中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

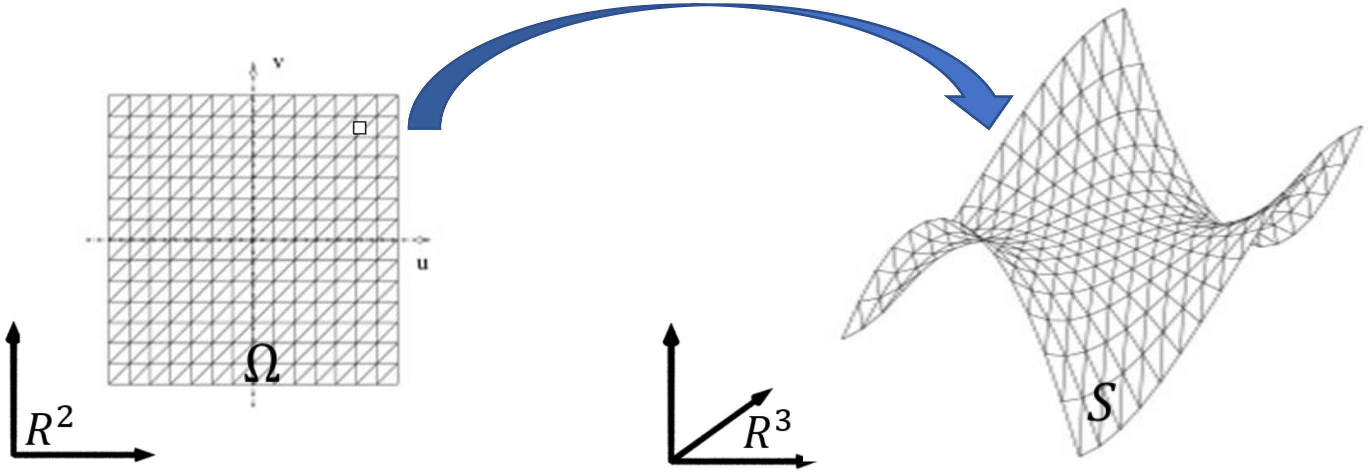
计算机图形学
Computer Graphics

陈仁杰
renjiec@ustc.edu.cn
http://staff.ustc.edu.cn/~renjiec

Surface Parameterization
曲面参数化

2D Manifold Surface in $\mathbb{R}^3$

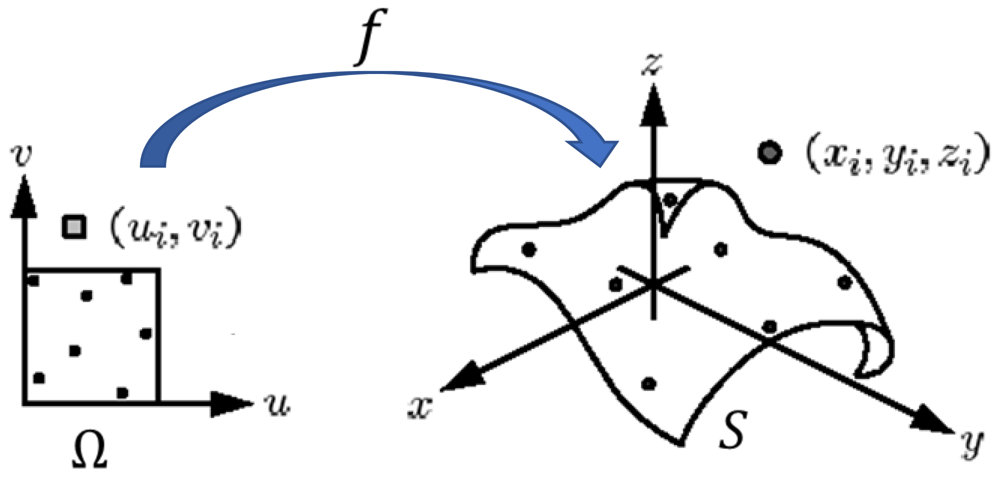
A surface S in $\mathbb{R}^3$ has an intrinsic dimension of 2D – a patch $\Omega \in \mathbb{R}^2$ is embedded into $\mathbb{R}^3$ (each point in Ω is assigned a position in $\mathbb{R}^3$)



