习题二

请揣摩课堂上给出的球坐标系和柱坐标系下的角速度的由来。

请在下次课前细加揣摩：从主动与被动观点如何看待标量场的变换。

1. （1）对于反对称二阶张量$\vec{T}$（即它的分量满足$T_{ij}=-T_{ji}$），通过$C_i=\varepsilon_{ijk}T_{jk}$可以定义一个轴矢量$\vec{C}$。试由上式证明$T_{ij}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}C_k$。

（2）完成下面两张表：

点乘	矢量	轴矢量
矢量		
轴矢量		

叉乘	矢量	轴矢量
矢量		
轴矢量		

2.（1）证明：任何一个双线性函数$\vec{T}:\vec{A},\vec{B}\mapsto\phi=\vec{T}\left(\vec{A},\vec{B}\right)$都是一个二阶张量；而任何一个二阶张量通过$\vec{T}:\vec{A},\vec{B}\mapsto\phi=\vec{A}\cdot\vec{T}\cdot\vec{B}$定义了一个双线性函数。

注：双线性意指对于两个自变量都是线性的，即

$$\begin{cases}\vec{T}\left(a_1\vec{A}_1+a_2\vec{A}_2,\vec{B}\right)=a_1\vec{T}\left(\vec{A}_1,\vec{B}\right)+a_2\vec{T}\left(\vec{A}_2,\vec{B}\right)\\ \vec{T}\left(\vec{A},b_1\vec{B}_1+b_2\vec{B}_2\right)=b_1\vec{T}\left(\vec{A},\vec{B}_1\right)+b_2\vec{T}\left(\vec{A},\vec{B}_2\right)\end{cases}$$

（2）设$\hat{n}$是某个单位矢量，$\vec{T}$是一个线性映射，它将任一矢量投影到$\hat{n}$方向上，即

$$\vec{T}:\vec{A}\mapsto\vec{B}=\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{A}\right)$$

选取坐标系$Ox_1x_2x_3$，使得x_3轴沿着$\hat{n}$的方向，在该坐标系中将$\vec{T}$的分量用矩阵表示出来；选取另一坐标系$Ox_1'x_2'x_3'$，它由（1）中的坐标系绕x_1轴转动θ角得到，在新的坐标系中将$\vec{T}$的分量用矩阵表示出来。

3. 转动公式 $\vec{r}'=\vec{r}\cos\theta+\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{r}\right)\left(1-\cos\theta\right)+\hat{n}\times\vec{r}\sin\theta$ 写成分量形式即为$x_i'=\lambda_{ij}x_j$。

（1）试证明

$$\lambda_{ij}=\delta_{ij}\cos\theta+n_in_j\left(1-\cos\theta\right)-\varepsilon_{ijk}n_k\sin\theta$$

并将矩阵λ按照上式写为三个矩阵求和的形式。

（2）由上式直接证明λ为正交矩阵，即$\lambda_{ik}\lambda_{jk}=\delta_{ij}$。

（3）设某一变换将空间中每一点都绕着过原点的轴旋转$120°$，该轴对三个坐标轴各成相同的角度，试确定描述该转动的变换矩阵。

4. 抛物线坐标(ξ,η,ϕ)可由柱坐标(s,ϕ,z)定义如下：

$$s=\sqrt{\xi\eta},\ \ \phi=\phi,\ \ z=\frac{1}{2}(\xi-\eta)\quad \text{where } \xi,\eta\in[0,\infty)$$

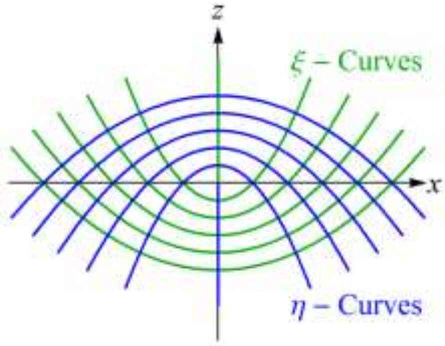
（1）试确定 xz 平面内$\xi-$和$\eta-$坐标曲线的形状及其基本特征；

提示：$\xi-$坐标曲线是指另外两个坐标(η,ϕ)为常数，而ξ变化时所描绘的曲线，即参数方程为$\vec{r}(\xi)=\vec{r}(\xi,\eta_0,\phi_0)$的曲线。

（2）抛物线坐标系是否为正交曲线坐标系（即三个基矢$\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{\phi}$是否彼此正交）？

（3）写出拉梅系数h_ξ、h_η、h_ϕ，并由此证明粒子速度的平方可以表示为

$$v^2=\frac{\xi+\eta}{4}\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi}+\frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right)+\xi\eta\dot{\phi}^2$$



