一起。于是Radon变换自然而然地使得**适用于直线特征的Ridgelet变换**与**适用于点状特征的Wavelet变换**相联系起来。在Radon变换的每个切片进行Wavelet变换实际上等价于Ridgelet变换。小波变换是Radon域与Ridgelet域之间进行相互变换的桥梁。



# Ridgelet变换的缺点→Curvelet

◆ Ridgelet变换能够有效的检测二维图像中的**直线**信息，其检测效果一般优于传统的检测方法。但是在实际应用中图像中的线条通常多以**曲线**为主。

◆ Curvelet变换思想：对图像进行分块使得每一个小块中的曲线近似于直线，再对每一块做Ridgelet变换以获得相较于单尺度脊波变换更好的处理效果。

□ Curvelet变换本质上是多尺度变换。首先对信号作小波变换，将其分解为一系列不同子带信号，然后对每个子带信号作局部Ridgelet变换。

目标：对高维空间中含奇异曲线或者曲面的函数进行”稀疏”表示



# Curvelet变换的流程

在足够小的尺度下，曲线可以被看作为直线，曲线奇异性就可以由直线奇异性来表示，因此可以将Curvelet变换称为“Ridgelet变换的积分”。

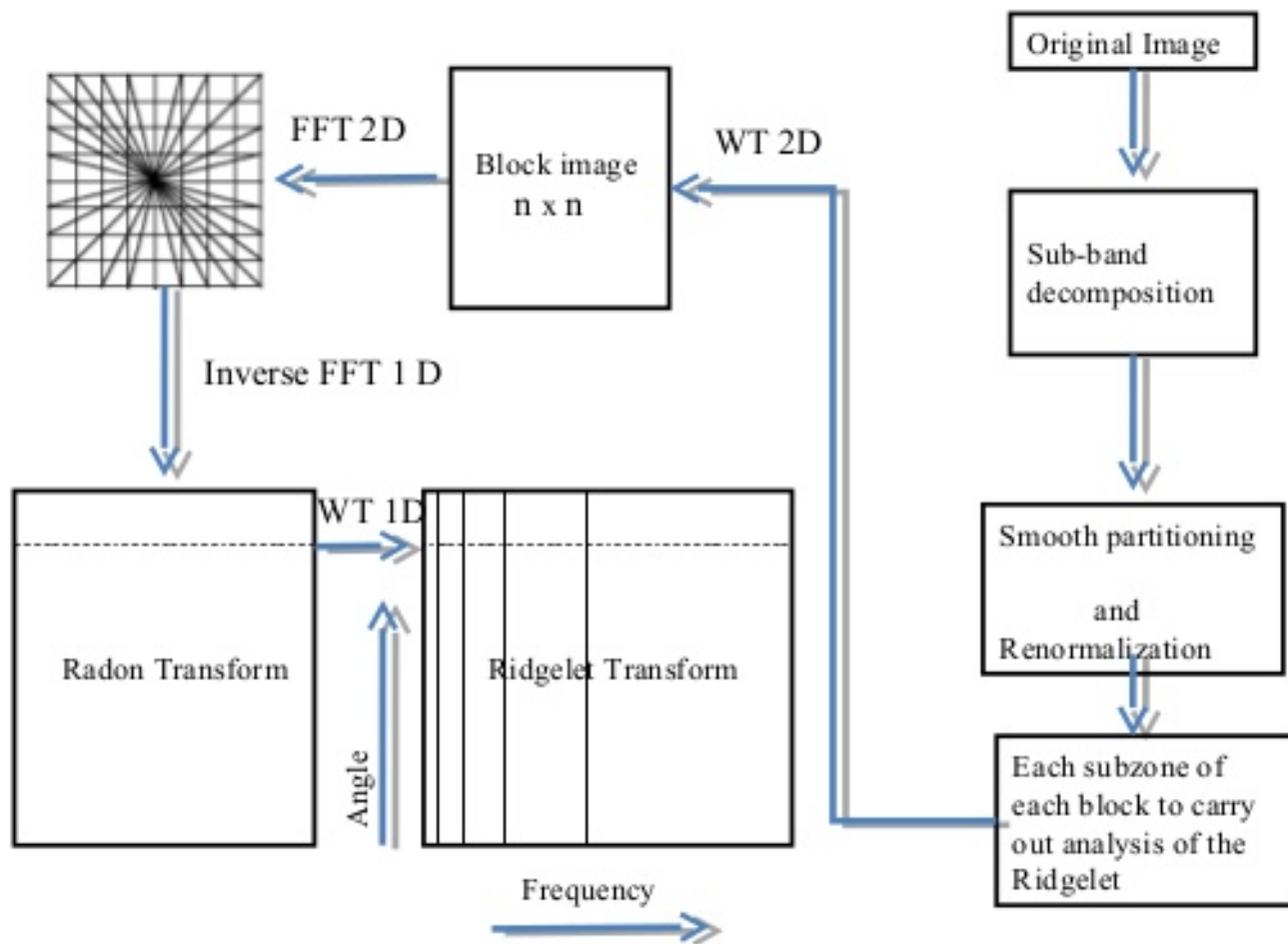
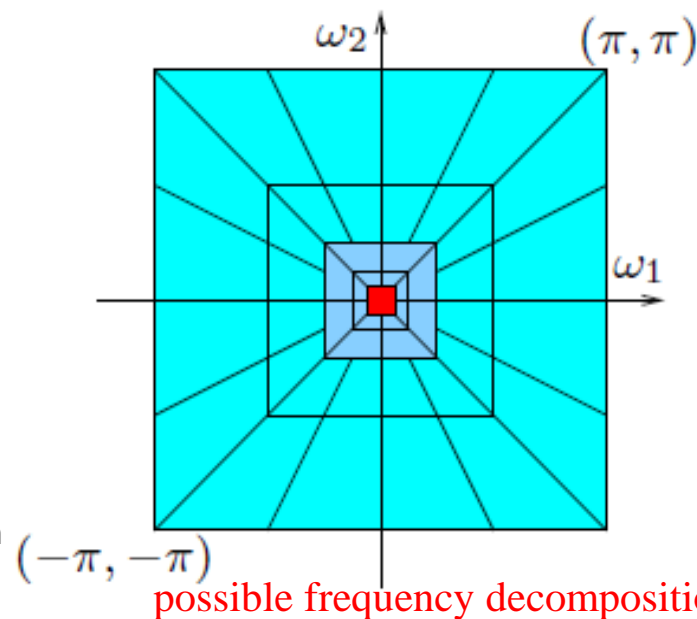
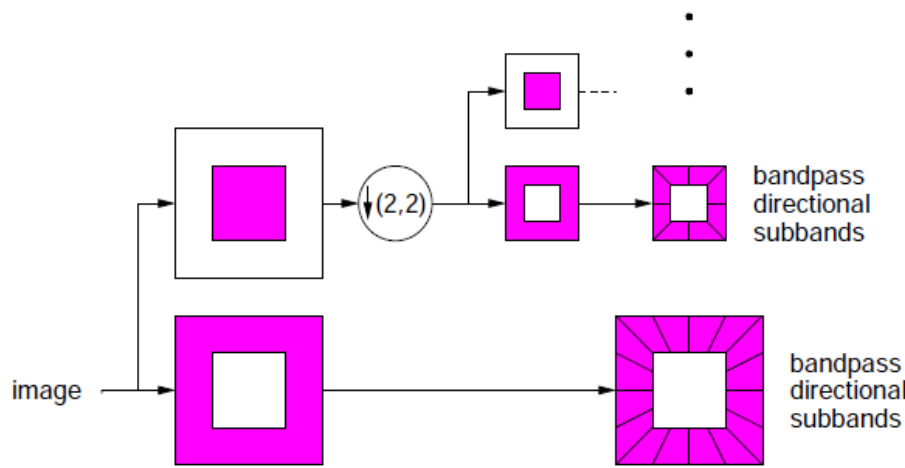


Figure: 1 Curvelet transform flow block diagram



# Contourlet Transform 轮廓波变换

◆ Contourlet变换的基本思想是：首先用拉普拉斯金字塔（Laplacian Pyramid, LP）分解得到边缘奇异点；然后使用二维方向滤波器组（Directional Filter Bank, DFB）将方向一致的奇异点连接成线，形成基本的轮廓段（Contour），因此得名Contourlet变换。





# 自适应的图像表示

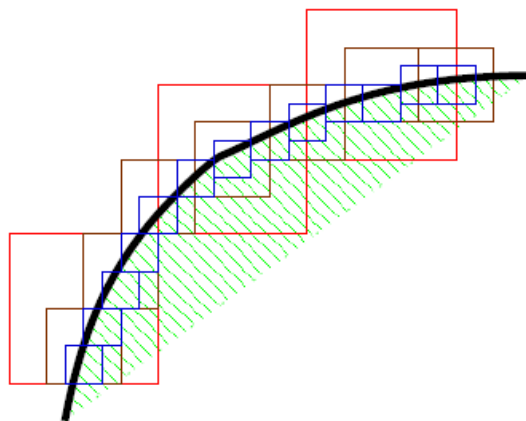
## Bandelet、Wedgelet

◆ 图像的多尺度几何分析方法分为自适应和非自适应两类。自适应方法以Bandelet和Wedgelet为代表，实际上是**边缘检测**和**图像表示方法**的结合，一般先进行边缘检测，再利用边缘信息对原函数进行最优表示。问题的关键最终归结为对图像本身的分析和准确的边缘定位，因此自适应方法很大程度上依赖于图像自身的结构。

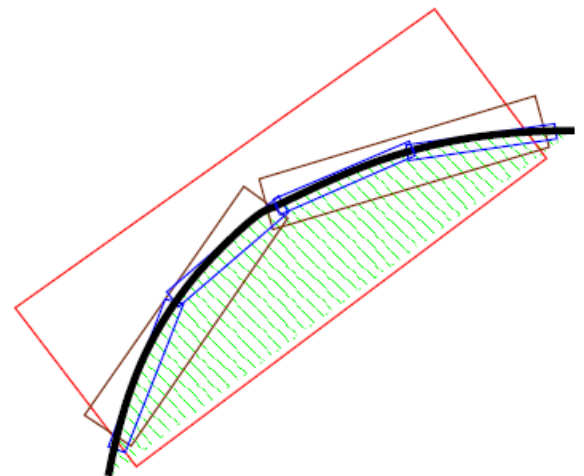
- Wedgelets, David L. Donoho, 1997
- Bandelets, Pennec and Mallat, 2000
- 第二代Bandelets, Pennec and Mallat, 2000

◆ 自适应方法的优点是:1)可以获得较为稀疏的图像表示方案;2)可能获取比传统的非自适应方法更高分辨率的信息。然而对图像自身结构的过度依赖，导致其对包含复杂几何特征图像的表现能力甚至低于可分离的正交小波分解，有违多尺度几何分析的初衷。

- ◆ Wavelet: 突变信号的刻画
- ◆ 一维  $\rightarrow$  二维: 尺度、位移、方向
  - 点的奇异特征: Wavelet
  - 直线的奇异特征: Ridgelet
  - 曲线的奇异特征: Curvelet、Contourlet



Wavelet



New scheme

# MC 小结：变换编码

◆ Representation → Approximation → Compression

◆ 能量集中性：大部分正交变换将图像的大部分能量集中到相对少数几个系数上，由于能量守恒，因此这意味着许多变换系数只含有很少的能量。

◆ 傅里叶分析无法有效处理突变信号和非平稳信号。

◆ 小波变换相比于傅里叶变换具有更好的时频局部特性  
Wavelet: 突变信号的刻画（伸缩、平移）

◆ 一维 → 二维：尺度、位移、方向

□ 点的奇异特征：Wavelet

□ 直线的奇异特征：Ridgelet

□ 曲线的奇异特征：Curvelet、Contourlet

# MC 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码？
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换？

## ◆ CT图像的常识

- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建？

## ◆ 单像素相机

- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

## ◆ 光场相机



# 常见的医学图像： X Ray、CT、MRI、PET

- ◆ X射线
- ◆ CT(Computed Tomography)
  - 电子计算机X射线断层扫描技术
  - 用于成像骨质等硬组织结构
- ◆ MRI(Magnetic Resonance Imaging)
  - 磁共振成像
  - 用于成像血管等软组织结构信息
- ◆ PET (positron emission tomography)
  - 正电子发射计算机断层显像
  - 用于成像人体器官和肿瘤组织的生理和病理的功能及代谢情况

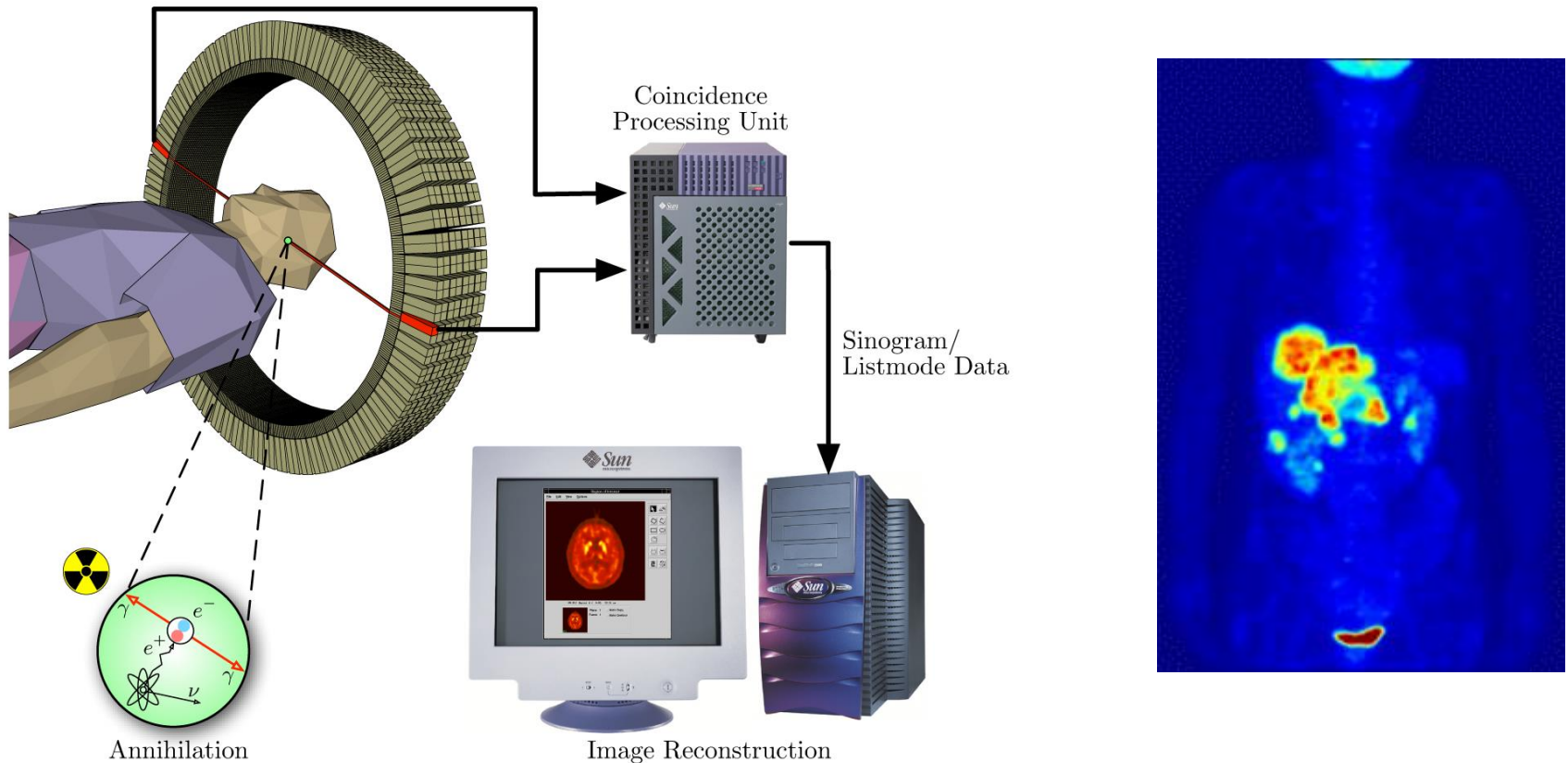


# PET (positron emission tomography) 正电子发射计算机断层显像

- ◆用正电子核素标记葡萄糖等人体代谢物作为显像剂，通过病灶对显像剂的摄取来反映其代谢变化，从而为临床提供疾病的生物代谢信息。
- ◆扫描前先给病人注射一种标记某种正电子的放射性制剂，从它们所参与的代谢过程来测定脑组织的代谢改变。由于大脑所需能量的80%来自葡萄糖，大脑某一部位的功能越活跃，那个部位的脑细胞和葡萄糖代谢就越旺盛。
- ◆PET可根据葡萄糖代谢率的高低，来检测脑异常代谢的确切部位。PET可在三维空间测定出癫痫病人脑代谢和血流局限异常。癫痫病人脑病灶区在发作时常有代谢增强，发作间隙期病灶区显示代谢降低，从而有助于确定病灶。是目前惟一可在活体上显示生物分子代谢、受体及神经介质活动的新型影像技术，现已广泛用于多种疾病的诊断与鉴别诊断、病情判断、疗效评价、脏器功能研究和新药开发等方面。