Parameter domain

Embedded (ambient) space

Parametric Surfaces

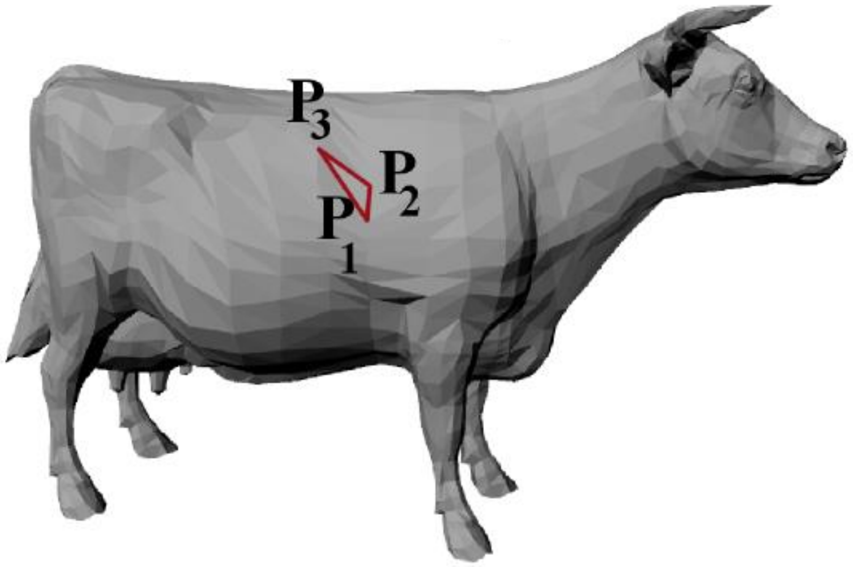


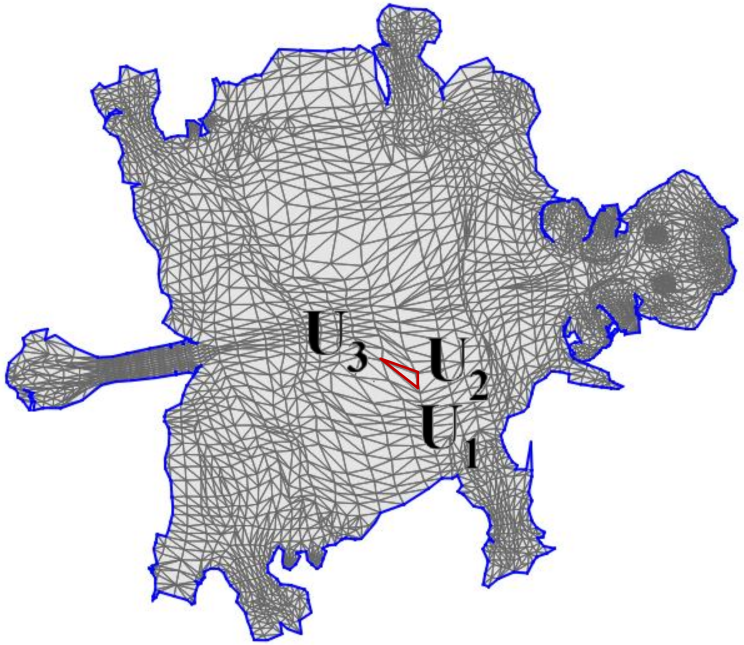
$$f : \Omega \to S$$

$$(u, v) \mapsto \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

参数化：将曲面展开成平面

- 每个3D顶点(x, y, z)对应一个2D点(u, v)
  - (u, v) 称为 (x, y, z) 的参数（2D流形曲面的本征维数）

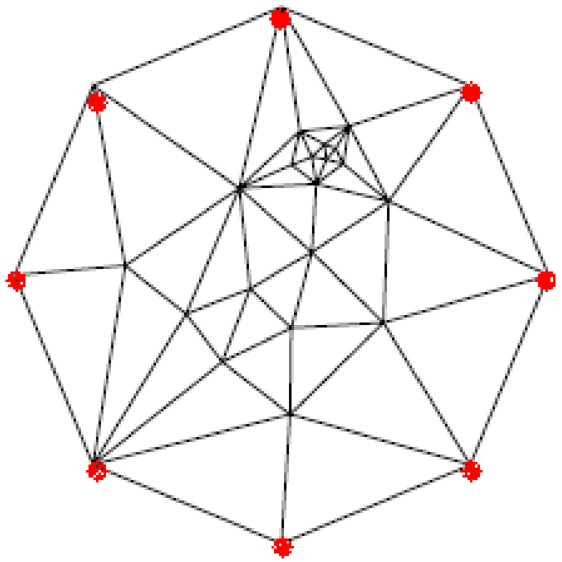




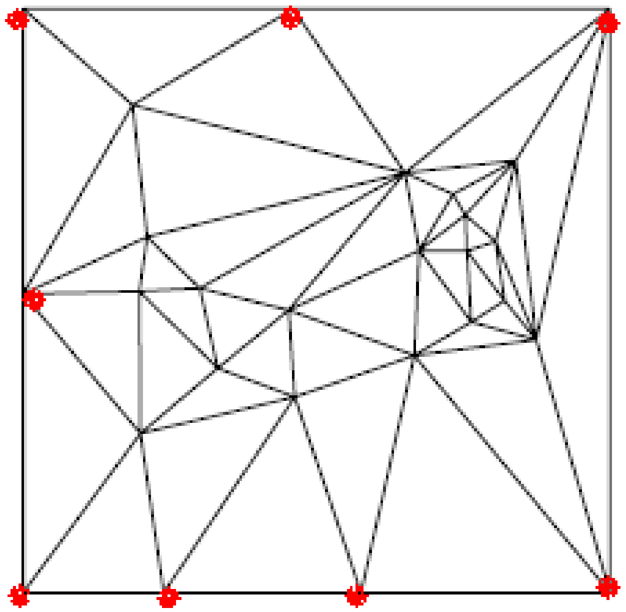
将边界映射到平面的凸多边形上

[Floater97]

Fixing the boundary of the mesh onto



an unit circle

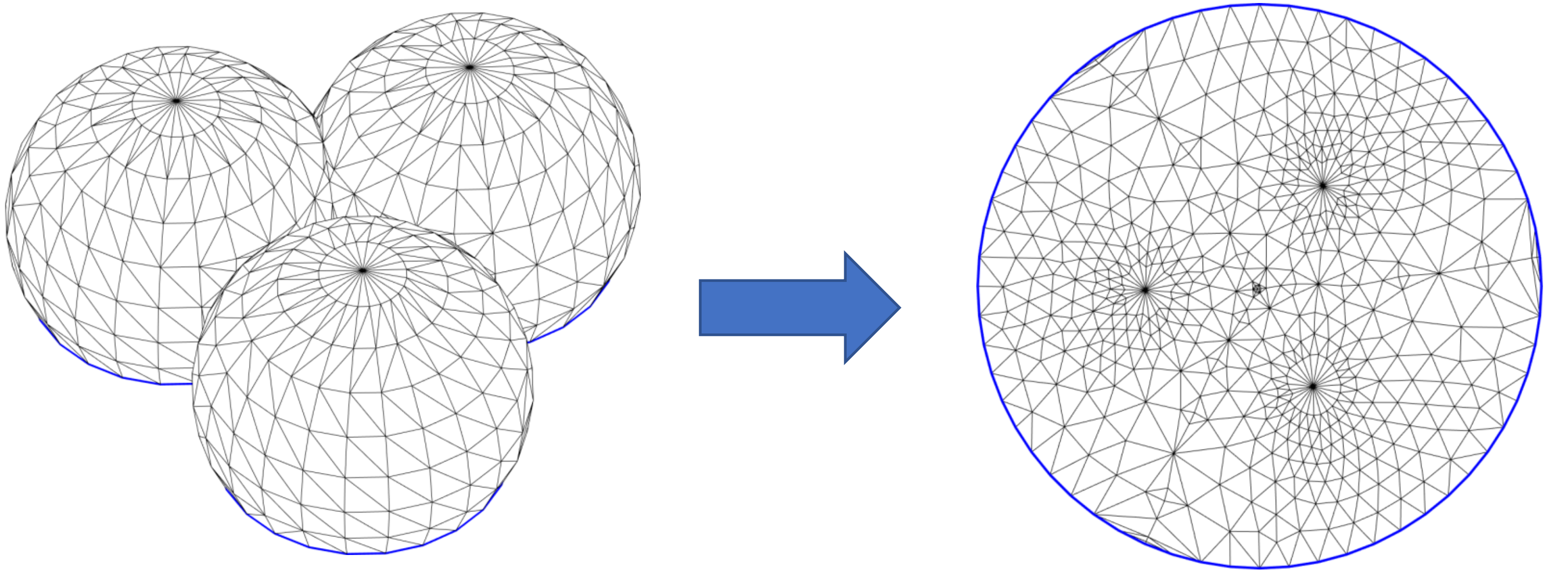


an unit square

Tutte's Method: Why it Works

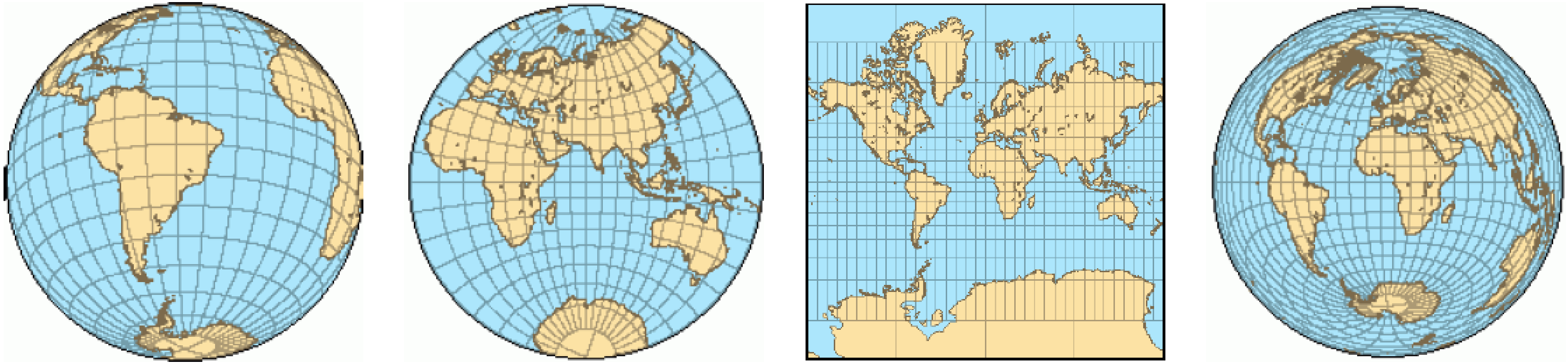
Theorem [Tutte63], [Maxwel1864] :

- If G=<V,E> is a 3-connected planar graph (triangular mesh) then any barycentric embedding provides a valid parameterization