5. 椭圆坐标(ξ,η,ϕ)可由柱坐标(s,ϕ,z)定义如下（其中σ是给定的正常数）：

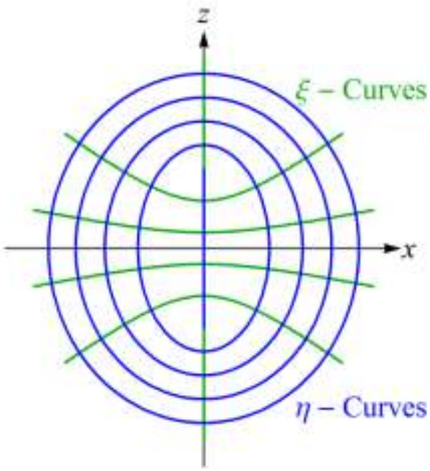
$$s=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},\quad \phi=\phi,\quad z=\sigma\xi\eta\quad \text{where } \xi\in[1,\infty),\ \eta\in[-1,1]$$

（1）试确定 xz 平面内$\xi-$和$\eta-$坐标曲线的形状及其基本特征；

（2）椭圆坐标系是否为正交曲线坐标系？

（3）写出拉梅系数h_ξ、h_η、h_ϕ，并由此证明粒子速度的平方可以表示为

$$v^2=\sigma^2(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right)+\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\phi}^2$$



6.（选做）课堂上按照“就近点乘”的原则如下定义了矢量与张量、张量与矢量的点乘：

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A}=\left(T_{ik}A_k\right)\hat{x}_i,\quad \vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T}=\left(A_kT_{ki}\right)\hat{x}_i$$

（1） $\overleftrightarrow{T}$ 满足什么条件时，有 $\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T}$？

（2） 证明如下结合律：$\left(\vec{A}\cdot\overleftrightarrow{T}\right)\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\left(\overleftrightarrow{T}\cdot\vec{B}\right)$

注：由此结论可知，$\overleftrightarrow{T}$ 的直角分量可以写为 $T_{ij}=\hat{x}_i\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{x}_j$，而 $\overleftrightarrow{T}$ 则可以完整表示为

$$\overleftrightarrow{T}=T_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j=\hat{x}_iT_{ij}\hat{x}_j=\hat{x}_i\hat{x}_i\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\hat{x}_j\hat{x}_j=\overleftrightarrow{I}\cdot\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{I}$$

类似地，矢量可以完整表示为

$$\vec{f}=f_i\hat{x}_i=\vec{f}\cdot\hat{x}_i\hat{x}_i=\vec{f}\cdot\overleftrightarrow{I}=\overleftrightarrow{I}\cdot\vec{f}$$

7.（选做）两个有共同原点的坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 和 $Ox_1'x_2'x_3'$，后者相对于前者的角速度为 $\vec{\omega}$。

（1） 写出质点在两个坐标系中的速度、加速度的变换规律；

（2） 试一下，能否仿照课堂上的过程证明如下结论：

$$\frac{d\overleftrightarrow{T}}{dt}=\left(\frac{d\overleftrightarrow{T}}{dt}\right)'+\vec{\omega}\times\overleftrightarrow{T}-\overleftrightarrow{T}\times\vec{\omega}$$

此处，矢量与张量叉乘符合所谓“就近叉乘”的原则，即

$$\vec{A}\times\overleftrightarrow{T}=\left(A_i\hat{x}_i\right)\times\left(T_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k\right)=\left(A_iT_{jk}\right)\left(\hat{x}_i\times\hat{x}_j\hat{x}_k\right)=\left(A_iT_{jk}\right)\left(\varepsilon_{ijl}\hat{x}_l\hat{x}_k\right)$$
$$\overleftrightarrow{T}\times\vec{A}=\left(T_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k\right)\times\left(A_i\hat{x}_i\right)=\left(T_{jk}A_i\right)\left(\hat{x}_j\hat{x}_k\times\hat{x}_i\right)=\left(T_{jk}A_i\right)\left(\varepsilon_{kil}\hat{x}_j\hat{x}_l\right)$$

写成分量为

$$\left(\vec{A}\times\overleftrightarrow{T}\right)_{lk}=\varepsilon_{ijl}A_iT_{jk},\quad \left(\overleftrightarrow{T}\times\vec{A}\right)_{jl}=T_{jk}A_i\varepsilon_{kil}$$

或者

$$\left(\vec{A}\times\overleftrightarrow{T}\right)_{ij}=\varepsilon_{ilk}A_lT_{kj},\quad \left(\overleftrightarrow{T}\times\vec{A}\right)_{ij}=T_{ik}A_l\varepsilon_{klj}$$

思考：在讨论相对转动坐标系中矢量变化率之间的关系时，课堂上我说“G_i' 是标量”，因此有

$$\left(\frac{dG_i'}{dt}\right)'=\frac{dG_i'}{dt}$$

请问“G_i' 是标量”是否有道理？为什么？

8. **（选做）**（1）试由本次习题 **3** 所得特殊正交矩阵 λ_{ij} 的表达式证明：

（a）若 λ 不是对称矩阵，则转角由下式确定

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}\lambda - 1}{2} \quad (0 < \theta < \pi)$$