# PET (positron emission tomography) 正电子发射计算机断层显像





# 医学图像：X射线

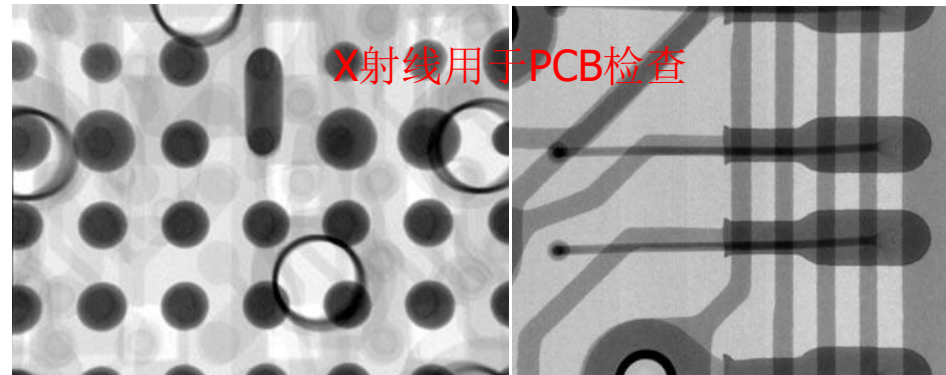
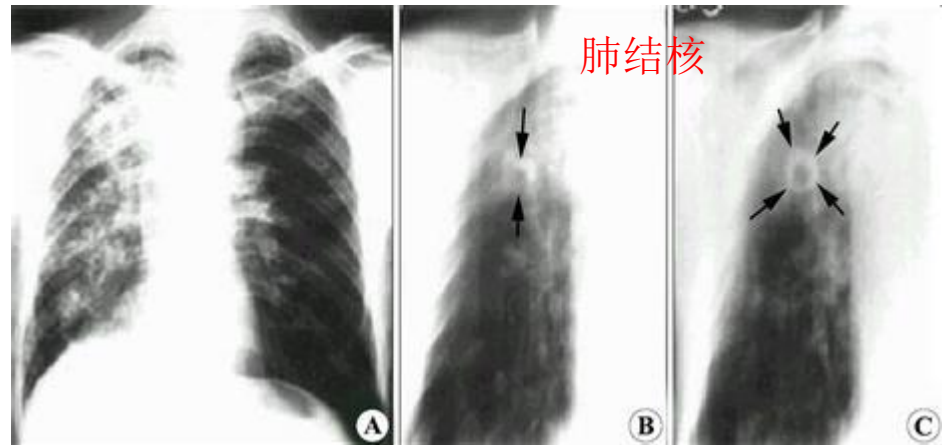
1895年11月8日，德国物理学家伦琴在研究真空管高压放电现象时发现X射线（伦琴射线），伦琴获**1901年诺贝尔物理学奖**



Wilhelm Conrad Röntgen  
(1845. 03. 27-1923. 2. 10)



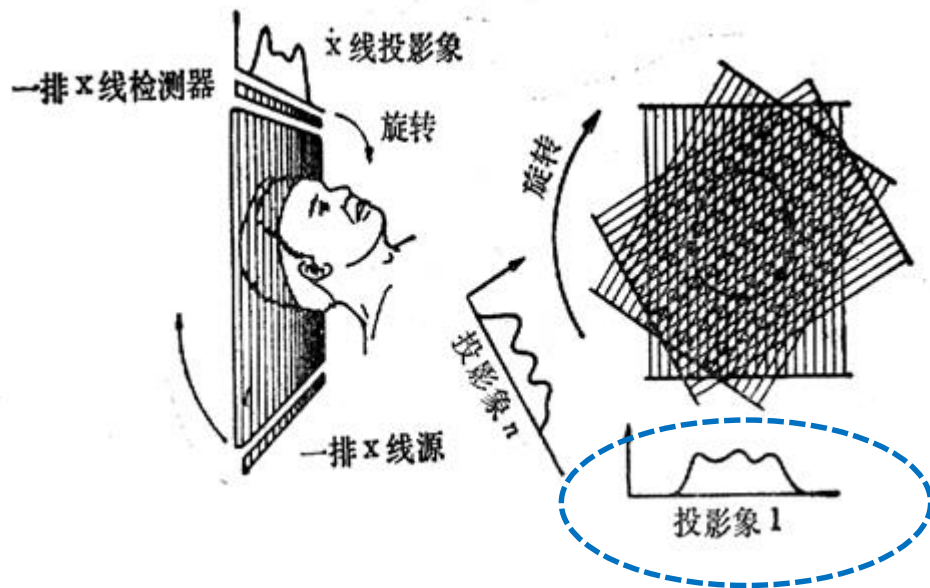
1896年伦琴首次拍摄到他妻子手的X线照片，其无名指上戴着一枚戒指





# CT (Computerized Tomography)

## CT图像的产生原理



骨头的衰减最大  
空气的衰减最小

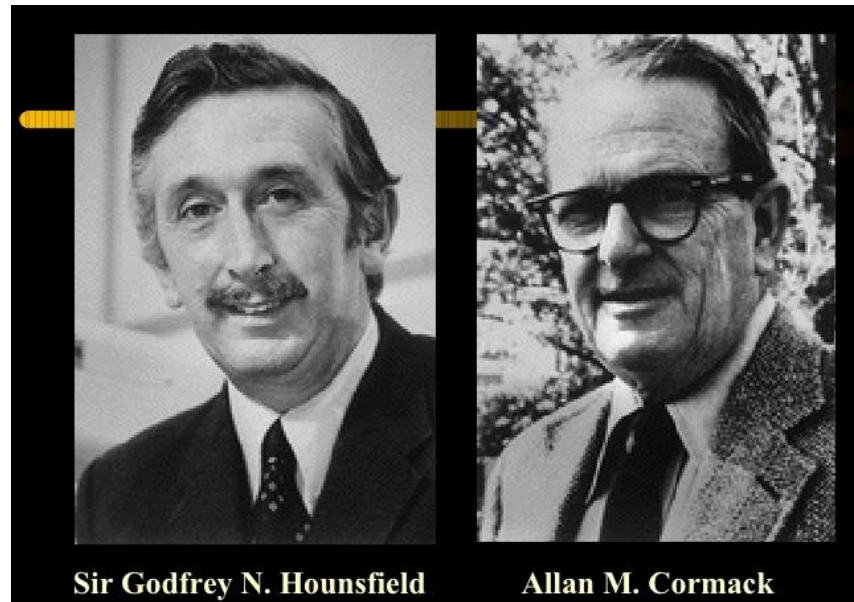
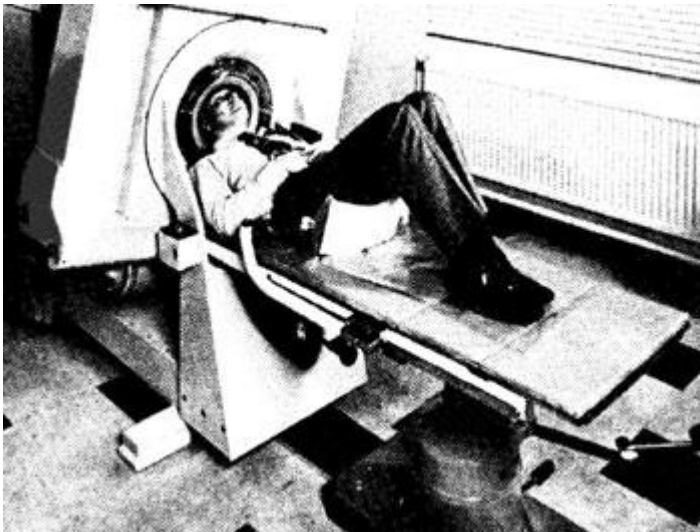
人体中不同组织对X射线的衰减作用不同，故而可得到图示的投影象。

从线性并排着的X线源发射一定强度的X线，把通过身体的X线用与X线源平行排列的X线检测器接收。然后把X线源和检测器组以体轴为中心一点一点的旋转，反复进行同样的操作。利用得到的在各个角度上的投影数据，可计算出断面图像。



# CT (Computerized Tomography)

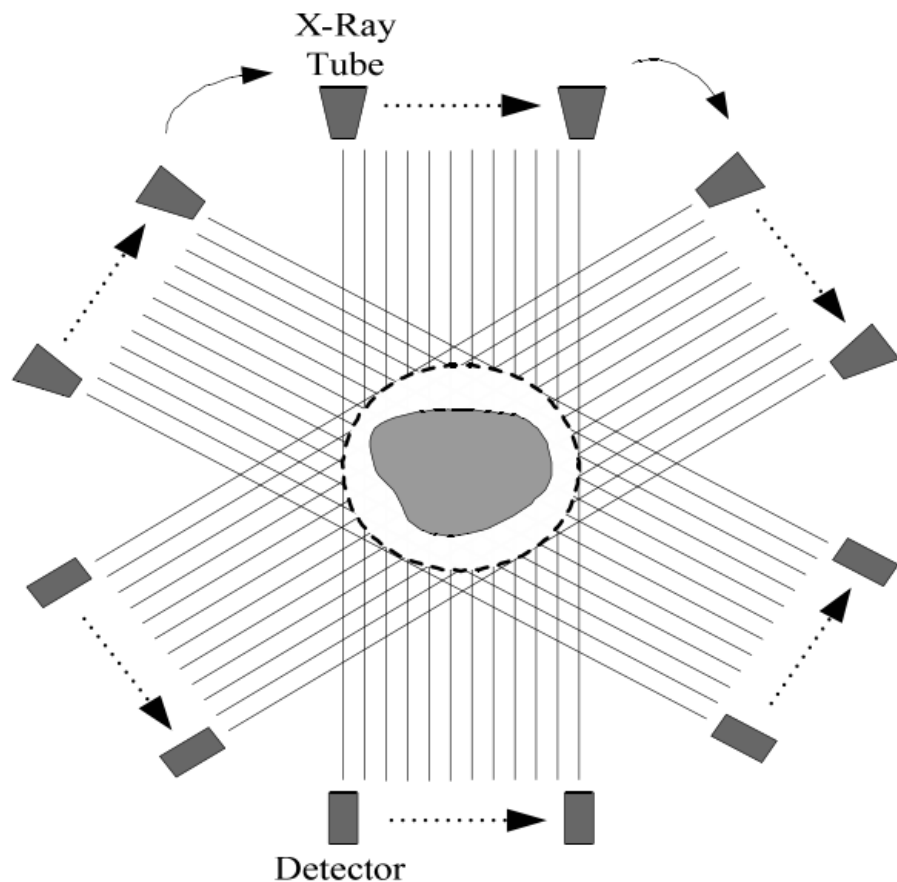
亨斯菲尔德(英国电子工程师, 1967)和科马克(美国物理学家, 1963)共同获取**1979年诺贝尔生理学或医学奖**



英国人杰弗瑞·纽波达·亨斯菲尔德(Godfrey Newbold Hounsfield)于1968年8月23日在英国申请了名称为“多角度测量X射线或 $\gamma$ 射线吸收, 透过情况和数据分析的方法和仪器”, 即首次在专利申请中揭示了CT技术。

美国物理学家阿伦·考马克(Allan Cormack) 1963年发现人体不同组织对X射线的透过率有所不同, 还提出了一些有关的计算公式, 也为后来CT的应用提供了理论依据。

# CT (Computerized Tomography) 计算机断层成像术



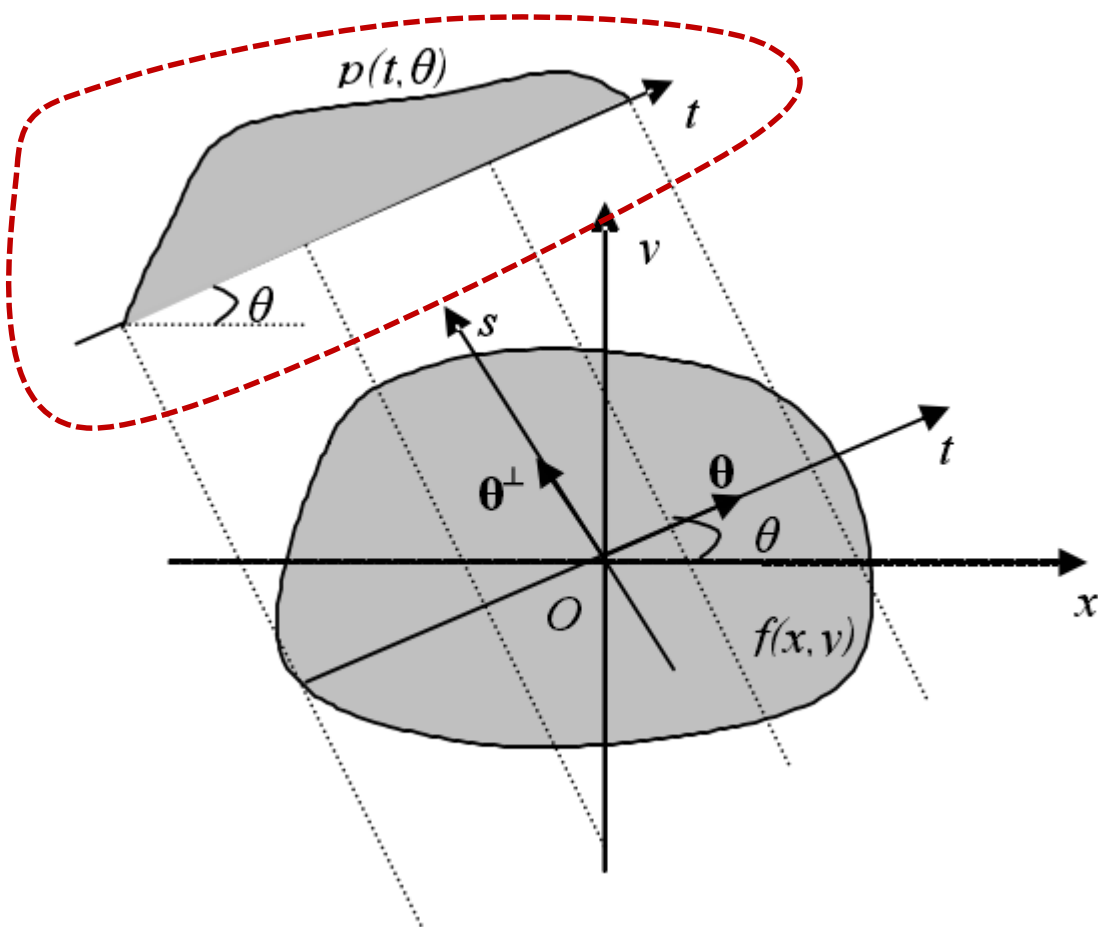
第一代 CT 扫描系统示意图

第一代 CT 系统由一个射线源和一个平移和旋转运动的探测器组成。先进行**平移扫描**，穿过被测物的数据被探测器接收，获取测量数据，完成平移扫描后，**再旋转**扫描源和探测器，再重复进行平移扫描，将获取的数据叠加到上一次的数据上。**每平移一次产生一幅视图**，多次旋转再平移射线源和探测器，获取连续视图。重复上述过程，直到旋转 **180 度**。