如果边界位于凸多边形上，则Tutte Embedding中三角形一定不翻转！

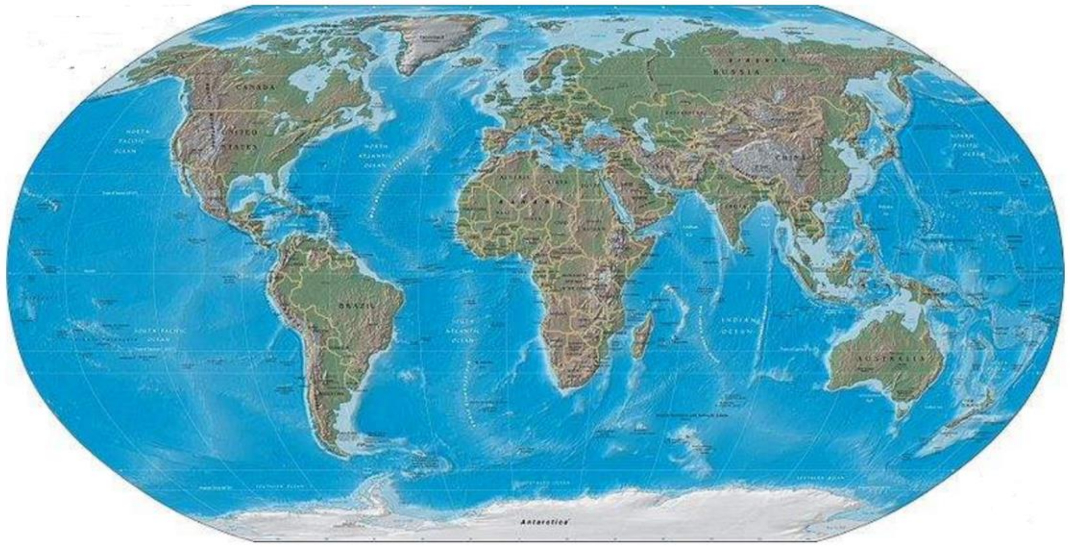
History



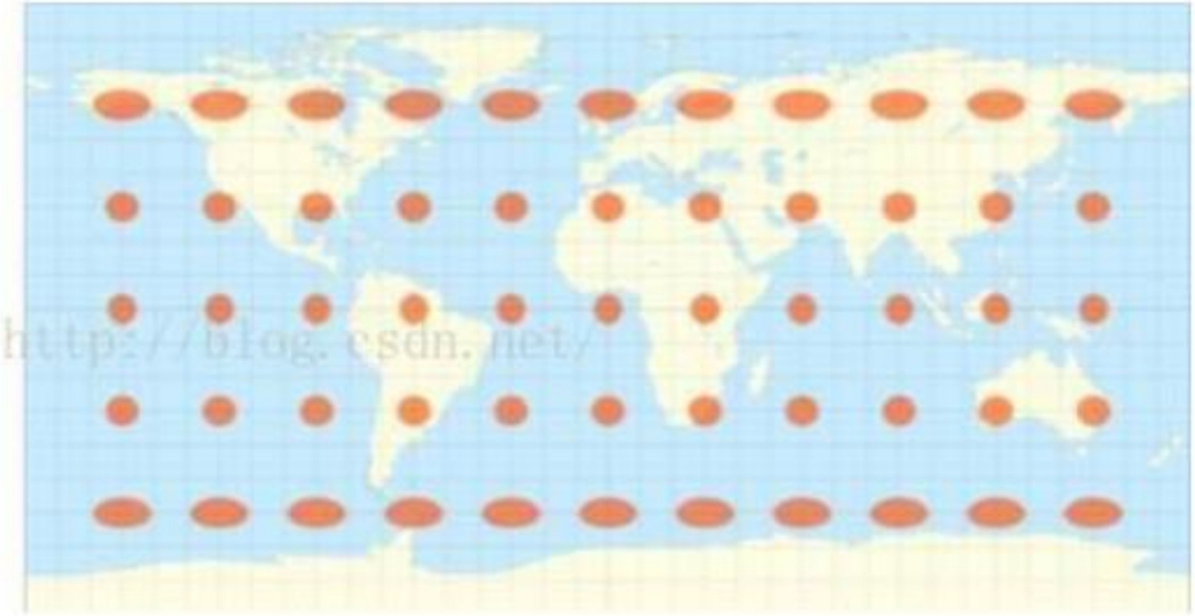
(a) (b) (c) (d)

