

Jordan 标准型

1. 相似变换: $B = PAP^{-1}, A \sim B$

相抵变换: $\lambda I - A \rightleftharpoons \lambda I - B$

注: 后面的矩形方块, 针对 λI 的代表“相抵”, 针对 A 、 B 的代表“相似”

原公式用 MathType 输入的, 显示不正常, 抱歉!

定理 5.3.1: $A \sim B \Leftrightarrow \lambda I - A \rightleftharpoons \lambda I - B$

证明: 显见 $\lambda I - A, \lambda I - B$ 正则。

(1) . $\lambda I - A \rightleftharpoons \lambda I - B \Rightarrow A \sim B$?

$$(i). \bar{M}(\lambda)(\lambda I - A)N(\lambda) = \lambda I - B$$

$$\Downarrow$$

$$, \quad M(\lambda) = \bar{M}^{-1}(\lambda)$$

$$(\lambda I - A)N(\lambda) = \bar{M}(\lambda)^{-1}(\lambda I - B) = M(\lambda)(\lambda I - B)$$

$$(ii). M(\lambda) = (\lambda I - A)R(\lambda) + F$$

$$N(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda I - B) + G$$

$$(\lambda I - A)Q(\lambda)(\lambda I - B) + (\lambda I - A)G$$

$$= (\lambda I - A)R(\lambda)(\lambda I - B) + F(\lambda I - B)$$

$$\Downarrow$$

$$(\lambda I - A)[Q(\lambda) - R(\lambda)](\lambda I - B) = F(\lambda I - B) - (\lambda I - A)G$$

$$\text{如果 } Q(\lambda) - R(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \deg[(\lambda I - A)[Q(\lambda) - R(\lambda)](\lambda I - B)] \geq 2$$

$$\text{由于 } \deg[F(\lambda I - B) - (\lambda I - A)G] \leq 1, \text{ 故 } Q(\lambda) - R(\lambda) = 0$$

$$F(\lambda I - B) - (\lambda I - A)G = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda(F - G) = FB - AG$$

$$\begin{matrix} \text{(一阶)} & \text{(0阶)} \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$F = G,$$

$$FB = GA, |F| = 0?$$

$$(iii) \quad M^{-1}(\lambda) = (\lambda I - B)S(\lambda) + T = H(\lambda), M(\lambda) = (\lambda I - A)R(\lambda) + F$$

$$I = M(\lambda)M^{-1}(\lambda)$$

$$= (\lambda I - A)[R(\lambda)H(\lambda)] + F(\lambda I - B)S(\lambda) + FT$$

$$= (\lambda I - A)[R(\lambda)H(\lambda)] + (\lambda I - A)GS(\lambda) + FT$$

$$= (\lambda I - A)[R(\lambda)H(\lambda) + GS(\lambda)] + FT$$

用到: $F(\lambda I - B) = (\lambda I - A)G$

因此, $(\lambda I - A)[R(\lambda)H(\lambda) + GS(\lambda)] = I - FT$ 。应用引理 5.1.4, 得到

$I = FT$ 。故必有 F 非奇异。

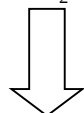
(2) . $A \sim B \Rightarrow \lambda I - A \rightleftharpoons \lambda I - B$?

2. 分块矩阵

$$\begin{cases} A_1 \sim B_1 (\Rightarrow B_1 = P_1 A_1 P_1^{-1}) \\ A_2 \sim B_2 (\Rightarrow B_2 = P_2 A_2 P_2^{-1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \quad \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{cases} \lambda I - A_1 \rightleftharpoons \lambda I - B_1 \\ \lambda I - A_2 \rightleftharpoons \lambda I - B_2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\lambda I - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right) \rightleftharpoons \left(\lambda I - \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \right)$$



$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left(\lambda I - \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right) \rightleftharpoons \left(\lambda I - \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \right)$$

相抵变换有传递性。

相抵在块互换情况下保持:

$$\lambda I - \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I - B_1 & \\ & \lambda I - B_2 \end{bmatrix} \rightleftharpoons \begin{bmatrix} \lambda I - B_2 & \\ & \lambda I - B_1 \end{bmatrix}$$