# CT图像的产生原理

## 各个方向的投影

第一代 CT 系统平移一次所产生的视图



- 当射线穿过物体时，入射光子被物质吸收，使得射线强度发生衰减。
- 平移一次产生一个投影视图  $p(t, \theta)$ 。
- 旋转 **180** 度，得到各个方向的投影视图。
- **CT图像重建算法**的任务就是通过各方向的**投影数据**，**还原出**某个断面上的X射线的**衰减系数分布**情况。



# 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码？
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换？

## ◆ CT图像的常识

- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建？

## ◆ 单像素相机

- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

## ◆ 光场相机



# CT图像如何重建? Image reconstruction

- ◆ 设 $f(x, y)$  为二维图像，傅立叶变换为

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

- ◆  $f(x, y)$ 对 $x$  轴的投影为  $P_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

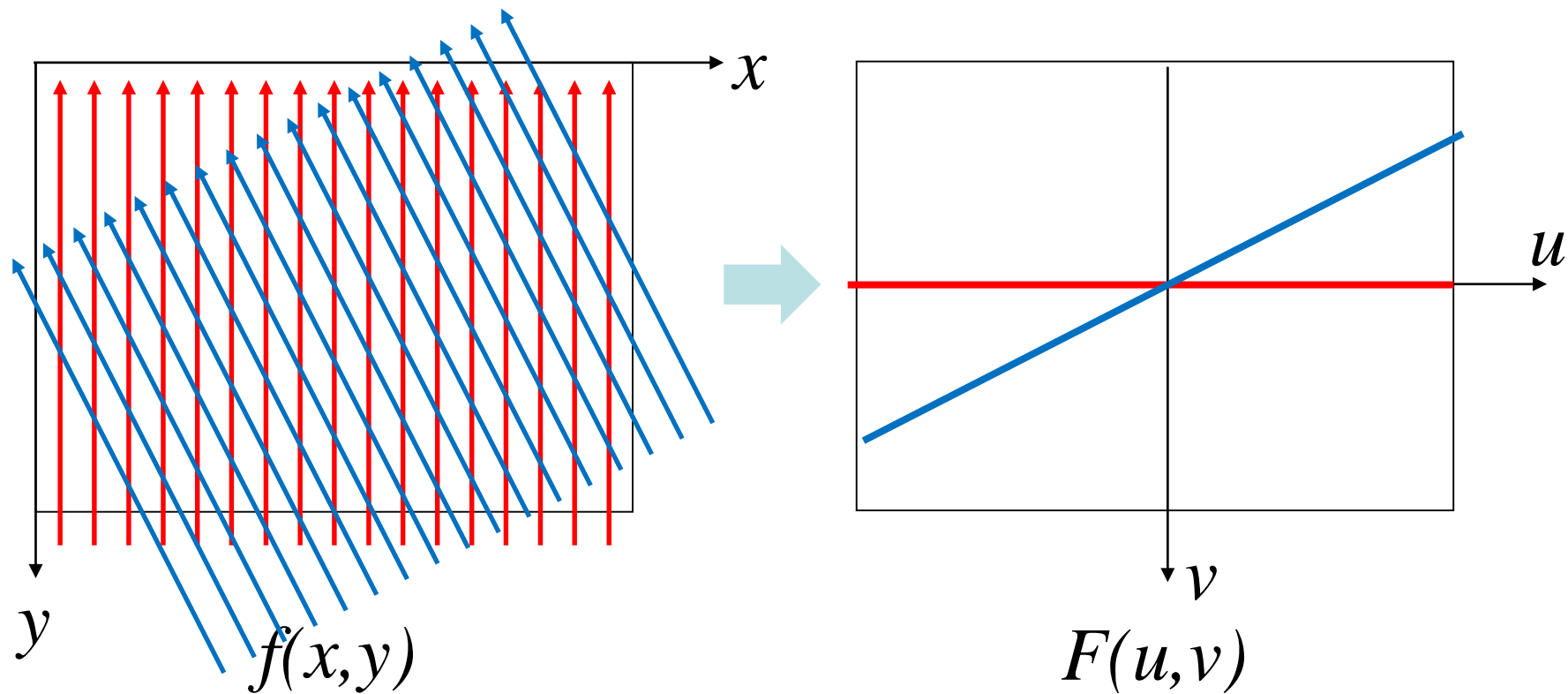
- ◆ 对其进行傅立叶变换得

$$\begin{aligned} P_y(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_y(x) e^{-j2\pi ux} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi ux} dx dy \\ &= \overline{F}(u, 0) \end{aligned}$$

二维图像的一维投影的傅立叶变换，等于二维图像傅立叶变换的中心剖面



# CT图像如何重建？ 获取各个方向的投影



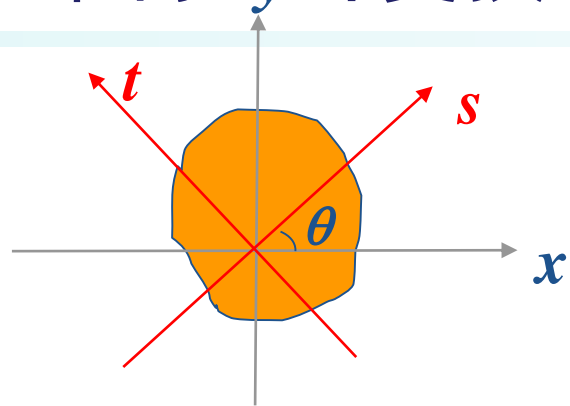


# CT图像如何重建？

## 各个方向的投影 → 图像的二维傅里叶变换

◆ 考虑旋转  $(x,y) \rightarrow (s,t)$

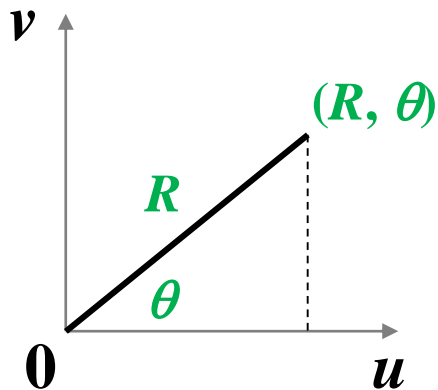
$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



◆ 相应地  $(u,v) \rightarrow (R, \theta)$

$$\begin{cases} u = R \cos\theta \\ v = R \sin\theta \end{cases}$$

二维图像  $f(x, y)$  在与  $x$  轴夹  $\theta$  角的方向  $s$  上的投影的傅立叶变换，恰好等于该图像函数之二维傅立叶变换。



$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$



$$G(R, \theta) = F(u, v)$$

$$G(R, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi R(x \cos\theta + y \sin\theta)} dx dy$$

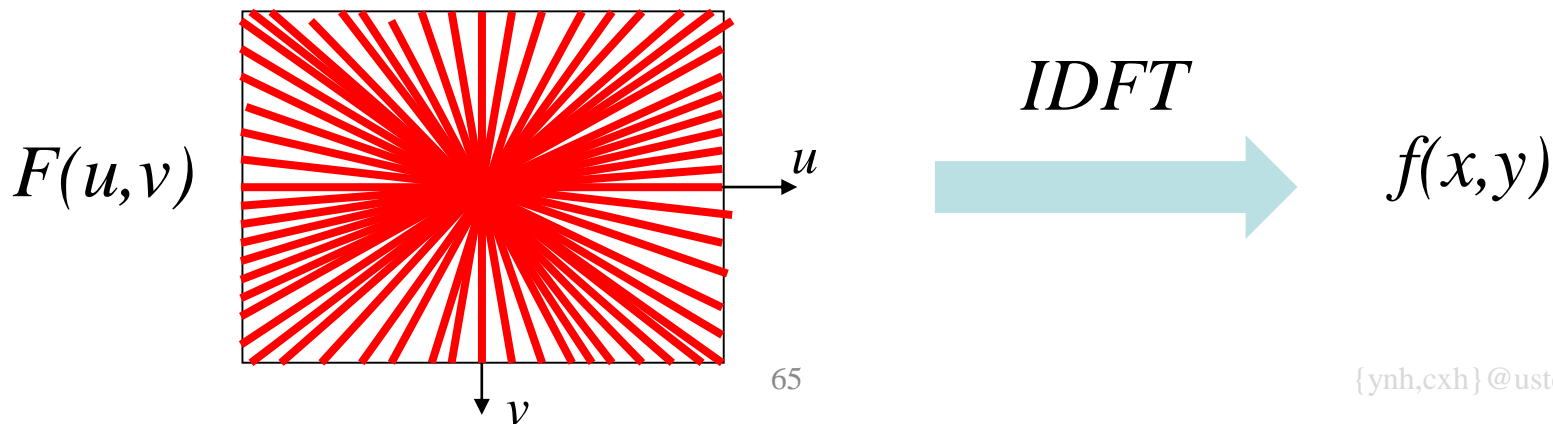
# CT图像如何重建? 反变换得到原图像

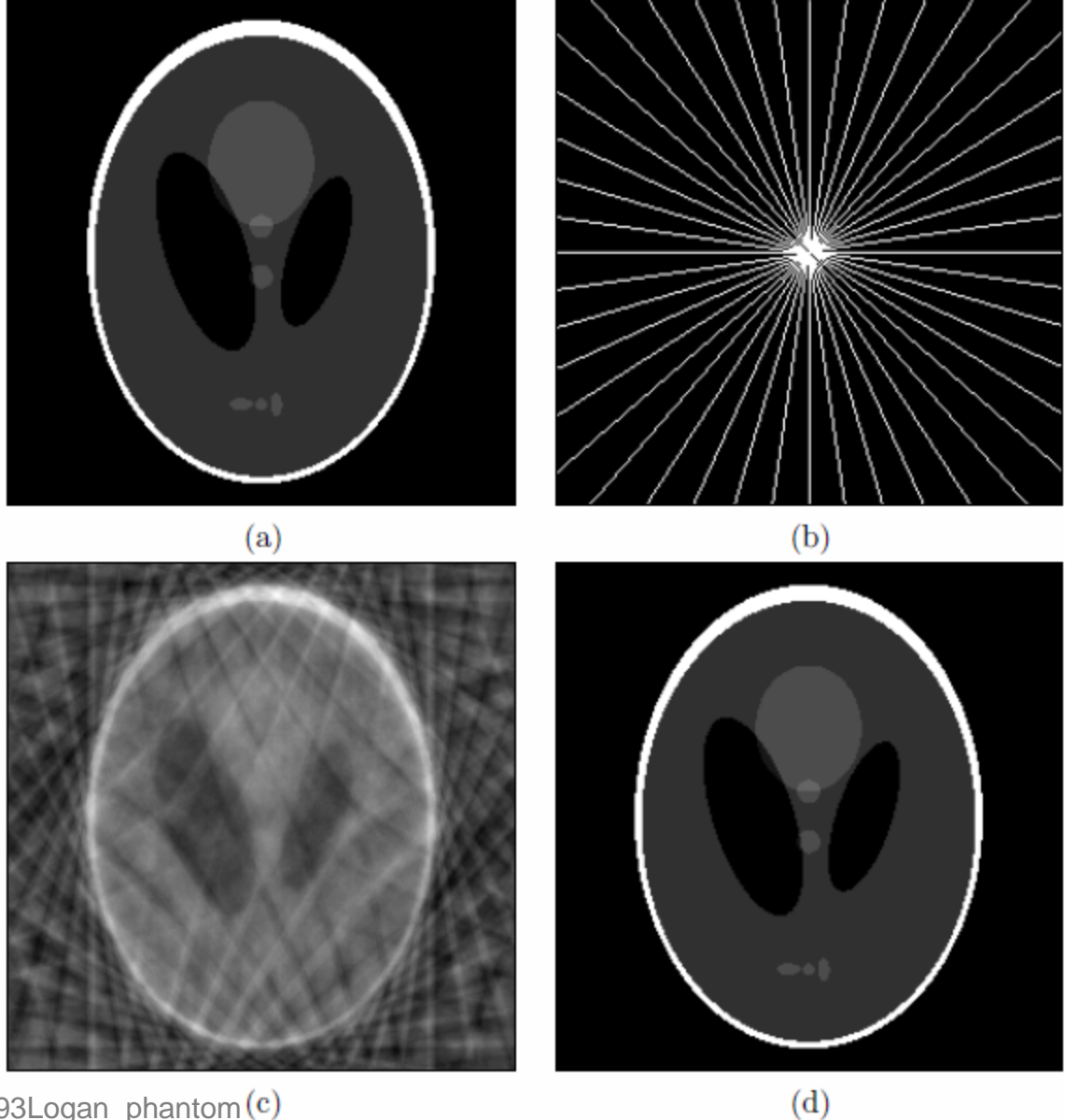
- ◆ 重建图像=对投影的傅立叶变换 $G(R, \theta)$ 施加反变换

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

- ◆ 准确地重建原图像需要足够多的射线进行投影

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G(R, \theta) e^{j2\pi R(x\cos\theta + y\sin\theta)} dR d\theta$$





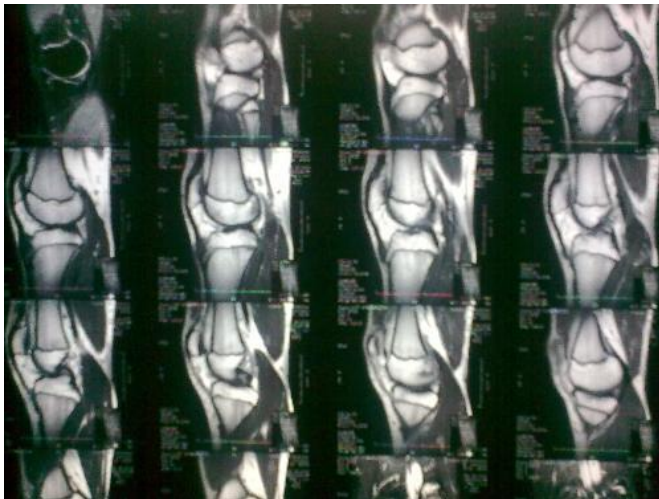
[https://en.wikipedia.org/wiki/Shepp%E2%80%93Logan\\_phantom](https://en.wikipedia.org/wiki/Shepp%E2%80%93Logan_phantom) (c)

Figure 1: Example of a simple recovery problem. (a) The Logan-Shepp phantom test image. (b) Sampling domain  $\Omega$  in the frequency plane; Fourier coefficients are sampled along 22 approximately radial lines. (c) Minimum energy reconstruction obtained by setting unobserved Fourier coefficients to zero. (d) Reconstruction obtained by minimizing the total variation, as in (1.1). The reconstruction is an exact replica of the image in (a).