地图：将地球“展平”成平面

- 3D地球表面和2D地图的点有一一对应



但，球面是不可展的，必有形变



思考：
1. 地图上的两点之间的距离是真实距离吗？哪些地方的距离可信度更高？
2. 地图上看，哪些区域的面积被放大了？

思考：北京和纽约的最短路径是什么？

将球面割开展平的不同方式

沿经线切

沿北纬15度的纬线切

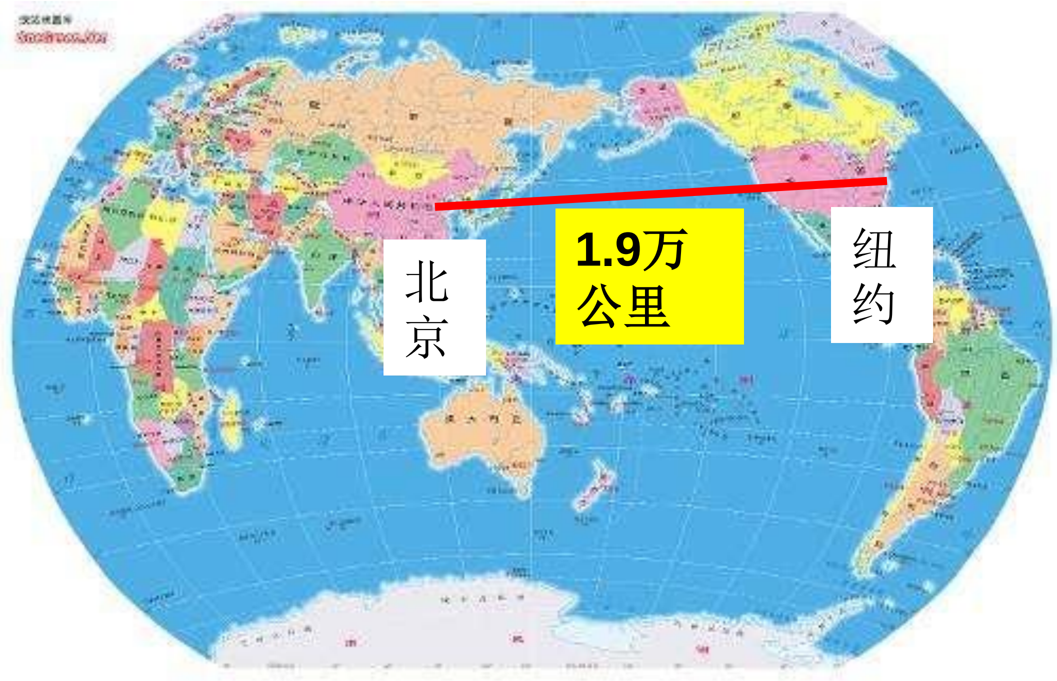
传统横板地图

沿经线切开

新型竖板地图

沿北纬15度的纬线切开

北京-纽约的最短路径



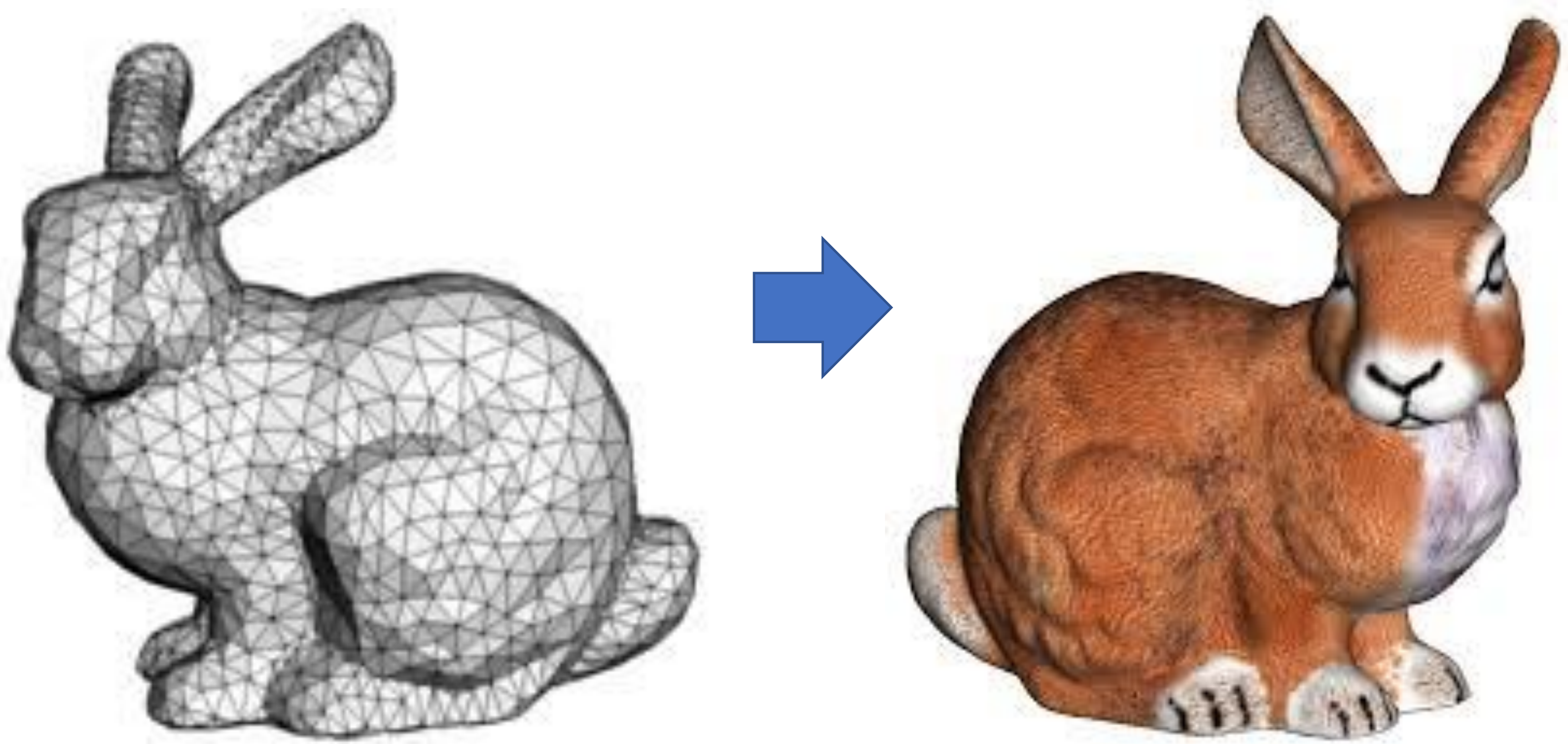
参数化是几何处理中的最基本问题

- 提供了三维曲面每个点的一个二维参数
  - 本征维数参数

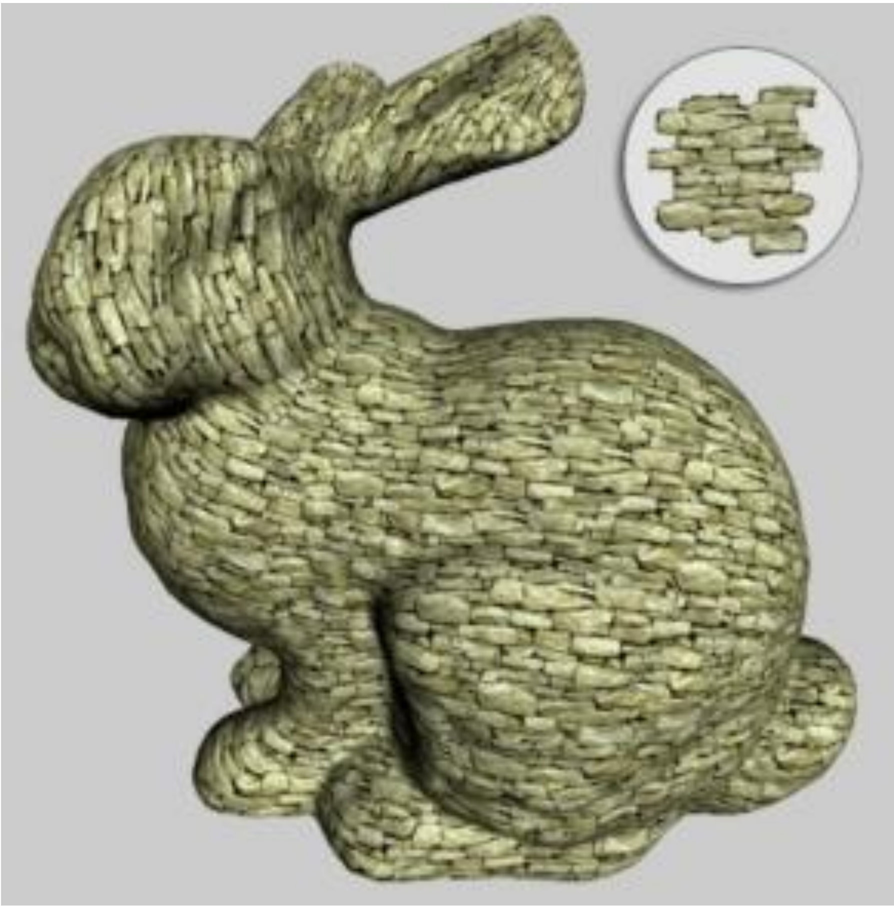
- 在低维来处理高维问题，减少复杂度
  - 降维

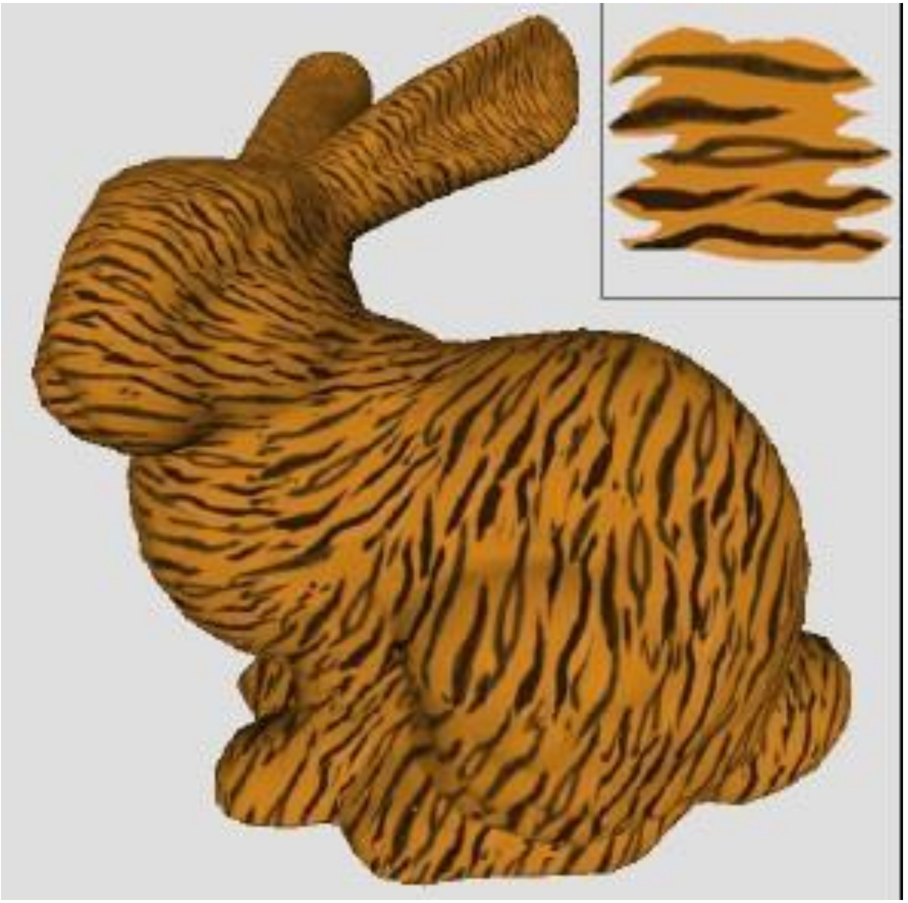
- 三维曲面之间的相关问题可通过参数化空间来处理

如何给三维曲面贴上颜色/纹理?