例子 $J_1 = [1], J_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ & 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$

$$\lambda I - J_1 = \lambda - 1, \lambda I - J_2 = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ & \lambda - 3 \end{bmatrix} \rightleftharpoons \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda - 3)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\lambda I - A &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \lambda-1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & (\lambda-3)^2 & \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & \lambda-1 \\ \hline & & & (\lambda-3)^2 \end{array} \right] \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & & & (\lambda-3)^2(\lambda-1) \end{array} \right] \\
\begin{bmatrix} \lambda-1 & \\ & (\lambda-3)^2 \end{bmatrix} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \\ & (\lambda-1)(\lambda-3)^2 \end{bmatrix} \\
&d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-3)^2
\end{aligned}$$

2. 约当块的 Smith 标准型

$$\begin{aligned}
(1). J_0 &= \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & \\ & \lambda_0 & 1 \\ & & \lambda_0 \end{bmatrix}, \lambda I - J_0 = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda_0 & -1 & \\ & \lambda - \lambda_0 & -1 \\ & & \lambda - \lambda_0 \end{bmatrix} \\
&d_1=1, d_2=1, d_3=(\lambda - \lambda_0)^3
\end{aligned}$$

$$\lambda I - J_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda - \lambda_0)^3 \end{bmatrix}$$

$$(2). \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - J_1 = \begin{bmatrix} \lambda I - J_1 & | & \\ \hline & | & \\ \hline & | & \lambda I - J_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (\lambda - \lambda_1)^3 & \\ & & & 1 \\ & & & & (\lambda - \lambda_2)^2 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda - \lambda_1)^3(\lambda - \lambda_2)^2 \end{bmatrix} = S(\lambda), d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$$

$$(3). \quad \lambda I - A \Leftrightarrow S(\lambda) \Leftrightarrow A \sim J = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$$

例子:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & 1 & 3 \end{bmatrix}, \lambda I - A_1 \rightleftharpoons \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & (\lambda-2)^3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda-3)^2 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

$$A_1 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$$

另一个例子: $J = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ & \lambda_0 & 1 \\ & & \lambda_0 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ & \lambda_0 \end{bmatrix}$

$$\lambda I - J \rightleftharpoons ?$$

$$\lambda I - J \rightleftharpoons \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & (\lambda - \lambda_0)^3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda - \lambda_0)^2 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = 1, d_2 = 1, d_3 = 1, d_4 = (\lambda - \lambda_0)^2, d_5 = (\lambda - \lambda_0)^{2+3}$$

$$\Phi_1 = 1, \Phi_2 = 1, \Phi_3 = 1, \Phi_4 = (\lambda - \lambda_0)^2, \Phi_5 = (\lambda - \lambda_0)^3$$

$$\lambda I - J \rightleftharpoons \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & (\lambda - \lambda_0)^2 & \\ & & & & (\lambda - \lambda_0)^3 \end{bmatrix} \rightleftharpoons \lambda I - A \Rightarrow A \sim J$$

3. 约当型的求取:

$$\lambda I - A \rightleftharpoons S(\lambda) \rightleftharpoons \lambda I - J. \quad J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix}$$

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} \phi_1(\lambda) & & & \\ & \phi_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \phi_n(\lambda) \end{bmatrix}, \phi_i(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_{i,1}} (\lambda - \lambda_2)^{n_{i,2}} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_{i,s}}, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s n_{i,j} = n$$

1 个非 1 的初等因子对应了一个约当块。

$$(\lambda - \lambda_j)^{n_{i,j}} (n_{i,j} \geq 1) \implies J_p = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_{i,j} \times n_{i,j}}$$

因此，必定存在相似变换矩阵 P ，使得：

$$A = PJP^{-1}.$$

有两个关键问题需要回答：

- 实际上，约当标准型 J 不大可能通过上面的相抵变换的方法获得（太麻烦！3 阶的还凑合，4 阶以上几乎不可能了）。但我们需要求 J ，怎么办？
- 变换矩阵 P 怎么求取？

4. 求取 J :

(1) 由于 $A = PJP^{-1}$ ，故

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - J| = \prod_{l=1}^r |\lambda I - J_l| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}.$$

通过求解 $|\lambda I - A| = 0$ ，能得到所有的特征根。假设共有 s 个相异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ，这些特征根的重数（代数重数）为 $n_1, n_2, \dots, n_s$

而 $\{J_1, \dots, J_r\}$ 正是由这些根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 构成。这些特征根组成了 $\{J_1, \dots, J_r\}$ 的对角线元素，