而转轴 $\hat{n}$ 与下面的矢量平行：

$$(\lambda_{32} - \lambda_{23},\quad \lambda_{13} - \lambda_{31},\quad \lambda_{21} - \lambda_{12})$$

（b）若 λ 为对称矩阵（当然，设 $\lambda \neq I$），则转角必为 π，而转轴可由下面的矩阵直接读出

$$\lambda + I = 2\begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

（具体而言非，上述矩阵的非对角元确定各 n_i 的相对符号、对角元确定 n_i 的数值）

（2）利用（1）的结论写出如下四个特殊正交矩阵所描述的转动（转轴以及转动角度）

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

（3)在主动观点下分别写出绕着 x 轴旋转 90° 以及绕着 y 轴旋转 90° 两个转动矩阵 λ_1 和 λ_2 。$\lambda_1\lambda_2$ 以及 $\lambda_2\lambda_1$ 分别表示绕着什么轴旋转多大角度？

9.（选做）方阵 A 的指数定义为

$$e^A = \exp A \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

其中 A^n 表示 n 个 A 相乘，而 $A^0 \triangleq I$ 。

（1）证明：如果 B 是可逆矩阵，则有 $e^{BAB^{-1}} = Be^A B^{-1}$；

（2）定义如下三个矩阵（称为转动的**生成元**）

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

写出主动意义下分别绕 x_1、 x_2 和 x_3 轴旋转角度 θ 的转动矩阵 λ_1、 λ_2 和 λ_3，并证明下式之一：

$$\lambda_i(\theta) = \exp(\theta J_i), \quad i = 1,2,3$$

（3）计算**对易子**：$\left[J_i, J_j\right] \triangleq J_i J_j - J_j J_i$；

提示：你可以由 J_i 的表达式利用矩阵运算得到结果 $\left[J_i, J_j\right] = \varepsilon_{ijk} J_k$；或者，如果你注意到 $\left(J_i\right)_{jk} = -\varepsilon_{ijk}$ 的话， 也可以利用排列符号的性质得到同样的结论。

说明：任意转动都可以通过分别绕着三个坐标轴转过某个角度来实现，绕着 $\hat{n}$ 轴转过角度 θ 这一旋转对应的转动矩阵总可以表示为 $\lambda(\theta, \hat{n}) = \exp\left(\theta n_i J_i\right)$。或者，如果我们形式地定义

$$\vec{\theta} = \theta \hat{n}, \quad \vec{J} = J_i \hat{x}_i$$

则有 $\lambda(\theta, \hat{n}) = \exp\left(\vec{\theta} \cdot \vec{J}\right)$；而无穷小转动公式则可以表示为 $d\vec{r} = d\vec{\theta} \cdot \vec{J}$ 。

10.（选做）三维转动这一几何概念在代数上可以用不同的方式描述。譬如课堂上我们用特殊正交矩阵表示，三个独立参数可以是转轴（三个方向余弦，其中只有两个分量是独立的）以及转动角度，也可以是 Euler 角（刚体部分将详细讨论）。事实上，我们也可以用2×2厄米矩阵描述转动（转置共轭等于自身的矩阵称为厄米矩阵）。为此，定义 Pauli 矩阵如下：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

这里 i 为纯虚数$\left(i^2=-1\right)$，而下标中出现的 i 仍为分量指标$(i=1,2,3)$。

（1）试证明

$$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}I+i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad \text{and} \quad \left[\sigma_i,\sigma_j\right]=2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

（2）如果令$\vec{a}\cdot\vec{\sigma}=a_i\sigma_i$，试证明

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)I+i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\sigma}$$

特别地，$\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}\right)=a^2I$。由上式不难得到

$$\left[\vec{a}\cdot\vec{\sigma},\vec{b}\cdot\vec{\sigma}\right]=2i\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{\sigma}$$

（3）若定义

$$Q=\exp\left(-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

试证明 Q 也可写为

$$Q=I\cos\frac{\theta}{2}-i\hat{n}\cdot\vec{\sigma}\sin\frac{\theta}{2}$$

（4）若用下面的2×2矩阵描述矢量$\vec{A}$的分量：

$$A=\begin{pmatrix}A_3&A_1-iA_2\\A_1+iA_2&-A_3\end{pmatrix}=\vec{A}\cdot\vec{\sigma}$$

证明绕着$\hat{n}$轴转动角度θ可以表示为 $A'=QAQ^\dagger$，其中，$Q^\dagger$表示矩阵 Q 的共轭转置，即$A'=QAQ^\dagger$给出的实际上就是转动公式：

$$\vec{A}'=\vec{A}\cos\theta+\hat{n}\left(\hat{n}\cdot\vec{A}\right)\left(1-\cos\theta\right)+\hat{n}\times\vec{A}\sin\theta$$