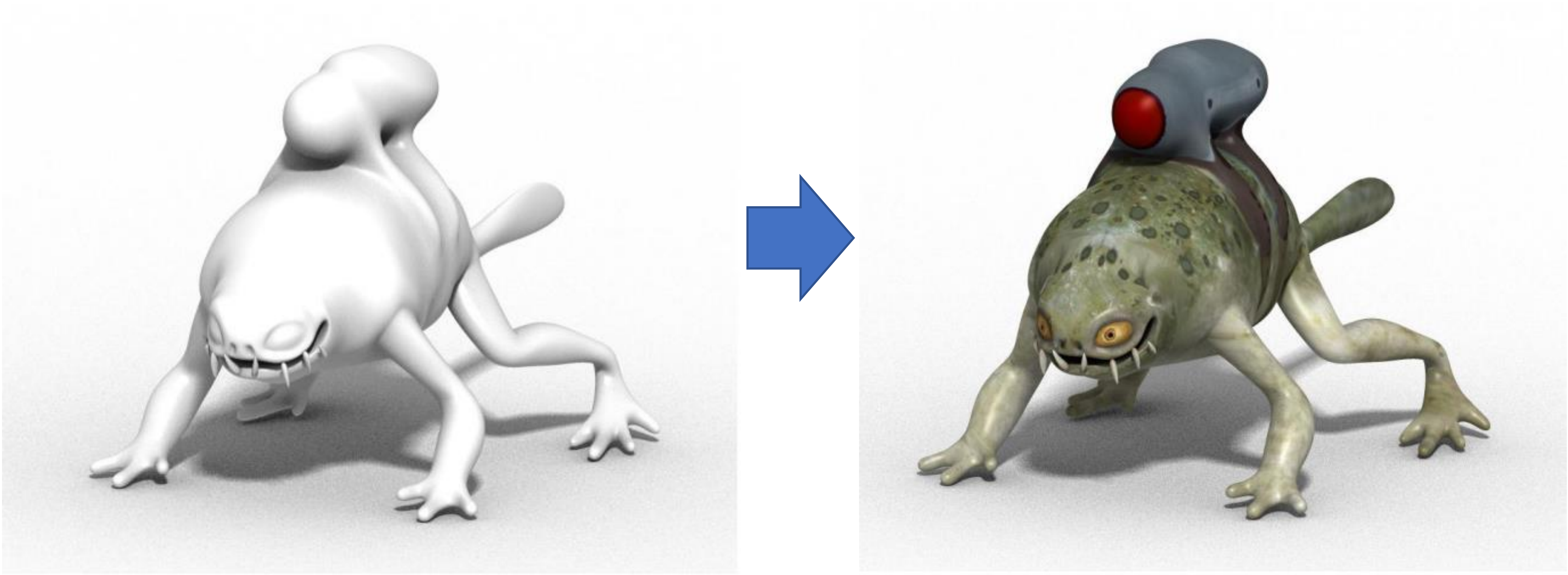


带纹理的Bunny

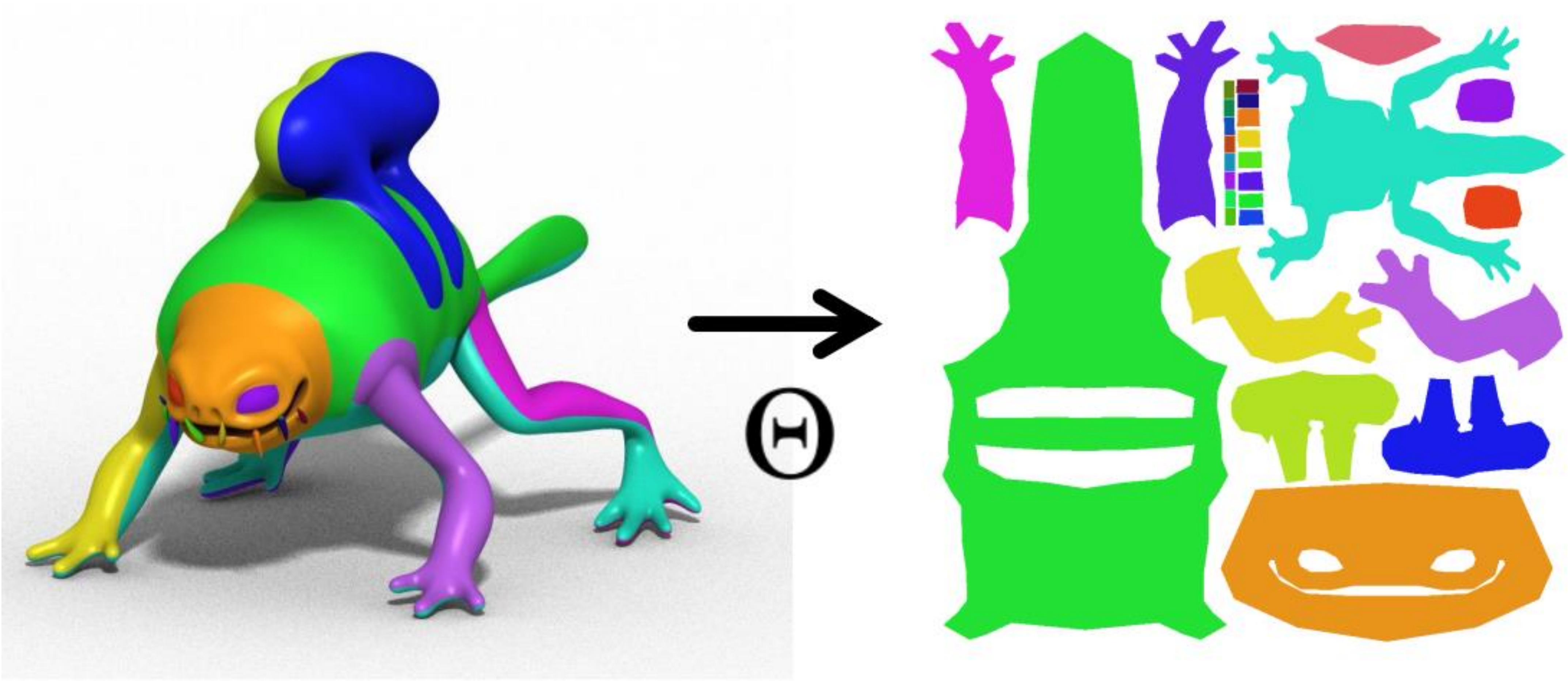




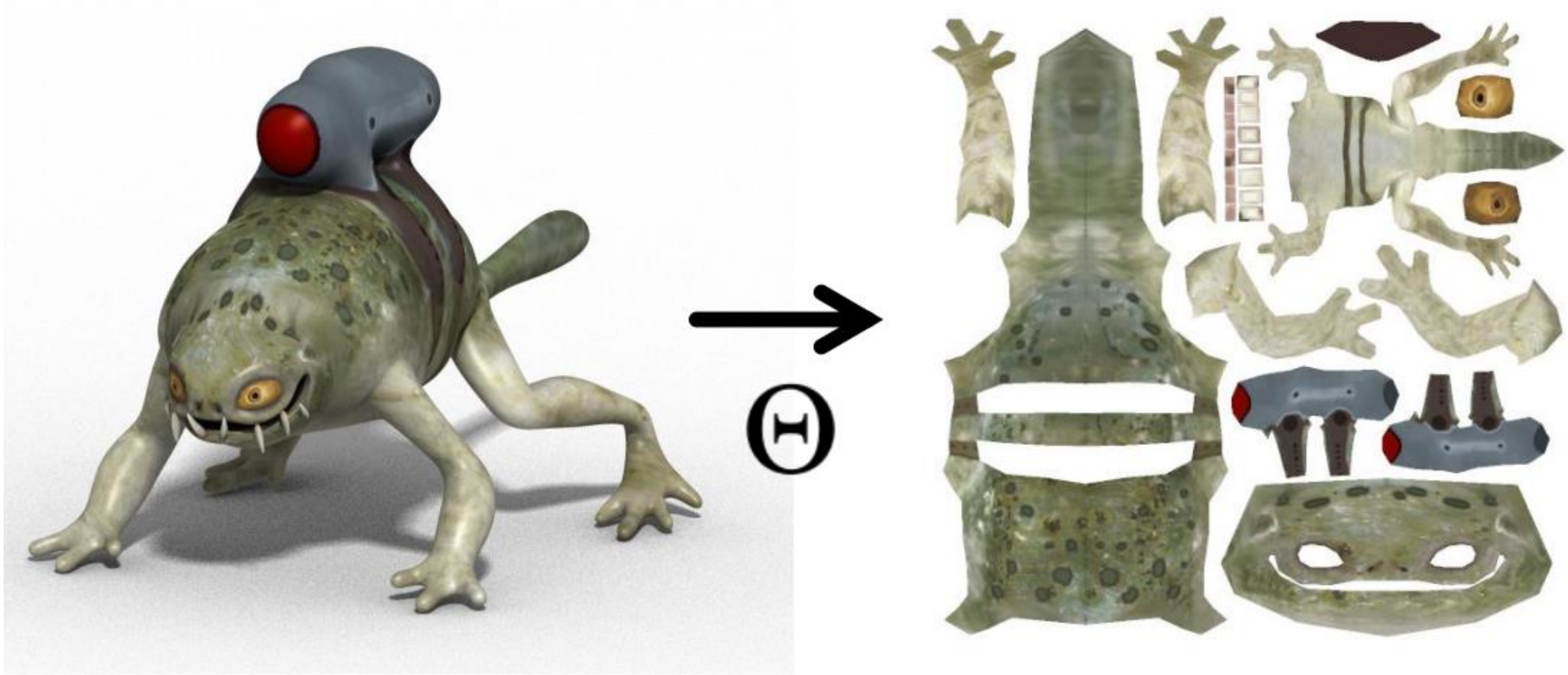
如何给三维曲面贴上颜色/纹理?