它们的次上对角元素为 1，其余都为 0。但 $\{J_1, \dots, J_r\}$ 的尺寸有多大呢？

(1) 确定 $\{J_1, \dots, J_r\}$ 的尺寸：

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \lambda PP^{-1} - PJP^{-1} = P(\lambda I - J)P^{-1}, \\ \text{易知: } (\lambda I - A)^p &= P(\lambda I - J)^p P^{-1} \end{aligned}$$

。由于 P 为非奇异矩阵，故

$$\text{rank}(\lambda I - A)^p = \text{rank}(\lambda I - J)^p, \quad p=1, 2, \dots$$

(i) 当 λ 不是特征根时， $\text{rank}(\lambda I - A)^p = \text{rank}(\lambda I - J)^p = n, \forall p$ 。对我们意义不大。

(ii) 当 λ 是特征根时, ($\lambda = \lambda_i$), 我们可以定出来有几个约当块基于 λ_i 构建:

观察 $\lambda_i I - J_p$ 的秩:

$$\lambda_i I - J_p = \begin{bmatrix} \lambda_i - \lambda_j & -1 & & \\ & \lambda_i - \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda_i - \lambda_j \end{bmatrix}_{n_p \times n_p},$$

当 $\lambda_i \neq \lambda_j$ 时, $\lambda_i I - J_p$ 是一个满秩矩阵。

当 $\lambda_i = \lambda_j$ 时, $\lambda_i I - J_p$ 是不是满秩矩阵, 其秩比满秩差 1。即, 如果某个约当块 J_p 以 λ_i 为其对角元, 则其秩比满秩差 1。

注意:

$$\text{rank}(\lambda_i I - A) = \text{rank}(\lambda_i I - J) = \text{rank}(\lambda_i I - J_1) + \text{rank}(\lambda_i I - J_2) + \cdots + \text{rank}(\lambda_i I - J_r)$$

显见:

$$\begin{aligned} n - \text{rank}(\lambda_i I - A) &= n - (\text{rank}(\lambda_i I - J_1) + \text{rank}(\lambda_i I - J_2) + \cdots + \text{rank}(\lambda_i I - J_r)) \\ &= (n_1 - \text{rank}(\lambda_i I - J_1)) + (n_2 - \text{rank}(\lambda_i I - J_2)) + \cdots + (n_r - \text{rank}(\lambda_i I - J_r)) \end{aligned}$$

所以 $n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ 代表了有几个约当块以 λ_i 为其对角元。那么这些约当块的尺寸呢?

显见:

这些以 λ_i 为其对角元的约当块的尺寸和为 n_i , 即 λ_i 的代数重数。

(iii) 定出对应于 λ_i 的具体尺寸:

由于 $\text{rank}(\lambda I - A)^p = \text{rank}(\lambda I - J)^p$, 故

$$\begin{aligned} \text{rank}(\lambda_i I - A)^p - \text{rank}(\lambda_i I - A)^{p+1} &= \text{rank}(\lambda_i I - J)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J)^{p+1} \\ &= (\text{rank}(\lambda_i I - J_1)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J_1)^{p+1}) + \cdots + (\text{rank}(\lambda_i I - J_r)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J_r)^{p+1}) \end{aligned}$$

观察: (a). 如果 J_l 不是以 λ_i 为对角元, 则 $(\text{rank}(\lambda_i I - J_l)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J_l)^{p+1}) = 0, \forall p$

(b). 如果 J_l 是以 λ_i 为对角元, 则

$$\lambda_i I - J_l = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n_l \times n_l},$$

当 $p < n_i$ 时, $\left(\text{rank}(\lambda_i I - J_i)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J_i)^{p+1}\right) = 1$

当 $p \geq n_i$ 时,

$$(\lambda_i I - J_i)^p = 0, \text{rank}(\lambda_i I - J_i)^{p+1} = 0, \left(\text{rank}(\lambda_i I - J_i)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J_i)^{p+1}\right) = 0$$

回顾

$$\begin{aligned} \text{rank}(\lambda_i I - A)^p - \text{rank}(\lambda_i I - A)^{p+1} &= \text{rank}(\lambda_i I - J)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J)^{p+1} \\ &= \left(\text{rank}(\lambda_i I - J_1)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J_1)^{p+1}\right) + \cdots + \left(\text{rank}(\lambda_i I - J_r)^p - \text{rank}(\lambda_i I - J_r)^{p+1}\right) \end{aligned}$$