# 核磁共振成像 (Nuclear Magnetic Resonance Imaging, NMRI)

MRI利用磁场与射频脉冲使人体组织内进动的氢核（即 $H^+$ ）发生章动产生射频信号，经计算机处理而成像的。原子核在进动中，吸收与原子核进动频率相同的射频脉冲，即**外加交变磁场**的频率等于拉莫频率，原子核就发生**共振吸收**，去掉射频脉冲之后，原子核磁矩又把所吸收能量中的一部分以电磁波的形式发射出来，称为**共振发射**。共振吸收和共振发射的过程叫做“核磁共振”。



# MC 核磁共振成像

第一台医用磁共振成像仪于20世纪80年代初问世，发展至今，这种技术业已挽救了全球范围内难以计数的患者的生命。



## Physiology Or Medicine In 2003



Paul C. Lauterbur  
Prize share: 1/2



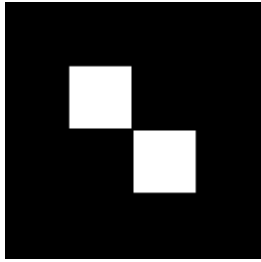
Sir Peter Mansfield  
Prize share: 1/2

2003年，伊利诺伊州香槟分校的Lauterbur与诺丁汉大学的Peter Mansfield一起分享了诺贝尔生理学或医学。

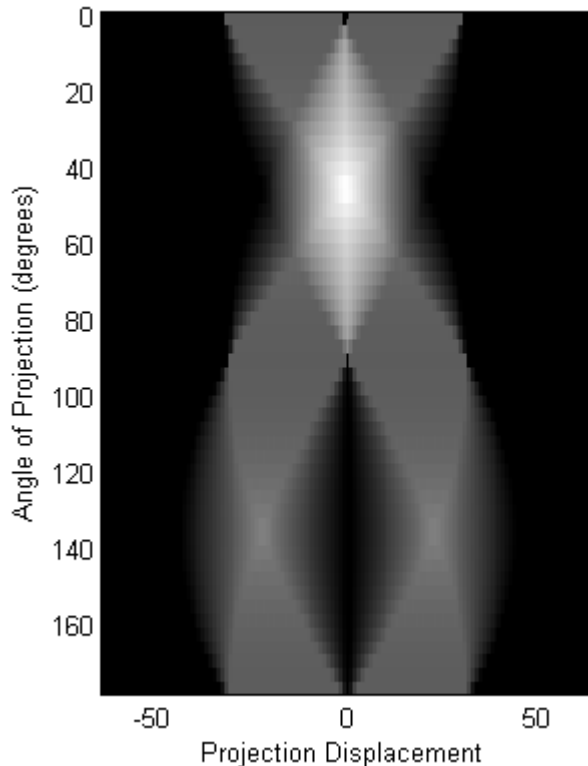


# 核磁共振成像

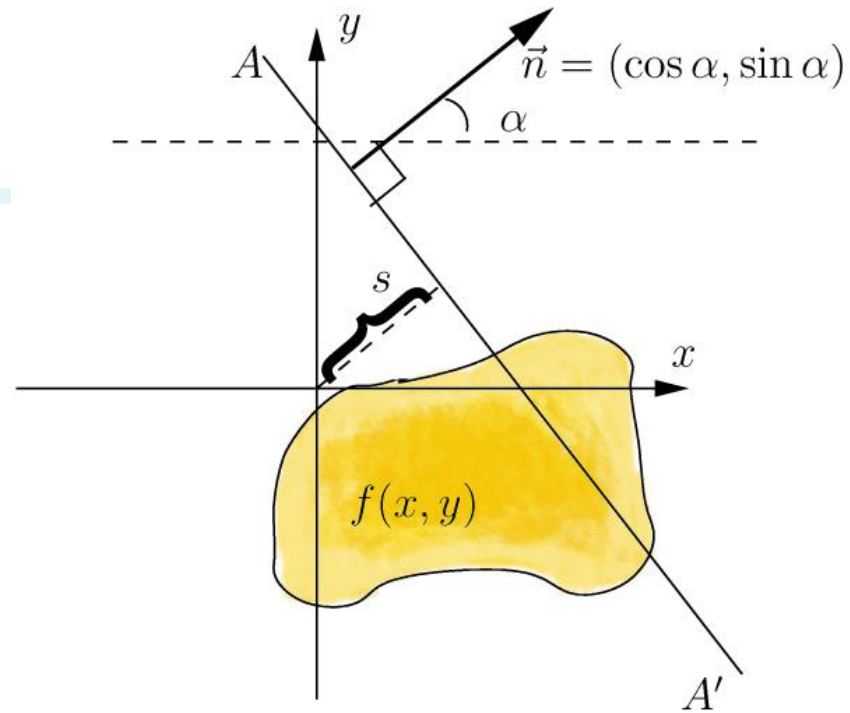
## Radon transform



Sinogram of Phantom



Review



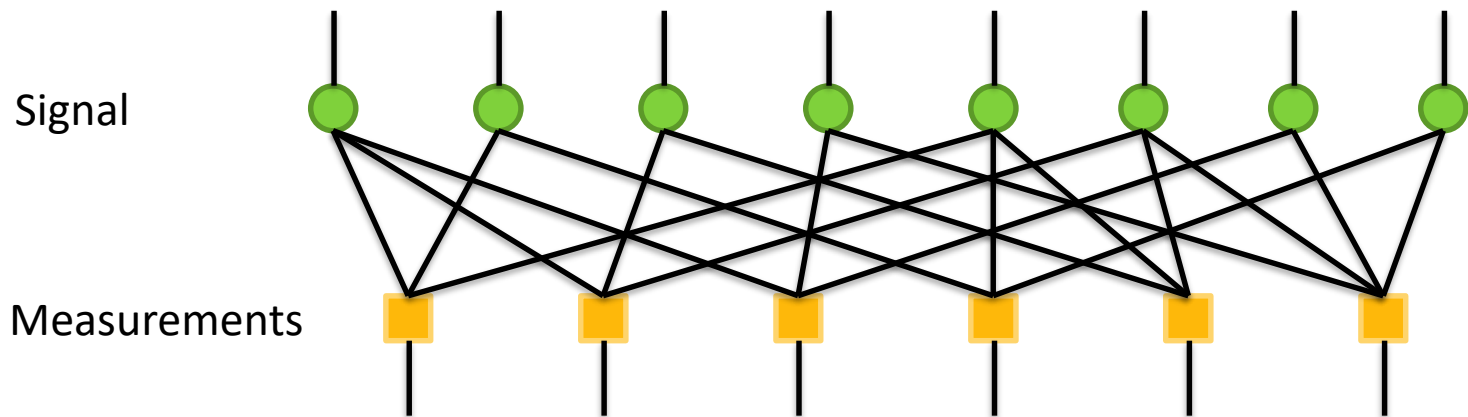
$$Rf(\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x(t), y(t)) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f((t \sin \alpha + s \cos \alpha), (-t \cos \alpha + s \sin \alpha)) dt$$

两维情况下radon变换大致可以这样理解：**一个平面内沿不同的直线**（直线与原点的距离为d，方向角为 $\alpha$ ）对 $f(x,y)$ **做线积分**，得到的像 $F(d,\alpha)$ 就是函数f的Radon变换。也就是说，平面 $(d,\alpha)$ 的每个点的像函数值对应了原始函数的某个线积分值。

# MC CT的启示?

- ◆  $N$ 个待测量，不能直接测量
- ◆ 可以获取 $N$ 个待测量的某些组合形式，得到 $M$ 个测量值
- ◆ 采用重构算法从 $M$ 个测量量中恢复出 $N$ 个待测量





# 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码？
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换？

## ◆ CT图像的常识

- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建？

## ◆ 单像素相机

- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

## ◆ 光场相机



# 单像素数码相机 single pixel camera

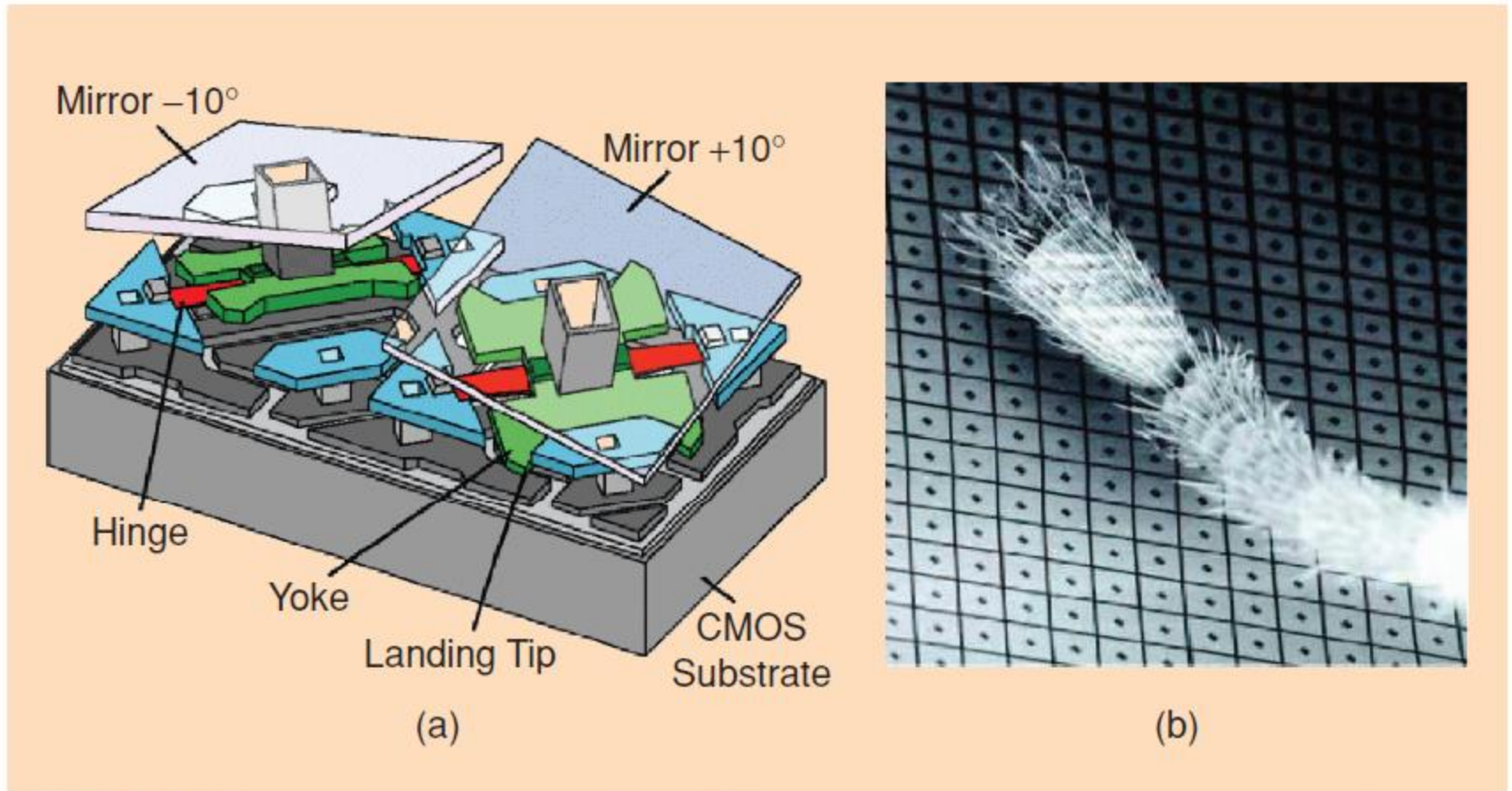
成像原理：被拍摄物体的图像经过镜头打在DMD上，而经过DMD反射的图像又经过二次镜头聚焦在只有一个像素的传感器上，形成一个光信号。而在拍摄过程中，DMD上每个镜片反射的明暗矩阵以**伪随机码**的形式快速变换，每变化一次形成一个像素的信号。最后，经过将每次的信号和伪随机码综合进行计算，就得到了物体的影像。

相机的关键部件是由德州仪器生产的**DMD (digital micromirror device)** 数字微镜芯片，这款芯片主要用在数字背投或是投影机中。DMD芯片由大量只有细菌大小的镜片组成，每块微型镜片都一面反光，一面不反光，并可以快速翻转。





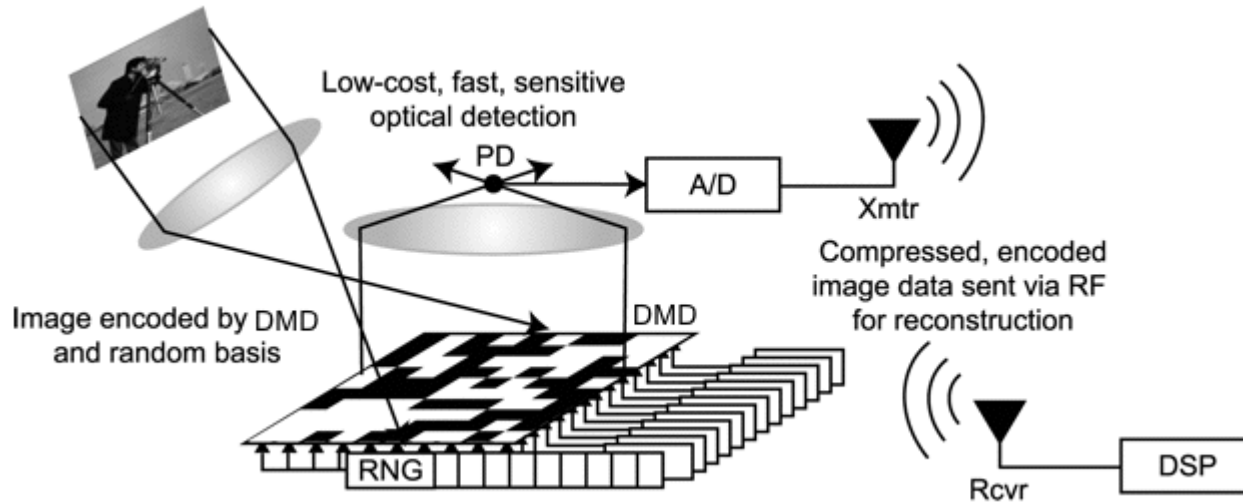
# DMD (digital micromirror device)



**[FIG6] (a) Schematic of two mirrors from a Texas Instruments digital micromirror device (DMD). (b) A portion of an actual DMD array with an ant leg for scale. (Image provided by DLP Products, Texas Instruments.)**



# DMD生成伪随机码形式的矩阵



成像原理：被拍摄物体的图像经过镜头打在DMD上，而经过DMD反射的图像又经过二次镜头聚焦在只有一个像素的传感器上，形成一个光信号。在拍摄过程中，DMD上每个镜片反射的明暗矩阵以伪随机码的形式变换，每变化一次形成一个像素的信号。最后，经过将每次的信号和伪随机码综合进行计算，就得到了物体的影像。