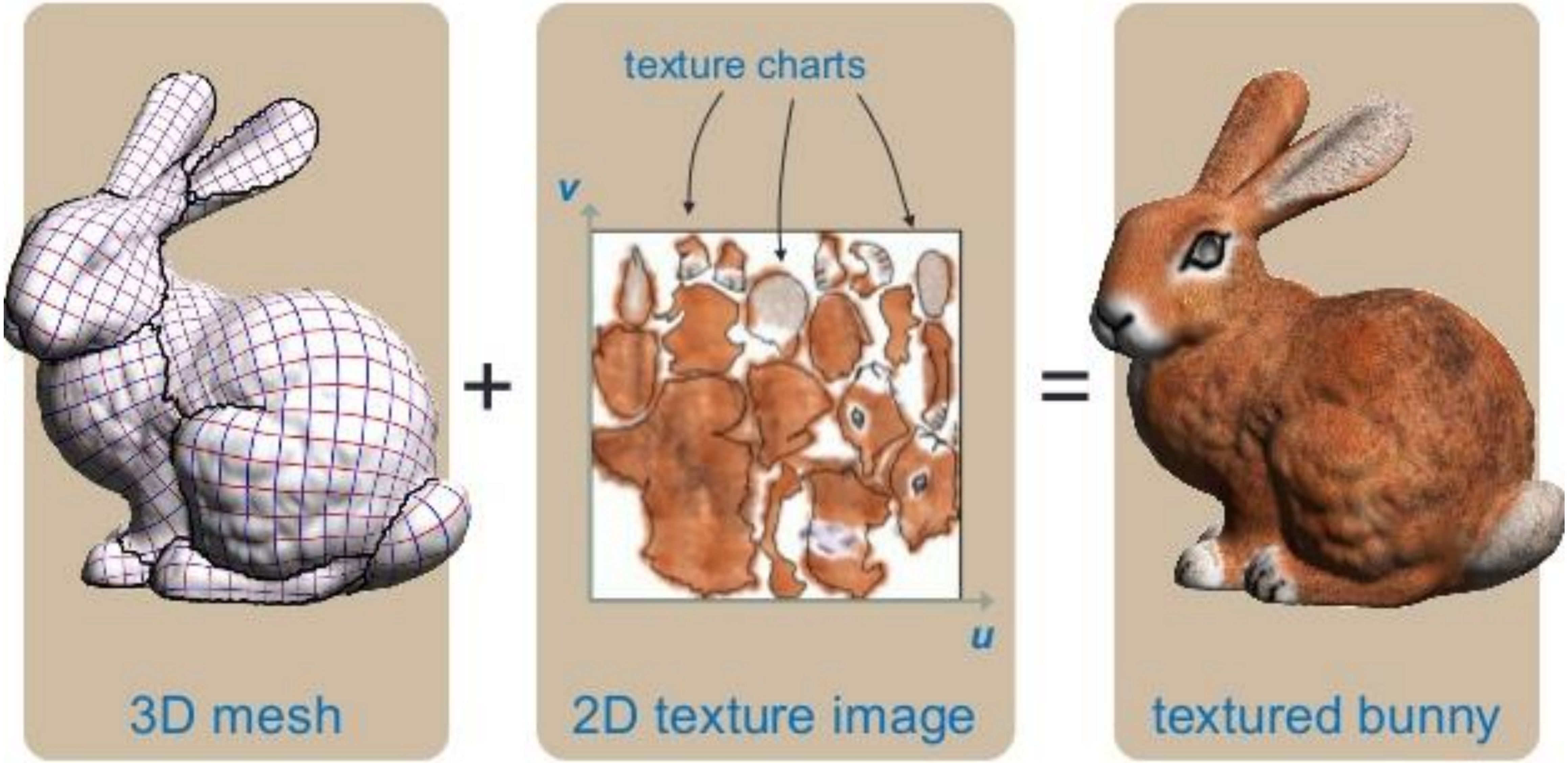
Parameterization



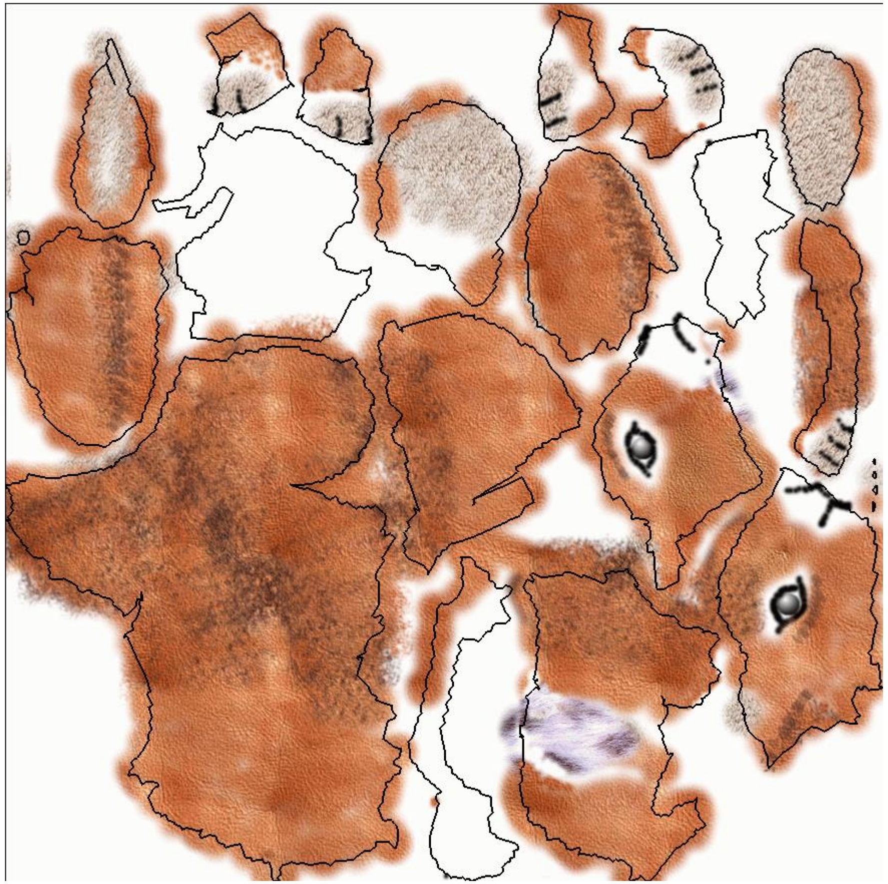
Parameterization



参数化的直接应用：纹理映射