$\text{rank}(\lambda_i I - A)^p - \text{rank}(\lambda_i I - A)^{p+1}$ 由所有以 λ_i 为对角元、且尺寸大于 p 的约当块贡献, 每个这样的约当块贡献 1。

反过来, 由 $\text{rank}(\lambda_i I - A)^p - \text{rank}(\lambda_i I - A)^{p+1}$ 可推断出有几个尺寸大于 p 的约当块。

总结一下: 由 $n - \text{rank}(\lambda_i I - A)$ 能定出有几个约当块以 λ_i 为对角元;

由 $\text{rank}(\lambda_i I - A) - \text{rank}(\lambda_i I - A)^2$ 能定出这样的约当块中, 有几个的尺寸大于 1, 至少为 2。

由 $\text{rank}(\lambda_i I - A)^2 - \text{rank}(\lambda_i I - A)^3$ 能定出这样的约当块中, 有几个的尺寸大于 2, 至少为 3。

依次类推。最后一定会碰到 $\text{rank}(\lambda_i I - A)^p - \text{rank}(\lambda_i I - A)^{p+1} = 0$, 就停下来。这样我们

就定下来所有以 λ_i 为对角元的约当块的个数。

$$\begin{aligned} &\geq 1 \quad * \quad * \quad * \quad * \\ &\geq 2 \quad * \quad * \quad * \quad \text{rank}(\lambda_i I - A) - \text{rank}(\lambda_i I - A)^2 = 3 \\ \text{比如, } &\geq 3 \quad * \quad * \quad \text{rank}(\lambda_i I - A)^2 - \text{rank}(\lambda_i I - A)^3 = 2, \text{ 定出有 1 个 1 阶块, 1 个 2} \\ &\geq 4 \quad * \quad * \quad \text{rank}(\lambda_i I - A)^3 - \text{rank}(\lambda_i I - A)^4 = 2 \\ &\quad \text{rank}(\lambda_i I - A)^4 - \text{rank}(\lambda_i I - A)^5 = 0 \end{aligned}$$

阶块, 2 个 4 阶块。

这样, 我们得到了约当标准型 J 。

5. 知道 J 后, 我们需要求等价变换矩阵 P 使得 $A = PJP^{-1}$ 。

$AP = PJ$ 。通过例子, 给出 P 的求法:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \\ & \lambda_1 & 1 \\ & & \lambda_1 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{bmatrix}。$$

P 有 5 列, 将其写成: $P = [P_{1,1} P_{1,2} P_{1,3} | P_{2,1} P_{2,2}]$, 这 5 列相互线性无关。

由 $AP = PJ$ 可得:

$$\begin{cases} AP_{1,1} = \lambda_1 P_{1,1} \\ AP_{1,2} = \lambda_1 P_{1,2} + P_{1,1} \\ AP_{1,3} = \lambda_1 P_{1,3} + P_{1,2} \end{cases}, \begin{cases} AP_{2,1} = \lambda_1 P_{2,1} \\ AP_{2,2} = \lambda_1 P_{2,2} + P_{2,1} \end{cases}。$$

故 $P_{1,3}$ 是 2 阶增广特征向量, $P_{1,2}$ 、 $P_{2,2}$ 是 1 阶增光特征向量, $P_{1,1}$ 、 $P_{2,1}$ 是特征向量。

$$\text{观察: } \begin{cases} (A - \lambda_1 I)P_{1,1} = 0 \\ (A - \lambda_1 I)P_{1,2} = P_{1,1} \neq 0, (A - \lambda_1 I)^2 P_{1,2} = 0 \\ (A - \lambda_1 I)P_{1,3} = P_{1,2} \neq 0, (A - \lambda_1 I)^2 P_{1,3} = P_{1,1} \neq 0, (A - \lambda_1 I)^3 P_{1,3} = 0 \end{cases}。$$

由 $P_{1,3}$ 可以容易生成 $P_{1,2}$ 、 $P_{1,1}$ 。

(1) $(A - \lambda_1 I)^3 P_{1,3} = 0$ 表示 $P_{1,3}$ 处于 $(A - \lambda_1 I)^3$ 的零空间 $\text{Null}(A - \lambda_1 I)^3$, 该空间的维数为:

$$\dim(\text{Null}(A - \lambda_1 I)^3) = n - \text{rank}(A - \lambda_1 I)^3 = n - \text{rank}(J - \lambda_1 I)^3 = 5。$$