# 艺术摄影

## 多次曝光记录下物体移动的信息

思考：原本需要视频才能展现的信息，通过多次曝光可以记录到一张照片上？



© Manuel Cafini 2010

图片 <http://www.tvcm.cn/html/photo/20120615/16527.html>



# 管中窥豹略见一斑

单像素照相机每次曝光相当于透过特殊模式的滤镜看到部分的图像，所看到的像素的累加值被记录下来。曝光几次就记录多少个累加值。

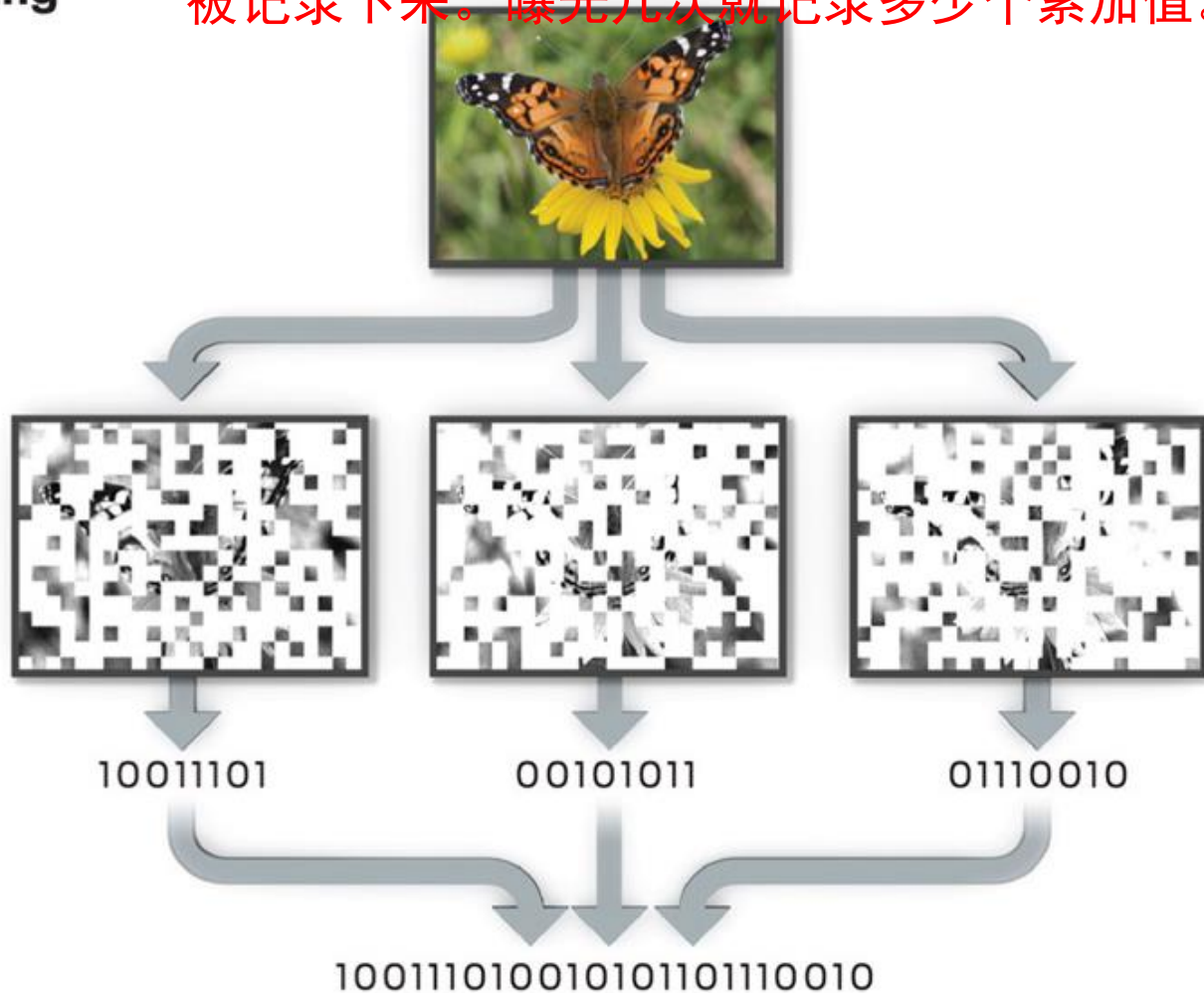
## Compressed Sensing

1. An image can be sensed and compressed at the same time.

2. The trick is to sum the analog voltages of randomly chosen sets of pixels. You need many such sets, but far fewer than the number of pixels.

3. Only the sums are digitized.

4. These digitized values constitute the compressed image. Significant computation is needed to decompress it.





# 单像素相机成像效果示意

## 简单的二值图像

Measurement的次数  
即曝光的次数



Original



16384 Pixels  
1600 Measurements  
(10%)



16384 Pixels  
3300 Measurements  
(20%)



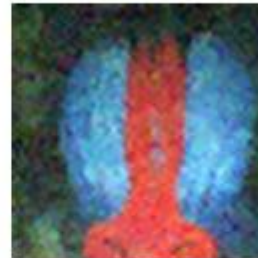
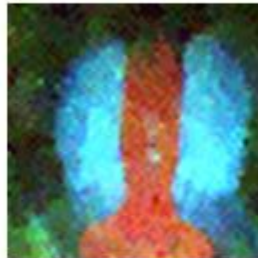
65536 Pixels  
1300 Measurements  
(2%)



65536 Pixels  
3300 Measurements  
(5%)



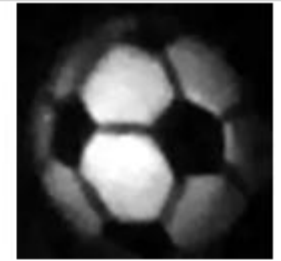
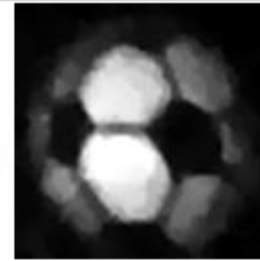
# 单像素相机成像效果示意 彩色图像



<b>Original</b>	<b>4096 Pixels</b> <b>800 Measurements</b> <b>(20%)</b>	<b>4096 Pixels</b> <b>1600 Measurements</b> <b>(40%)</b>	<b>65536 Pixels</b> <b>6600 Measurements</b> <b>(10%)</b>
-----------------	---	--	---



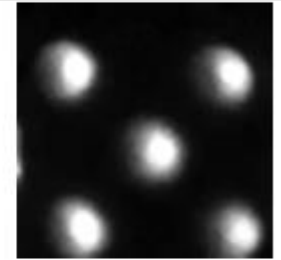
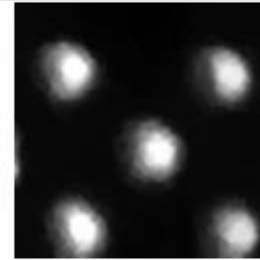
# 单像素相机 成像效果示意



Original  
Object

4096 Pixels  
800 Measurements  
(20%)

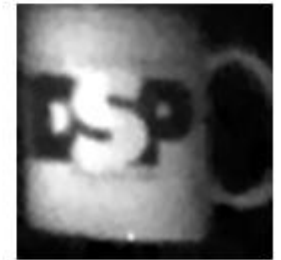
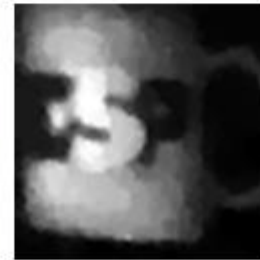
4096 Pixels  
1600 Measurements  
(40%)



Original  
Object

4096 Pixels  
800 Measurements  
(20%)

4096 Pixels  
1600 Measurements  
(40%)



Original  
Object

4096 Pixels  
800 Measurements  
(20%)

4096 Pixels  
1600 Measurements  
(40%)



# 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码?
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换?

## ◆ CT图像的常识

- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建?

## ◆ 单像素相机

- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

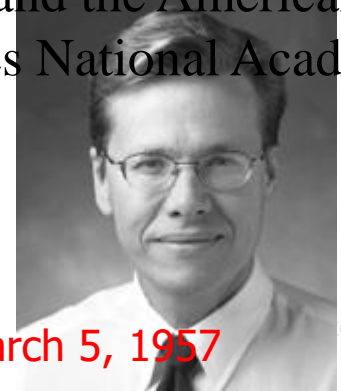
2006年Candes, Tao, Donoho等人正式提出压缩感知  
(Compressed Sensing, CS)理论

## ◆ 光场相机

# MC David Donoho

**Donoho** did his undergraduate studies at **Princeton University**, graduating in 1978. He obtained his Ph.D. from **Harvard University** in 1983. He was on the faculty of the **University of California, Berkeley** from 1984 to 1990 before moving to Stanford.

In 1991, Donoho was named a MacArthur Fellow. He was elected a Fellow of the American Academy of Arts and Sciences in 1992. He was the winner of the COPSS Presidents' Award in 1994. In 2001, he won the John von Neumann Prize of the Society for Industrial and Applied Mathematics. In 2002, he was appointed to the Bass professorship. He was elected a SIAM Fellow and a foreign associate of the French Académie des sciences in 2009, and in the same year received an honorary doctorate from the University of Chicago.[1] In 2010 he won the Norbert Wiener Prize in Applied Mathematics, given jointly by SIAM and the American Mathematical Society. He is also a member of the United States National Academy of Science.



born on March 5, 1957

c.edu.cn

[http://en.wikipedia.org/wiki/David\\_Donoho](http://en.wikipedia.org/wiki/David_Donoho)

<http://www-stat.stanford.edu/~donoho/>



# Emmanuel Candès

**Candès'** early research concerned nonlinear approximation theory. In his Ph.D. thesis, he developed generalizations of wavelets called **curvelets** and **ridgelets** that were able to capture higher order structures in signals. This work has had significant impact in image processing and multiscale analysis, and earned him the Popov prize in approximation theory in 2001.

In 2004, Candès wrote a paper with Terence Tao that kicked off the field of **compressed sensing**: the recovery of sparse signals from a few carefully constructed, and seemingly random measurements.

Emmanuel Jean Candès is a professor of mathematics and statistics at [Stanford University](http://www-stat.stanford.edu/~candes/).





# Terence Tao

[http://en.wikipedia.org/wiki/Terence\\_Tao](http://en.wikipedia.org/wiki/Terence_Tao)  
<http://www.math.ucla.edu/~tao/>

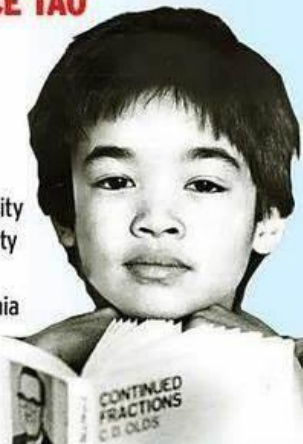
◆ Terence "Terry" Chi-Shen Tao FRS (simplified Chinese: 陶哲轩; traditional Chinese: 陶哲軒) (born 17 July 1975, Adelaide), is an Australian born American mathematician working in harmonic analysis, partial differential equations, combinatorics, and analytic number theory. He currently holds the James and Carol Collins chair in mathematics at the **University of California, Los Angeles**.

20岁获得普林斯顿大学博士学位，24岁被洛杉矶加州大学聘为正教授。



## LIFE AND TIMES OF TERENCE TAO

- **Age 7:** Begins high school
- **9:** Begins university
- **10,11,12:** Competes in the International Mathematical Olympiads winning bronze, silver and gold medals
- **16:** Honours degree from Flinders University
- **17:** Masters degree from Flinders University
- **21:** PhD from Princeton University
- **24:** Professorship at University of California in Los Angeles
- **31:** Fields Medal, the mathematical equivalent of a Nobel prize





# Fields Medals Award 2006

## Okounkov, Perelman, Tao and Werner

<https://plus.maths.org/content/fields-medals-2006>

<https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal>

Grigory Perelman [俄]



证明 Poincaré 猜想

Andrei Okounkov [俄]



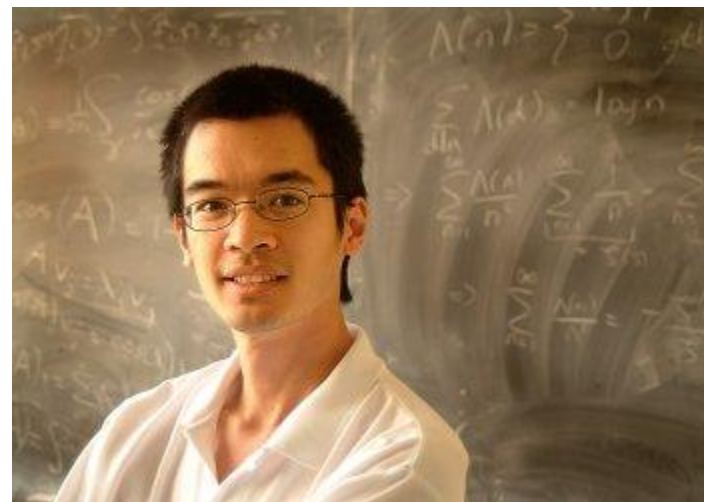
将概率论、表示论和代数几何联系起来

Wendelin Werner [法]



概率论，尤其是自回避随机游走和平面布朗运动。1999年与他人合作证明平面布朗运动的包络的豪斯多夫维数为 $4/3$ 。

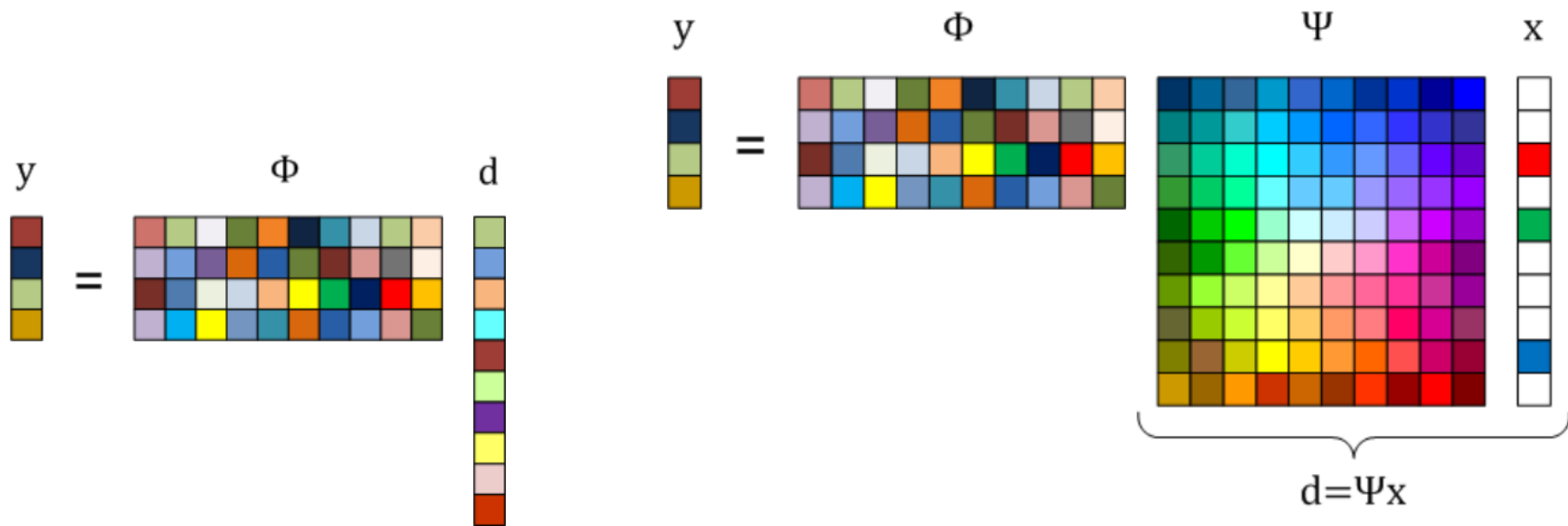
Terence Tao





# 压缩感知理论 Compressive Sensing

## CS Sampling



**$d$ :  $N$ 维待测信号**

观测矩阵  $\Phi: M \times N (M \ll N)$

$y$  是对待测信号  $d$  执行的一个 **压缩** 观测  
( $M$  个线性观测)

