习题一

请自行推导并熟练掌握课堂上曾经导出的所有公式，如果可以，尽可能给出其几何解释。

所有习题中的“思考”部分请自行揣摩，不必写在作业本上。

1. 实数 a、b 取何值时，下面的矩阵 λ 有资格被称为**转动**矩阵？写出相应的转动矩阵。

$$\lambda=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

2. （1）写出右手直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 分别绕着三个坐标轴过角度 θ 的转动矩阵（被动观点）；

（2）将坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 先绕着 x_1 轴转过 $90°$ 角得到坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$，再将坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 绕着 x_2' 轴转过 $90°$ 角得到坐标系 $Ox_1''x_2''x_3''$。试对三个坐标系的相对关系作图示意，从图中读出 x_i'' 与 x_j 的关系并由此写出 $Ox_1x_2x_3 \to Ox_1''x_2''x_3''$ 的变换矩阵；试分别写出 $Ox_1x_2x_3 \to Ox_1'x_2'x_3'$ 和 $Ox_1'x_2'x_3' \to Ox_1''x_2''x_3''$ 的变换矩阵并由矩阵乘法给出 $Ox_1x_2x_3 \to Ox_1''x_2''x_3''$ 的变换矩阵；

（3）将坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 先绕着 x_2 轴转过 $90°$ 角得到坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$，再将坐标系 $Ox_1'x_2'x_3'$ 绕着 x_1' 轴转过 $90°$ 角得到坐标系 $Ox_1''x_2''x_3''$。试回答与（2）相同的问题。

3.（1）证明：若线性、齐次变换 $x_i'=\lambda_{ij}x_j$ 保持空间中任两点之间的距离不变，即有

$$dl'^2=dl^2 \quad \text{or} \quad dx_1'^2+dx_2'^2+dx_3'^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2$$

则该变换必然为正交变换；

注：这意味着作为本章出发点的正交变换也可如此引入。

注：在 4 维时空（所谓 Minkowski 空间）中，保持时空间隔 $ds^2=-c^2dt^2+dl^2$ 不变的线性齐次变换称为 Lorentz 变换，由此，就有了 Minkowski 空间中矢量和张量的定义。

（2）试利用正交矩阵的性质，由正交变换 $x_i'=\lambda_{ij}x_j$ 导出其逆变换 $x_i=\lambda_{ji}x_j'$。

思考：是否可以将 $x_i'=\lambda_{ij}x_j$ 左右两边乘以 λ_{ij} 并对 j 求和得到 $\lambda_{ij}x_i'=\lambda_{ij}\lambda_{ij}x_j$？

4. 由排列符号的定义证明：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

并由此证明

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

提示： 证明第一个关系时你可能会用到 ① 方阵及其转置具有相同的行列式，

② 乘积行列式等于行列式乘积。

Problem 5

（1）设 A 和 B 均为 $n \times n$ 方阵，$A_{ik}B_{kj}$、$B_{kj}A_{ik}$、$A_{ik}B_{jk}$ 和 $A_{ki}B_{kj}$ 分别表示哪个矩阵的 (i, j) 元素？

（2）设 $T_{ij} = T_{ji}$，而 $S_{ij} = -S_{ji}$，试证明 $T_{ij}S_{ij} \equiv 0$。

此命题可推广为：假如我们有一个单项式，其中 i 和 j 都为求和指标；如果该单项式可分解为两部分乘积的形式，即 $T_{\cdots i \cdots j \cdots}S_{\cdots i \cdots j \cdots}$，并且 T 和 S 关于指标 i 和 j 交换分别是对称与反对称的，即有 $T_{\cdots i \cdots j \cdots} = T_{\cdots j \cdots i \cdots}$ 以及 $S_{\cdots i \cdots j \cdots} = -S_{\cdots j \cdots i \cdots}$，则该单项式必为零。(此情形以后会经常遇到。)