(2) $(A - \lambda_1 I)^2 P_{1,3} \neq 0$ 表示 $P_{1,3}$ 不在 $(A - \lambda_1 I)^2$ 的零空间 $\text{Null}(A - \lambda_1 I)^2$ 中, 该空间的维数为:

$$\dim(\text{Null}(A - \lambda_1 I)^2) = n - \text{rank}(A - \lambda_1 I)^2 = n - \text{rank}(J - \lambda_1 I)^2 = 4。$$

(3) 易知: $\text{Null}(A - \lambda_1 I)^2 \subset \text{Null}(A - \lambda_1 I)^3$ 。我们找出一个属于 $\text{Null}(A - \lambda_1 I)^3$, 但不属于 $\text{Null}(A - \lambda_1 I)^2$ 的非零向量, 该向量有资格做 $P_{1,3}$, 记为 $P_{1,3} \in \text{Null}(A - \lambda_1 I)^3 - \text{Null}(A - \lambda_1 I)^2$ 。

(4) 从 $P_{1,3}$ 可以构造出一个一阶增广特征向量: $P_{1,2} = (A - \lambda_1 I)P_{1,3}$ 。显见 $P_{1,2} \neq 0$ (否则, $(A - \lambda_1 I)P_{1,2} = (A - \lambda_1 I)^2 P_{1,3} = 0$, 与 $P_{1,3} \notin \text{Null}(A - \lambda_1 I)^2$ 矛盾)。进一步, $P_{1,2}$ 与 $P_{1,3}$ 线性无关:

假设 $c_1 P_{1,2} + c_2 P_{1,3} = 0$ 。给其两边同乘以 $(A - \lambda_1 I)^2$, 则得 $c_2 = 0$; 代入方程, 由于 $P_{1,2} \neq 0$,

故得 $c_1 = 0$ 。

(5) 除了 $P_{1,2}$, 我们还需要另外一个 1 阶增广特征向量 $P_{2,2}$, 其必须与 $P_{1,2}$ 和 $P_{1,3}$ 线性无关。

同理, $(A - \lambda_1 I)^2 P_{2,2} = 0, (A - \lambda_1 I)P_{2,2} \neq 0$ 。故 $P_{2,2} \in \text{Null}(A - \lambda_1 I)^2, P_{2,2} \notin \text{Null}(A - \lambda_1 I)$ 。

$$\dim\{\text{Null}(A - \lambda_1 I)^2 - \text{Null}(A - \lambda_1 I)\} = \text{rank}(A - \lambda_1 I) - \text{rank}((A - \lambda_1 I)^2) = 2。$$

已知, $P_{1,2} \in \{\text{Null}(A - \lambda_1 I)^2 - \text{Null}(A - \lambda_1 I)\},$

$\dim\{Null(A-\lambda_1 I)^2 - Null(A-\lambda_1 I) - span(P_{1,2})\} = 1$ 。所以，必定能从空间

$Null(A-\lambda_1 I)^2 - Null(A-\lambda_1 I) - span(P_{1,2})$ 中找出一个非 0 向量来做 $P_{2,2}$ 。可以证明， $P_{2,2}$ ，

$P_{1,2}$ 和 $P_{1,3}$ 三者线性无关。

(6) 通过 $P_{1,1} = (A-\lambda_1 I)P_{1,2}$ 和 $P_{2,1} = (A-\lambda_1 I)P_{2,2}$ 可以构造出两个特征向量 $P_{1,1}$ 和 $P_{2,1}$ 。我们

可以证明， $P_{1,1}$ ， $P_{2,1}$ ， $P_{2,2}$ ， $P_{1,2}$ 和 $P_{1,3}$ 五者线性无关。

证明： $c_1 P_{1,1} + c_2 P_{1,2} + c_3 P_{1,3} + c_4 P_{2,1} + c_5 P_{2,2} = 0$

给方程两边同乘以 $(A-\lambda_1 I)^2$ ，得到 $0 = c_3 (A-\lambda_1 I)^2 P_{1,3} = c_3 P_{1,1}$ ，故 $c_3 = 0$