恢复的条件和方法

**$d = \Psi x$**

$\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N}$  为正交基字典矩阵,  $x$  为展开系数。系数向量  $x$  是  $K$ -稀疏时, 即其中非零系数的个数  $K \ll N$ , 可根据  $y = \Phi \Psi x$  解出  $x$ , 从而利用  $d = \Psi x$  重构待测信号  $d$

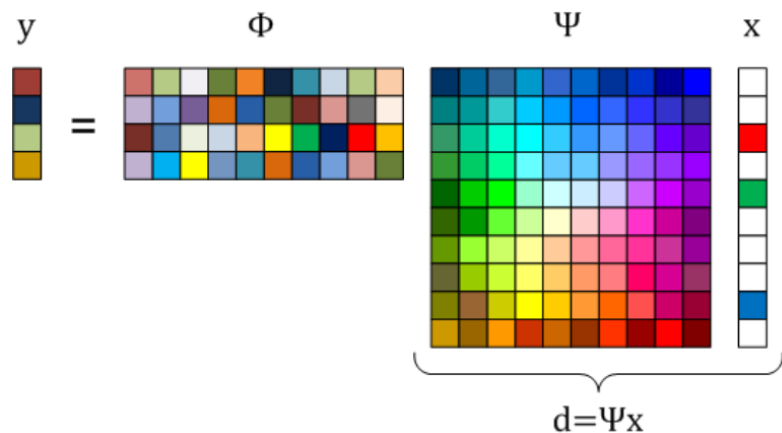
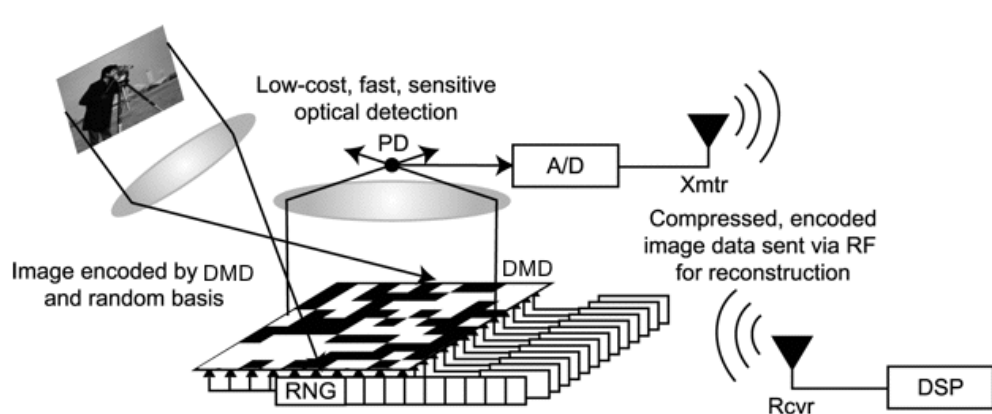


# 压缩感知的关键要素

- ◆ **信号的稀疏性**是压缩感知理论的一个重要**前提**，并且直接影响着信号感知的效率。在满足重构条件时，通过选择合适的观测方式和重建算法，**仅需要 $K+1$ 次观测就可将 $N$ 维空间的 $K$ -稀疏信号精确地重建**。2007年Candès也指出，对于随机高斯和随机 $\pm 1$ 的Rademacher观测矩阵， $O(K \times \log(N/K))$ 的采样就能将 $N$ 维信号的 $K$ 个最大值以较高的概率稳定重建。
- ◆ 压缩感知的**关键**是**观测矩阵的构造**。作为感知的前端，观测系统要求物理上容易实现，并且与表示系统所形成的CS信息算子矩阵 $A^{CS} = \Phi\Psi$ 具有较小的RIC (Restricted Isometry Constant)。
- ◆ 非线性优化是CS **重建信号**的**手段**，也是从低分辨观测中恢复出高分辨信号所必须付出的软件代价。Candès和Donoho提出的 $l_1$ 范数下的凸化压缩感知恢复是一个里程碑式的工作。

# MC 小结：压缩感知

◆ 压缩感知(Compressive Sensing, CS)理论指出了一条将模拟信号“经济地”转化为数字形式的压缩信号的有效途径：利用变换空间描述信号，通过直接采集得到**少数“精挑细选”的线性观测数据**(这些数据是包含了信号全部信息的压缩数据)，将信号的采样转变成信息的采样，通过解一个优化问题就可以从压缩观测的数据中恢复原始信号。





# 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码？
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换？

## ◆ CT图像的常识

- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建？

## ◆ 单像素相机

- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

## ◆ 光场相机

- 拍照无须对焦
- 3D成像



# 照相机非得在拍照之前对焦吗？

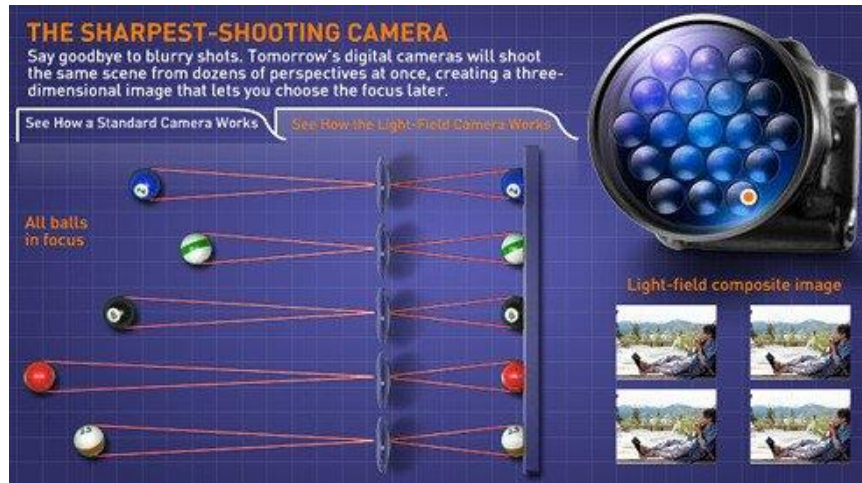
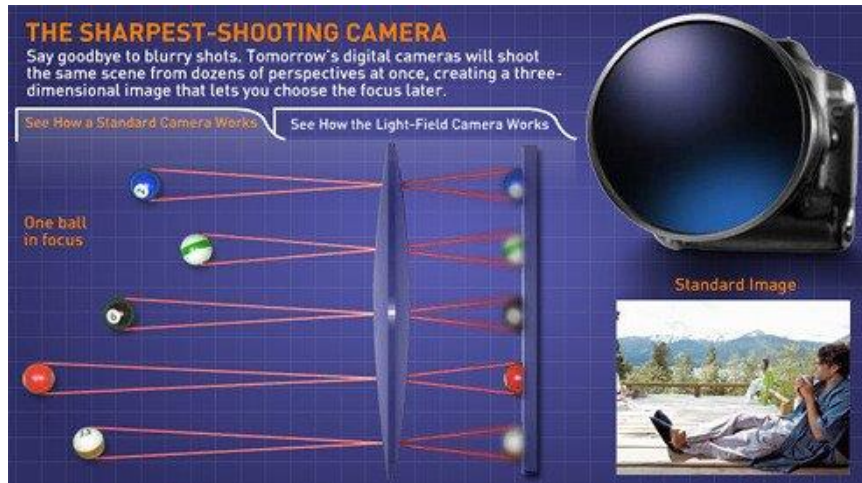
2006年，Lytro公司创始人及CEO **Ren Ng**(**吴义仁**)在斯坦福大学读博士，研究虚拟物体照明。但他想做一些更具实际影响力的研究，因此推迟了完成学位，开始钻研更好的照相机设计。起初他并不确定该从何处下手，直到有一天，他失望地看着自己刚拍摄的一张对焦不准的照片时，灵感产生了。他回忆道：“我想，‘照相机非得在拍照之前对焦吗？’”。他有一种强烈的直觉答案应该是否定的，于是立刻着手去证实它。





# 照相机非得在拍照之前对焦吗？

Adobe在2007年展示了名为“Magic Lens”的光场相机原型产品，2010年9月又公布了Magic Lens的软件开发进程和未来计划。但在这之后，Magic Lens便再也没有任何公开消息。“Magic Lens”是以19个透镜组成镜头阵列，拍摄一次会获得19个不同对焦距的照片，再经过Adobe软体在19张照片之间以图像无缝连接，做成3维的模拟照片，并可切换不同对焦点。







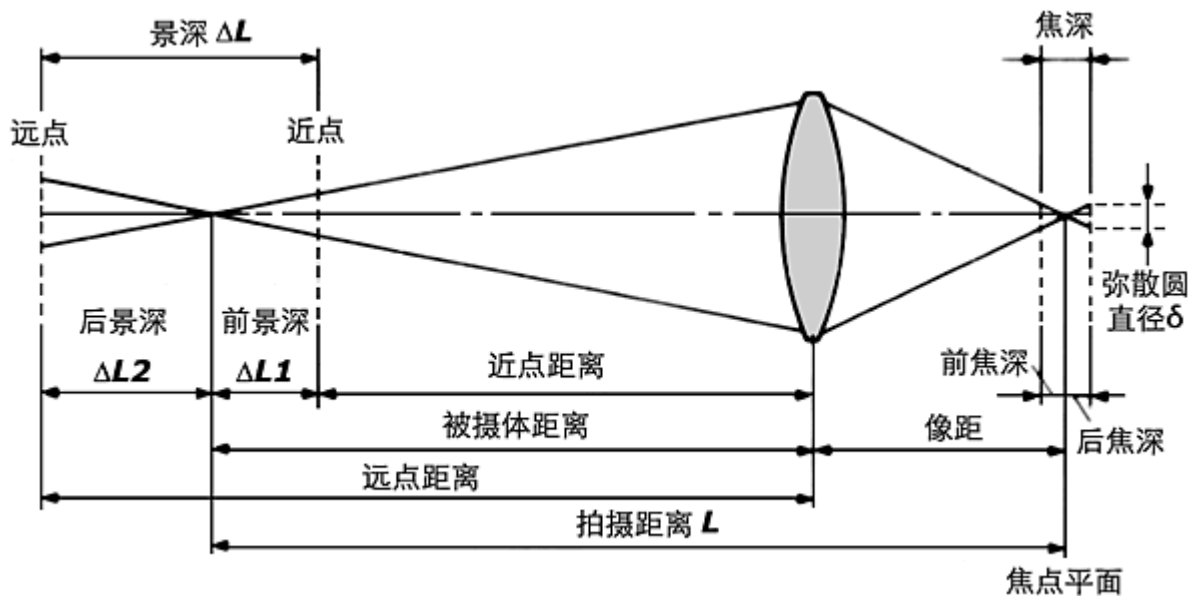
# 照相机非得在拍照之前对焦吗？

## 景深

在焦点前后，光线开始聚集和扩散，点的影象变成模糊的，形成一个扩大的圆，这个圆就叫做弥散圆。如果弥散圆的直径小于人眼的鉴别能力，在一定范围内实际影象产生的模糊是不能辨认的。这个不能辨认的弥散圆就称为容许弥散圆。

F2.8	F8	F32
<p><b>几乎没有景深：</b>如果你想把前景和背景明显地分离开来，例如在拍摄人像时，就需要这样的大光圈。</p> 	<p><b>中景深：</b>为了能让画面中所选择的部分清晰地记录下来，使用中档光圈是安全之举，例如在拍摄集体照片时就该如此。</p> 	<p><b>大景深：</b>小的光圈孔径虽然会让影像传感器的进光量很少，但如果想在照片中清晰地表现出画面中所有的物体，这是最佳选择。</p> 

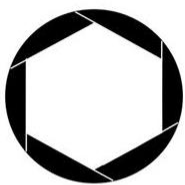
在焦点前后各有一个容许弥散圆，这两个弥散圆之间的距离就叫**景深**，即：在被摄主体(对焦点)前后，其影像仍然有一段清晰范围的，就是景深。



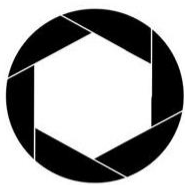


# 照相机非得在拍照之前对焦吗？ 景深与光圈

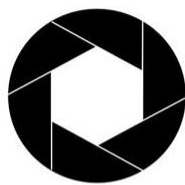
f/1.4



f/2



f/2.8



f/4

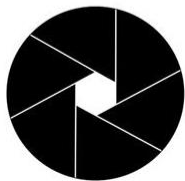


光圈系数=镜头焦距/通光孔直径

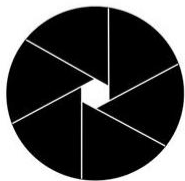
f/5.6



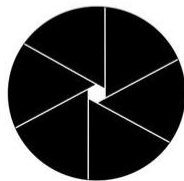
f/8



f/11



f/16



根据小孔成像原理，同样焦距下，孔径(光圈)越小，焦点所在平面以外的成像越清晰，孔径(光圈)越大，焦点所在平面以外的成像越模糊。

F1.2



F2.8



F4



F5.6



F8



# MC Light Field Camera

Lytro是世界首款消费型光场相机(Light Field Camera), 在2011年年初经过技术展示后, 便受到了无论是摄影界还是相机产业的高度关注。这款相机提出了一个全新的拍摄方式——**先拍摄后对焦**。2012年10月10日, Lytro光场相机正式上市(399美元)。



2014年7月——初代相机推出一年多后——Lytro终于推出了第二代产品: Lytro Illum (1599美元)。针对前代产品出现的画质问题, Lytro Illum采用4000万像素镜头和f/2.0大光圈来提升照片质量, 同时还配备大量实体按键来改善相机的易用性。

# MC 初代Lytro光场相机

初代Lytro光场相机采用柱形外观，一端是镜头，一端是屏幕

2011年6月，Lytro宣布获得来自格雷洛克合伙人、安德森-霍洛维茨和恩颐投资的5000万美元A轮投资，随后推出第一款产品——一台一端为1.52英寸触摸屏，另一端为镜头的光场相机。