曲面纹理的保存：2D图像



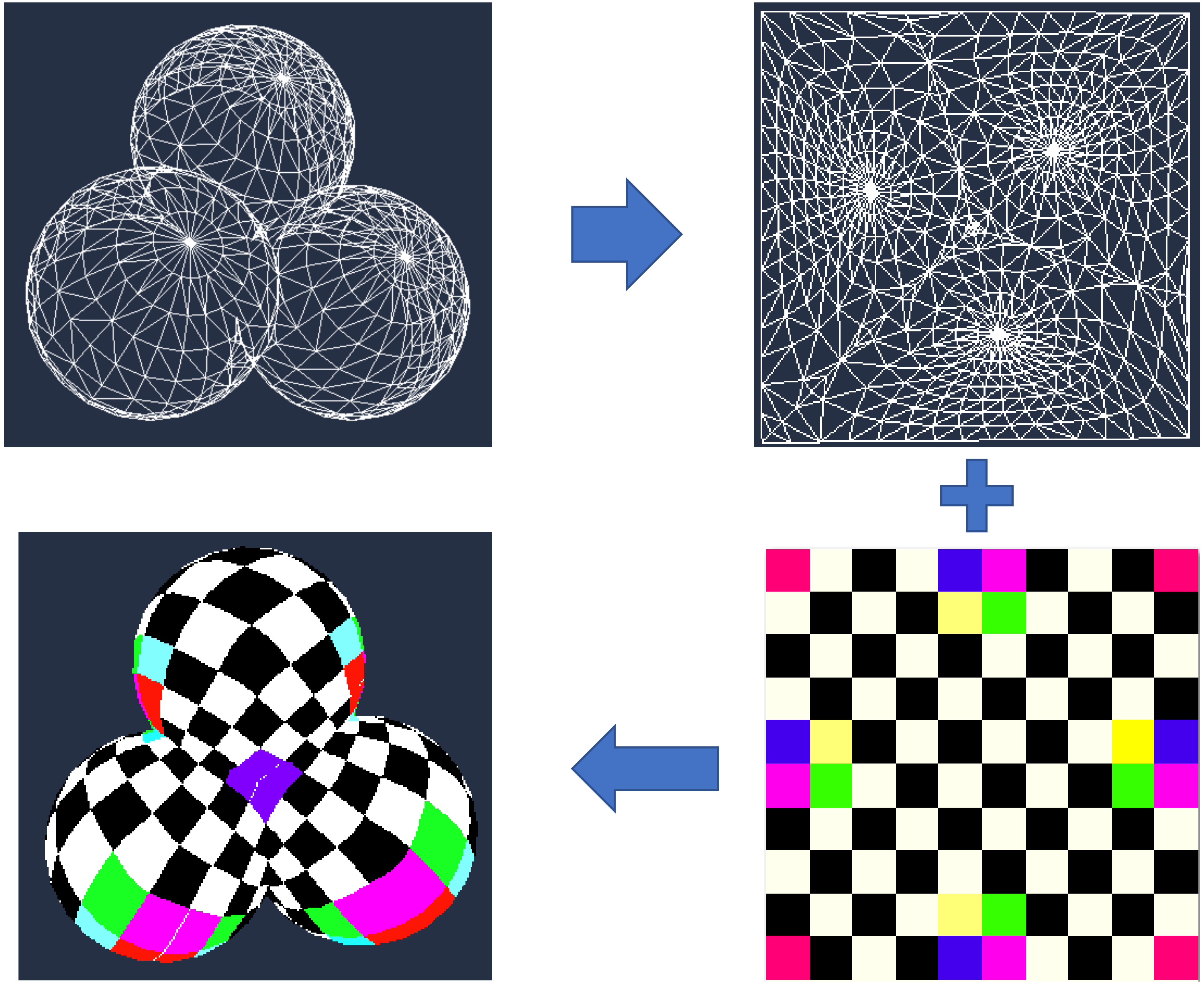
Floater参数化方法

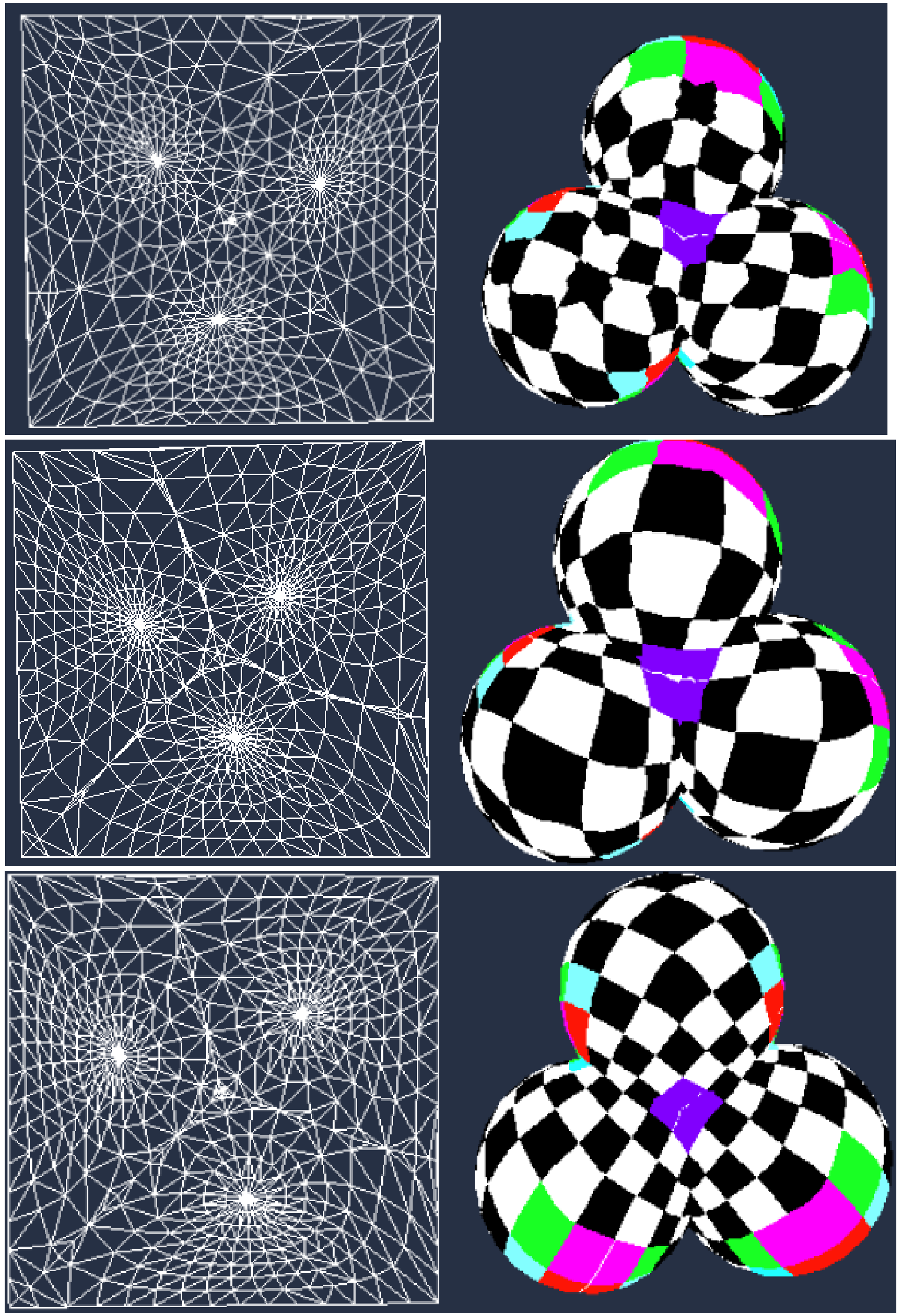
[Floater 97’]