给方程两边同乘以 $(A-\lambda_1 I)$ ，得到

$$0 = (A-\lambda_1 I)(c_2 P_{1,2} + c_5 P_{2,2}) \Rightarrow c_2 P_{1,2} + c_5 P_{2,2} \in Null(A-\lambda_1 I)。$$

$P_{1,2}, P_{2,2} \in \{Null(A-\lambda_1 I)^2 - Null(A-\lambda_1 I)\}$ ，且 $P_{2,2}$ ， $P_{1,2}$ 线性无关。故 $P_{2,2}$ ， $P_{1,2}$ 与

$Null(A-\lambda_1 I)$ 所有向量都线性独立。换句话讲，如果 $[c_2 \ c_5] \neq 0$ ，则 $c_2 P_{1,2} + c_5 P_{2,2}$ 为一非

0 向量，且该向量属于 $\{Null(A-\lambda_1 I)^2 - Null(A-\lambda_1 I)\}$ ；其不可能属于 $Null(A-\lambda_1 I)$ 。

两边什么都不乘，得到

$$0 = (A-\lambda_1 I)(c_1 P_{1,2} + c_4 P_{2,2}) \Rightarrow c_1 P_{1,2} + c_4 P_{2,2} \in Null(A-\lambda_1 I) \Rightarrow c_1 = c_4 = 0$$

$$\text{例子: } \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 2, A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$m = 5 - rank(A - \lambda I) = 2$ 。故有两个约当块。

$rank(A - \lambda I) - rank(A - \lambda I)^2 = 2$ ，有 2 个约当块的阶次大于 1 ($>=2$)。

$rank(A - \lambda I)^2 - rank(A - \lambda I)^3 = 1$ ，有 1 个约当块的阶次大于 2 ($>=3$)

$rank(A - \lambda I)^3 - rank(A - \lambda I)^4 = 0$ ，停止。

我们知道一个约当块的阶次为 3，另一个约当块的阶次为 2。

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & 1 & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

下面求 P 矩阵:

$\text{Null}((A - \lambda I)^3) = R^5$, 即其为全空间。

$\text{Null}((A - \lambda I)^2) = \text{span}\{e_1, e_2, e_4, e_5\}$ 。

$P_{1,3} \in \text{Null}(A - \lambda_1 I)^3 - \text{Null}(A - \lambda_1 I)^2$ 。就取 $P_{1,3} = e_3$ 。下面易得:

$$P_{1,2} = (A - 2I)P_{1,3} = (A - 2I)e_3 = e_2, \quad P_{1,1} = (A - 2I)P_{1,2} = e_1$$

$\text{Null}(A - \lambda I) = \text{span}\{e_1, e_5\}$

$$P_{2,2} \in \text{Null}(A - \lambda_1 I)^2 - \text{Null}(A - \lambda_1 I) - \text{span}(P_{1,2}) = \text{span}(e_1, e_2, e_4, e_5) - \text{span}(e_1, e_5) - \text{span}(e_2)$$

可取 $P_{2,2} = e_4$ 。 $P_{2,1} = (A - 2I)P_{2,2} = e_5$

$$\text{故而 } P = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_5 \quad e_4] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6. 化零多项式与最小多项式:

定义 m 阶多项式 $f(\lambda) = \lambda^m + \beta_1\lambda^{m-1} + \beta_2\lambda^{m-2} + \cdots + \beta_m$ 。

如果 $f(A) = A^m + \beta_1A^{m-1} + \beta_2A^{m-2} + \cdots + \beta_mI = 0$, 则称 $f(\lambda)$ 为 A 的化零多项式。

阶次最低的 A 的化零多项式, 称为 A 的最小多项式。

定理 5.3.2 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 是 A 的化零多项式。 $\lambda I - A$ 的 Smith 标准型如下:

$$\lambda I - A \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \phi_1(\lambda) & & & \\ & \phi_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \phi_n(\lambda) \end{bmatrix}。$$

则 $\phi_n(\lambda)$ 是 A 的最小多项式。

证明：见书上。（113 页）

$$\lambda^i I - A^i = (A^{i-1} + \lambda A^{i-2} + \cdots + \lambda^{i-1} I)(\lambda I - A), \forall i = 1, 2, \cdots$$