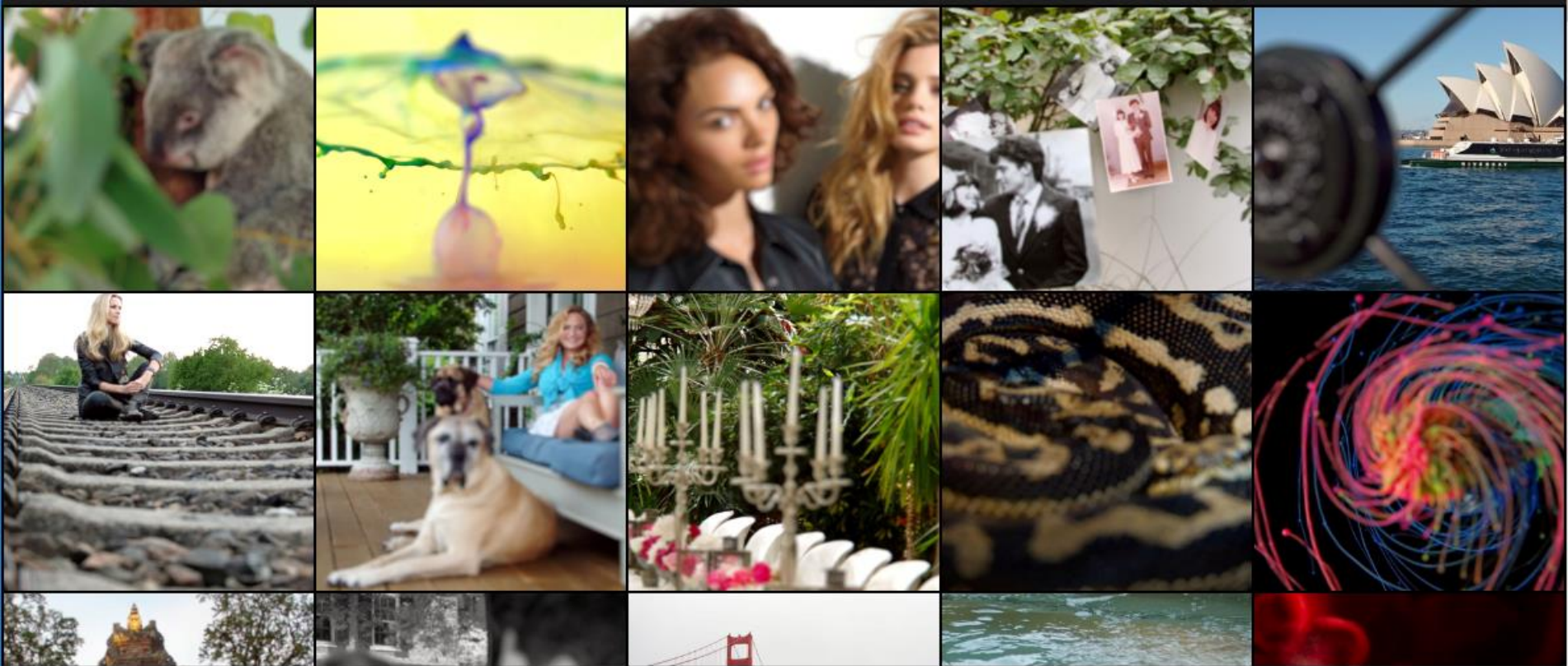


Lytro是一家位于硅谷的科技公司，由斯坦福大学博士吴义仁（Ren Ng）等人在2006年创立。它的核心业务是销售一种能进行“光场摄影”的独特相机。所谓“光场”，指的是空间内所有任意方向光线的总和。它不仅包括颜色、光强等信息，同时还涵盖光线的方向信息。“光场摄影”能够完整地记录光场信息，因此拍照后可以任意地调整照片焦点，实现“先拍照后对焦”的效果。

# 欢迎来到 LYTRO 动态图库

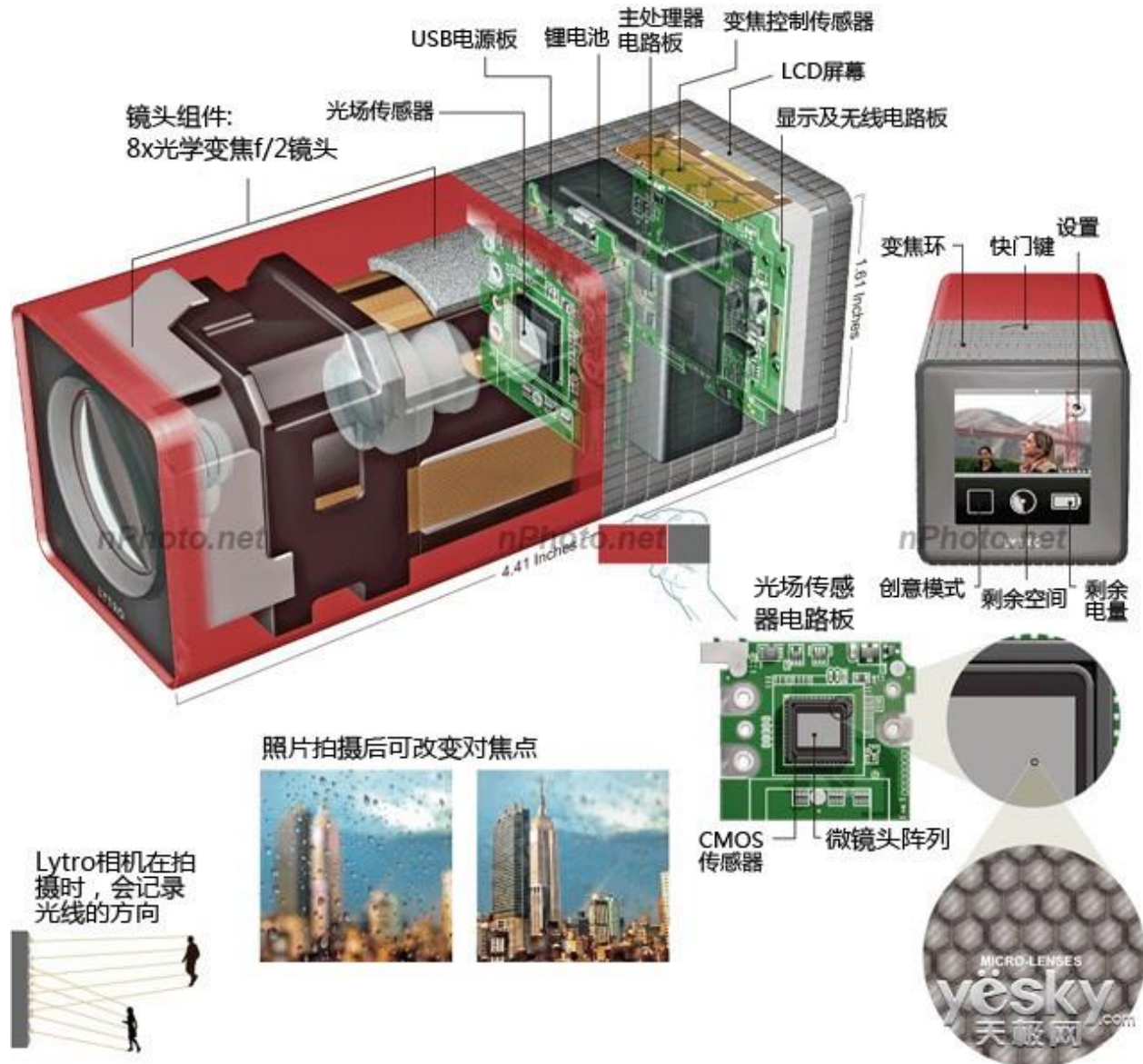
将鼠标悬停于网格上方，即可预览动态照片 / 点按照片，打开大图。在大图中：  
点按可重新对焦 / 按住并拖动可进行视角转换 / 点按播放可查看动态的幻灯片展示。

⚠ 2017年11月30日，pictures.lytro.com将停产。了解更多在support.lytro.com。



# MC 加微透镜阵列

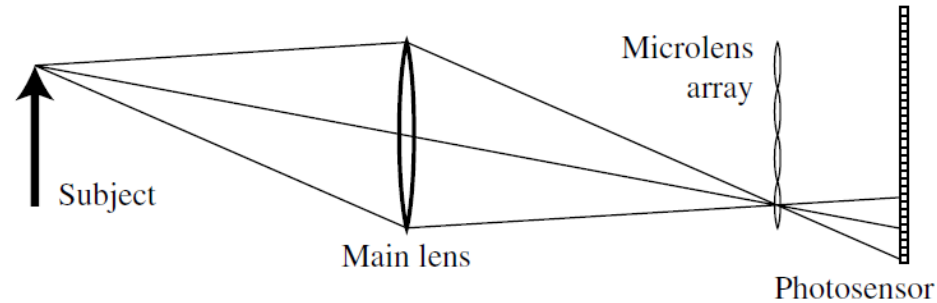
光场相机原理：通过在普通相机镜头(主镜头)焦距处加**微透镜阵列**实现记录光线，再通过后期算法(傅里叶切片定理，光场成像算法)数字变焦。



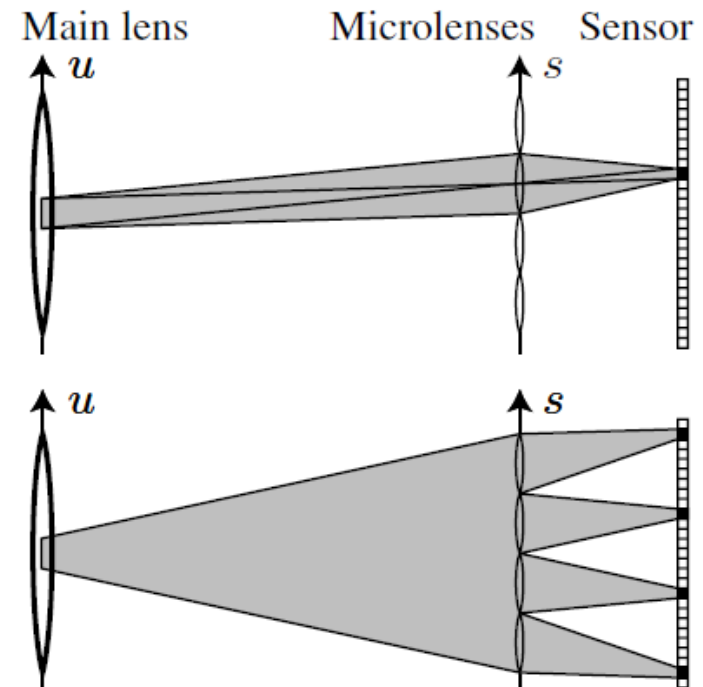


# LF记录经过微透镜阵列后的光信息

**Figure 1:** Conceptual schematic of our camera, which is composed of a main lens, microlens array and a photosensor. The main lens focuses the subject onto the microlens array. The microlens array separates the converging rays into an image on the photosensor behind it.



**Figure 3:** *Top:* All the light that passes through a pixel passes through its parent microlens and through its conjugate square (sub-aperture) on the main lens. *Bottom:* All rays passing through the sub-aperture are focused through corresponding pixels under different microlenses.





# 改造传统相机，约9万个微透镜单元

Our digital back is a Megavision FB4040. The image sensor that it contains is a Kodak KAF-16802CE color sensor, which has approximately  $4000 \times 4000$  pixels that are 9 microns wide. Our microlens array was made by Adaptive Optics Associates (part 0125-0.5-S). It has **296  $\times$  296 lenslets** that are 125 microns wide, square shaped, and square packed with very close to 100% fill-factor. The focal length of the microlenses is 500 microns, so their f-number is f/4. For the body of our camera we chose a Contax 645, and used two lenses: a 140 mm f/2.8 and 80 mm f/2.0. We chose lenses with wide maximum apertures so that, even with extension tubes attached for macrophotography, we could achieve an f/4 imageside f-number to match the f-number of the microlenses.

## 事实上就是初代Lytro光场相机的技术指标



Figure 9: Our light field camera in use.

Light Field Photography with a Hand-held Plenoptic Camera  
Ren Ng etc.

Stanford Tech Report CTSR 2005-02

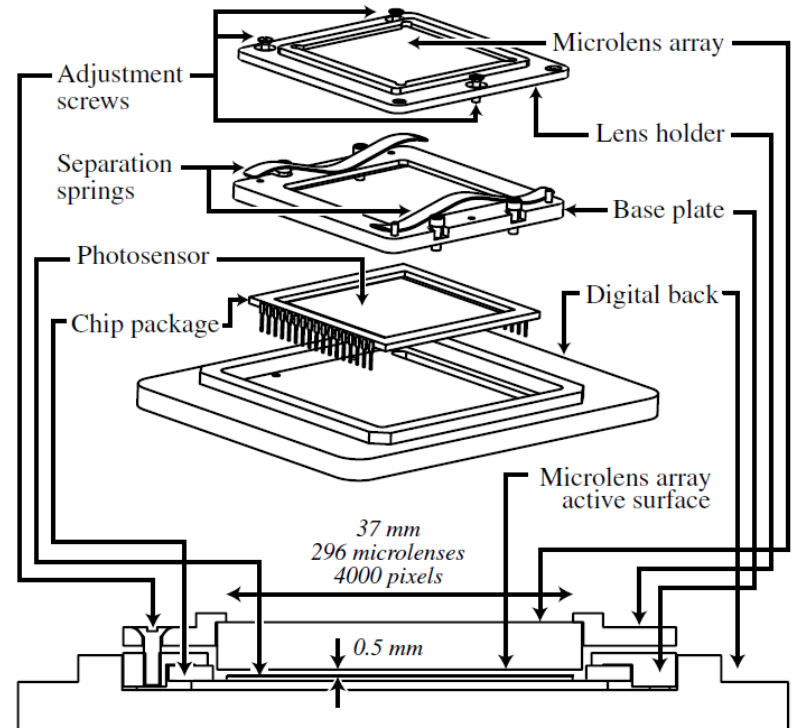


Figure 8: Top: Exploded view of assembly for attaching the microlens array to the digital back. Bottom: Cross-section through assembled parts.

# MC LF相机效果

**Figure 14:** Refocusing after a single exposure of the light field camera. The images are photographs refocused at different depths: middle row is focused on first and second figures; last row is focused on third and last figures. Compare especially middle left and bottom right for full effective depth of field.



# MC 逝去的Lytro

2018年3月27日，Lytro 官方博客发布消息：“能够为电影和VR 技术做出贡献，让我们倍感荣幸，但从今日起，Lytro 将不再进行新产品的开发或提供专业的服务，因为我们准备结束公司的运营了。”

VR camera maker Lytro is shutting down, former employees are going to Google  
<https://www.theverge.com/2018/3/27/17166038/lytro-light-field-camera-company-shuts-down-google-hiring>

Google acquires some Lytro folks as the company shutter

<https://www.cnet.com/news/google-may-acquire-light-field-tech-company-lytro-for-vr-ar/>

在影像产品中，光场相机绝对属于一个划时代的概念产品，改变了拍照的操作顺序，甚至可以改变摄影界一直以来的理论。即使是放在所有数码产品当中，它也是很具创新精神的。然而即便是这样，市场证明了它是一款失败的产品，和很多稍瞬即逝的产品一样成为了历史。



# 从变换编码到单像素相机

## ◆ 漫谈变换编码

- 为什么不在时域编码而用变换编码？
- 傅里叶变换及其变体在应用中遇到的问题
- 什么是小波变换？

## ◆ CT图像的常识

- CT图像的产生原理
- CT图像如何重建？

## ◆ 单像素相机

- 单像素数码相机原理
- 压缩感知理论

## ◆ 光场相机

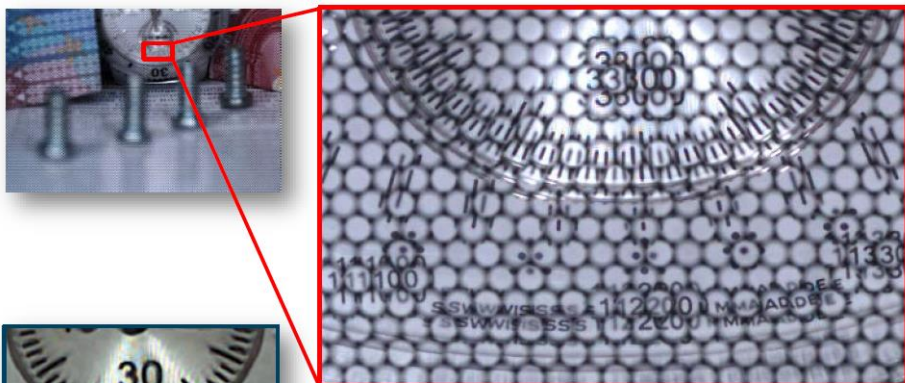
- 拍照无须对焦
- 3D成像



# 另一家公司: Raytrix

<https://raytrix.de/products/>

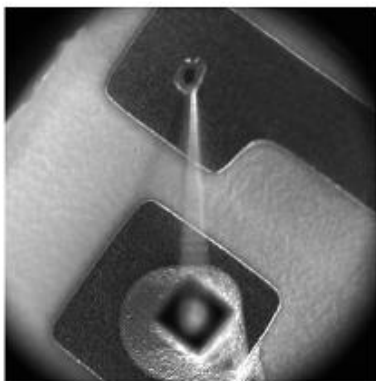
## Light Field Cameras for metric 3D measurements



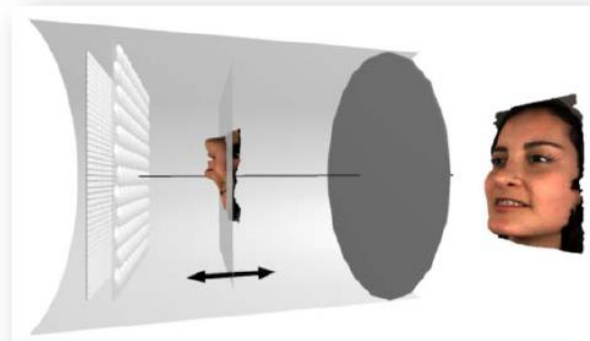
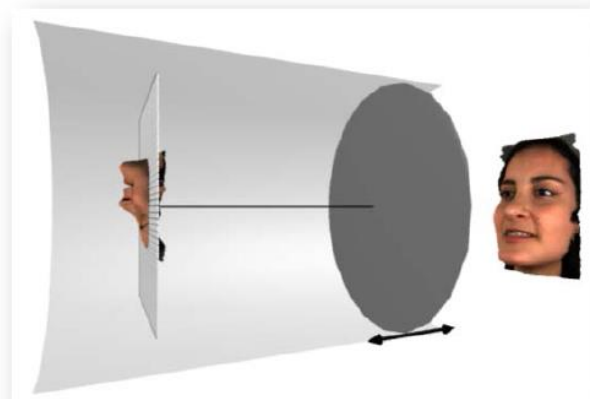
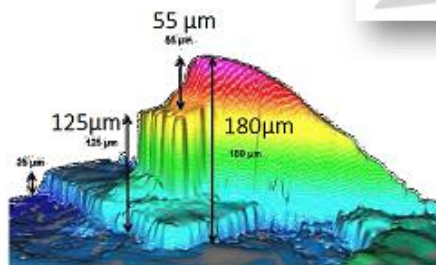
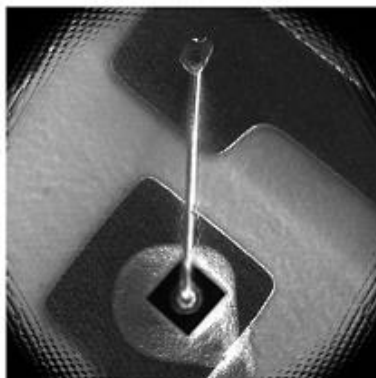
Compute "refocused" image

### 面向3D成像的工业应用

Standard 4MP Camera



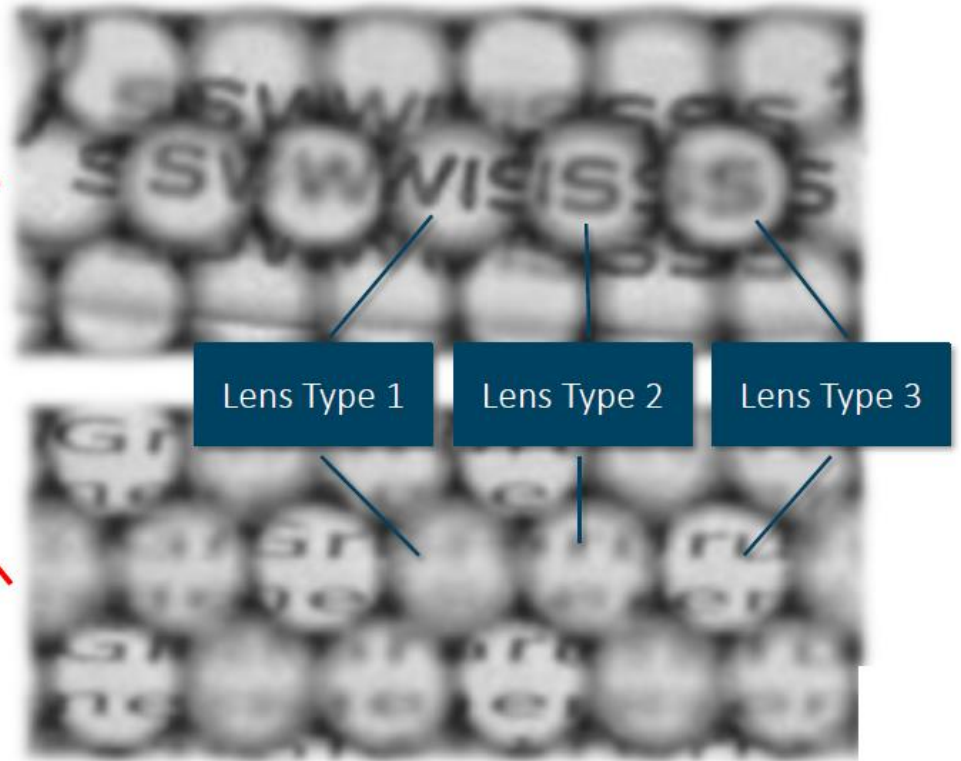
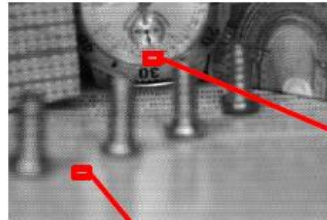
Raytrix Lightfield Camera R5μ





# Extended Depth-of-Field

[https://raytrix.de/wp-content/uploads/software/Raytrix\\_LightFieldCamera\\_2015\\_print1.pdf](https://raytrix.de/wp-content/uploads/software/Raytrix_LightFieldCamera_2015_print1.pdf)



## 应用领域

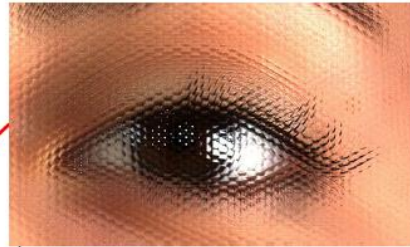
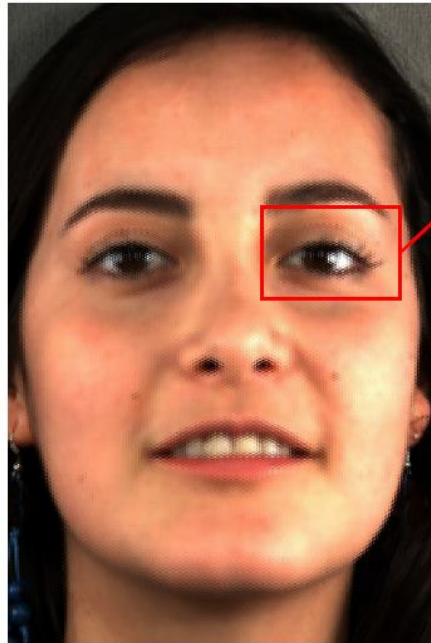
- 3D Fluid Mechanics
- 3D Machine Vision
- 3D Microscopy
- 3D Plant Analysis

Raytrix cameras use micro lens arrays with different micro lens types which differ in their focal length. This extends the depth-of-field of the camera.



# From raw image to total focus

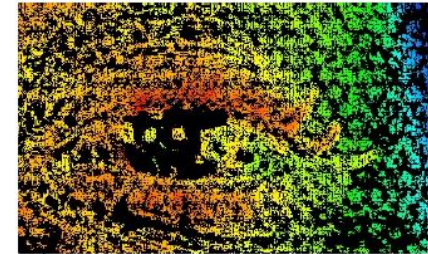
[https://raytrix.de/wp-content/uploads/software/Raytrix\\_LightFieldCamera\\_2015\\_print1.pdf](https://raytrix.de/wp-content/uploads/software/Raytrix_LightFieldCamera_2015_print1.pdf)



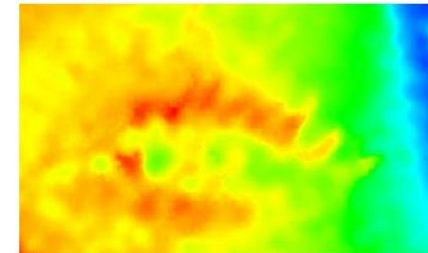
Micro-images show multiple imaging of object parts



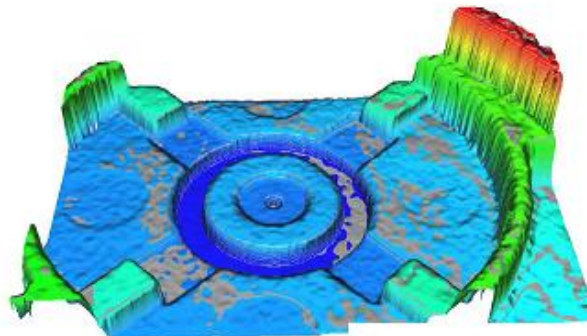
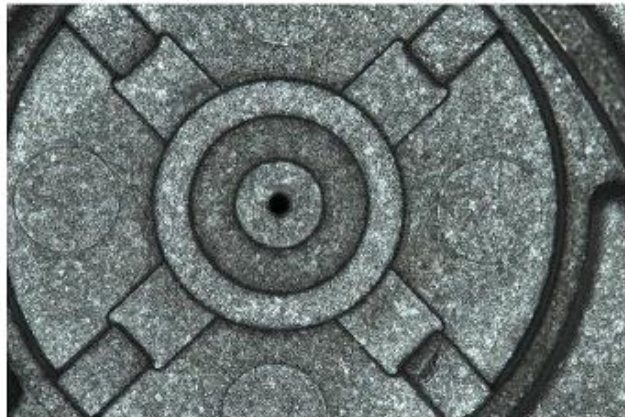
Computationally reconstructed image from raw image and depth map



Color-coded depth map for high-contrast areas



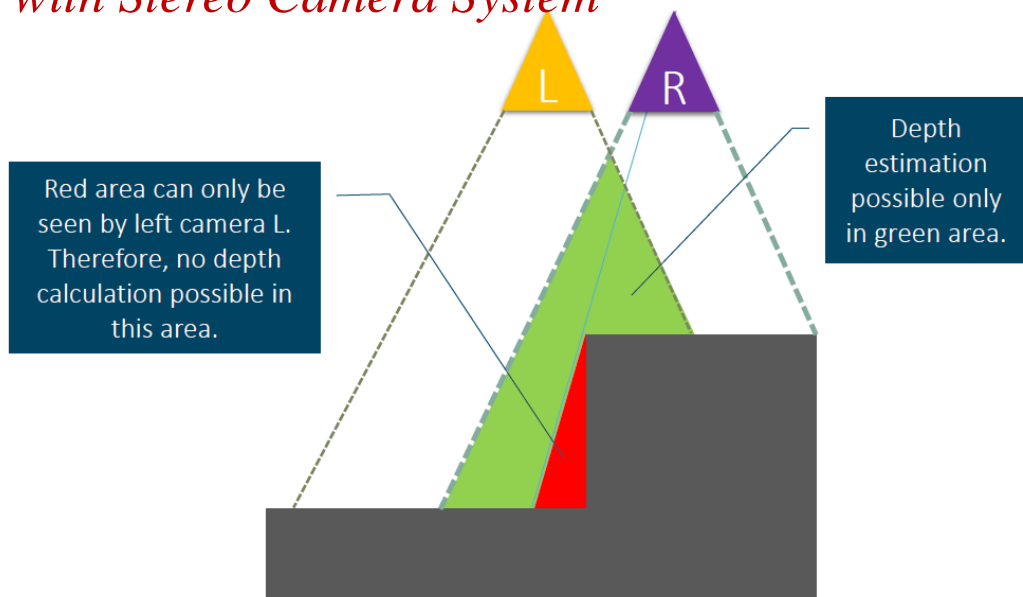
Filled depth map



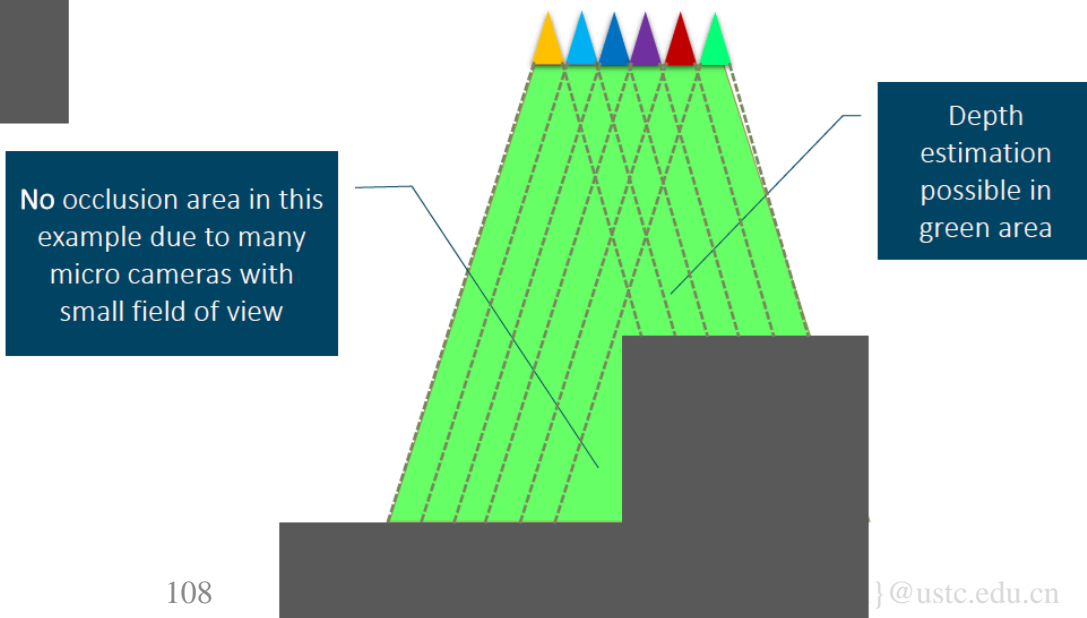


# 相比于双目3D相机的优势

## *with Stereo Camera System*



## *with Light Field Camera*





# 小结：从变换编码到单像素相机

## ◆ 变换编码→压缩感知

- 能量集中到少数系数上
- 每个变换系数都含有时域全部像素的部分信息
- 压缩观测后通过计算来恢复原始信号

## ◆ 示例

- CT图像：多次投影，每组投影值含有全部像素的部分信息
- 单像素相机：多次曝光，每次曝光值含有全部像素的部分信息
- 光场相机：一次曝光，每个像素包含了不同焦距的信息

## ◆ 思考

- 分块的变换编码（块效应）←每次变换针对局部像素
- 时域交叠的采样←如MDCT时域上每个样本被利用2次
- 小波变换←每一层的小波系数含有全部像素的部分信息
- 单像素相机←可能N次曝光中某个像素值都被利用M次
- 光场相机←可能1次曝光中某个成像位置叠加了N次光线

A blue-toned world map is the background for the title slide. It is overlaid with a network of glowing white lines and nodes, representing global communication. Binary code (0s and 1s) is scattered across the map. The title '《多媒体通信》' is centered in large, bold, yellow characters.

# 《多媒体通信》

从变换编码到单像素相机

谢谢!