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i, a_n = 1$$

$$\text{adj}(\lambda I - A) \times (\lambda I - A) = |\lambda I - A| I = f(\lambda) I$$

$$\begin{aligned} f(\lambda) I - f(A) &= \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i I - \sum_{i=0}^n a_i A^i \\ &= \sum_{i=0}^n a_i (\lambda^i I - A^i), A^0 = I, \lambda^0 = 1 \\ (1)、化零多项式： &= \sum_{i=1}^n a_i (\lambda^i I - A^i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i (A^{i-1} + \lambda A^{i-2} + \cdots + \lambda^{i-1} I) \right) (\lambda I - A) \\ &= P(\lambda) (\lambda I - A) \end{aligned}$$

同时， $f(\lambda) I = \text{adj}(\lambda I - A) \times (\lambda I - A)$ 。带入上式，可得

$$\begin{aligned} f(A) &= \text{adj}(\lambda I - A) \times (\lambda I - A) - P(\lambda) (\lambda I - A) \\ &= (\text{adj}(\lambda I - A) - P(\lambda)) (\lambda I - A) \end{aligned}$$

由于 $(\lambda I - A)$ 正则，且 $\deg(\lambda I - A) = 1 > \deg(f(A)) = 0$ 。故由引理 5.1.4，得

$$f(A) = 0$$

$$(2) \quad \text{最小多项式：} \text{adj}(\lambda I - A) \times (\lambda I - A) = |\lambda I - A| I = f(\lambda) I。$$

$d_{n-1}(\lambda)$ 是 $(\lambda I - A)$ 的所有 $n-1$ 阶子式的公因子；而 $\text{adj}(\lambda I - A)$ 正是由 $(\lambda I - A)$ 的所有 $n-1$ 阶子式组成。因此， $d_{n-1}(\lambda)$ 是 $\text{adj}(\lambda I - A)$ 的所有元素的共因子：

$$\text{adj}(\lambda I - A) = d_{n-1}(\lambda) B(\lambda)$$

n 阶行列式因子为 $d_n(\lambda) = f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 。已知，不变因子 $\phi_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)}$ 。故

$$f(\lambda) = d_{n-1}(\lambda) \phi_n(\lambda)。因此 \text{adj}(\lambda I - A) \times (\lambda I - A) = f(\lambda) I 给出$$

$$d_{n-1}(\lambda) B(\lambda) \times (\lambda I - A) = d_{n-1}(\lambda) \phi_n(\lambda) I$$

两边消去 $d_{n-1}(\lambda)$ ，得到

$$B(\lambda) \times (\lambda I - A) = \phi_n(\lambda) I$$

由于 $\phi_n(\lambda) I - \phi_n(A) = K(\lambda) (\lambda I - A)$ 。故

$$\phi_n(A) = \phi_n(\lambda)I - K(\lambda)(\lambda I - A) = (B(\lambda) - K(\lambda))(\lambda I - A)$$

由于 $(\lambda I - A)$ 正则，且 $\deg(\lambda I - A) = 1 > \deg(\phi_n(A)) = 0$ 。故由引理 5.1.4，得

$\phi_n(A) = 0$ 。因此 $\phi_n(\lambda)$ 是化零多项式。

假设 $\phi_n(\lambda)$ 不是最小化零多项式。假设最低阶的化零多项式为 $\varphi(\lambda)$ （其必然是所有化零多项式的最大公因子）。必有

$$\phi_n(\lambda) = \beta(\lambda)\varphi(\lambda)$$

$$B(\lambda) \times (\lambda I - A) = \phi_n(\lambda)I \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} B(\lambda) \times (\lambda I - A) &= \beta(\lambda)\varphi(\lambda)I = \beta(\lambda)(\varphi(\lambda)I) \\ &= \beta(\lambda)(\varphi(\lambda)I - \varphi(A)) \\ &= \beta(\lambda)F(\lambda)(\lambda I - A) \end{aligned}$$

移项得到： $(B(\lambda) - \beta(\lambda)F(\lambda)) \times (\lambda I - A) = 0$ 。有引理 5.1.4 得到，

$$B(\lambda) = \beta(\lambda)F(\lambda)$$

$B(\lambda)$ 中所有元素有一个公因子 $\beta(\lambda)$ ，其 $\beta(\lambda)$ 的阶次至少是一阶的。已知 $B(\lambda)$ 是将 $\text{adj}(\lambda I - A)$ 的所有元素消去它们的最大公因子 $d_{n-1}(\lambda)$ 得到的，消完后剩下的元素的公因子为 1。这就产生矛盾！