- Uniform parametrization
- Shape-preserving parametrization

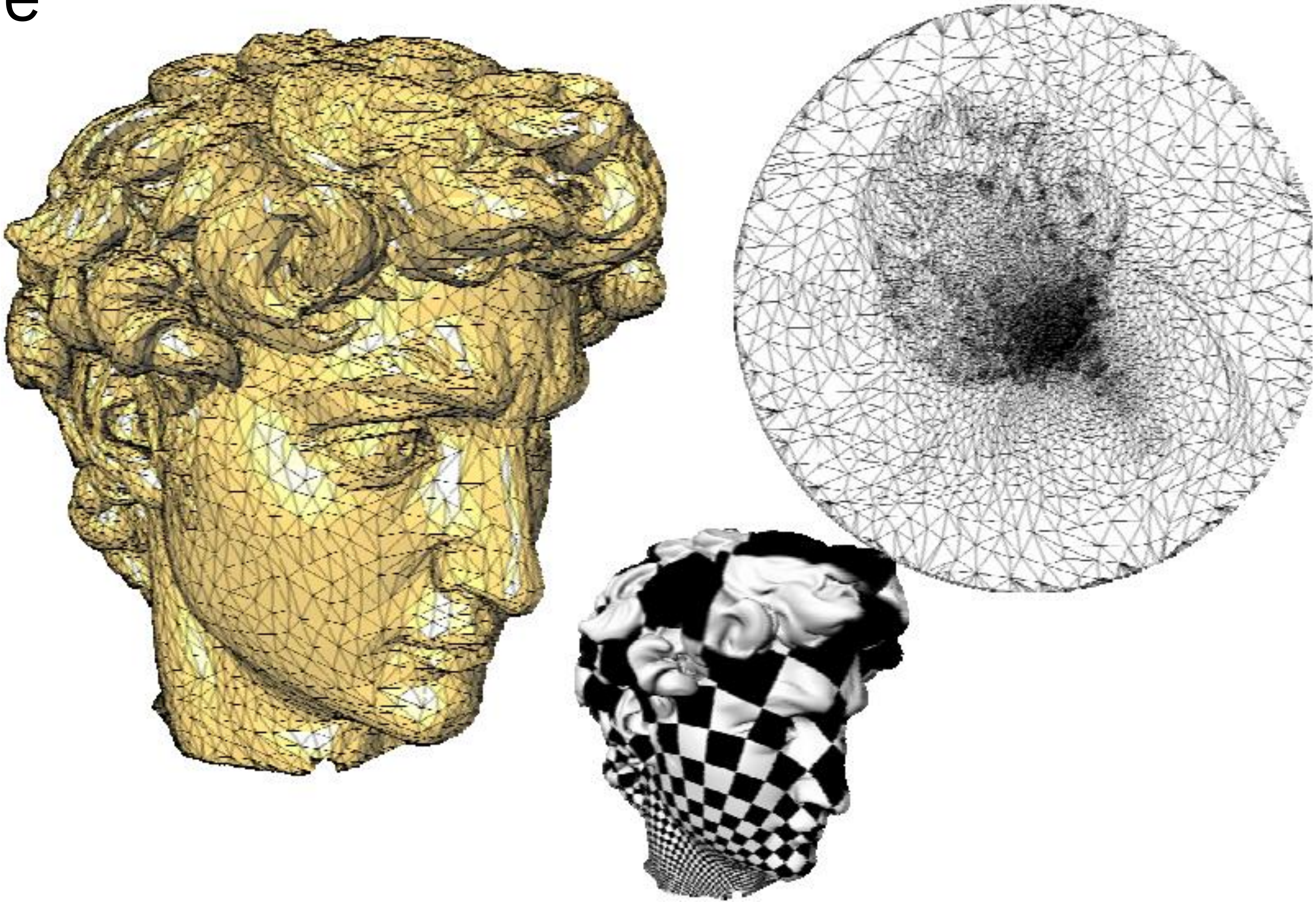
- 如何判断哪个参数化方法更好?

纹理映射

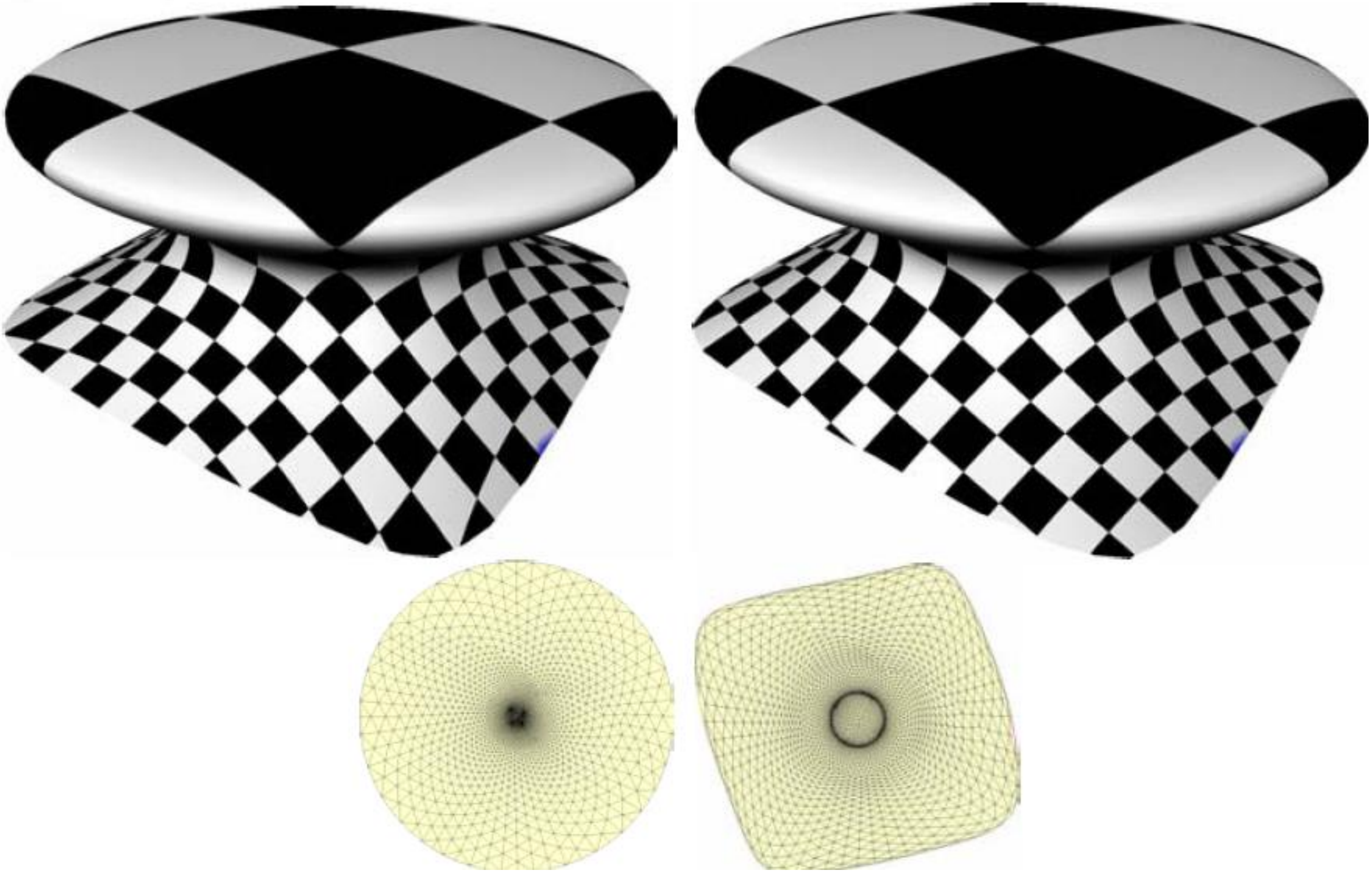




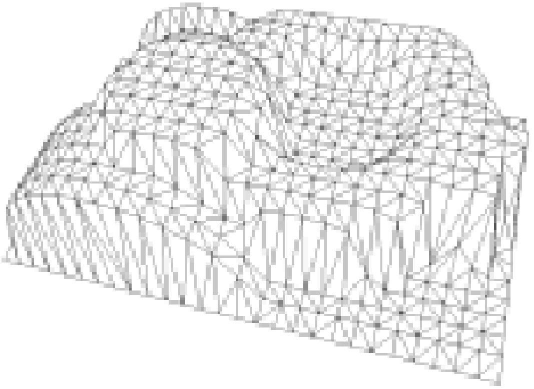
Example



Example

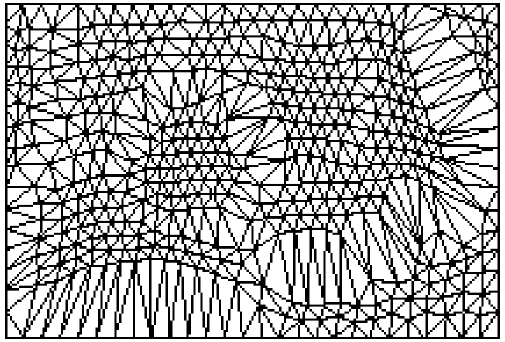


Other Methods

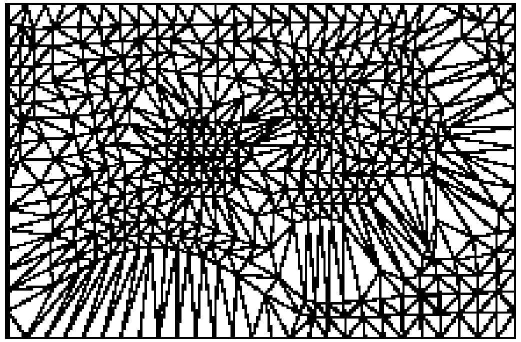


linear spring-energy:

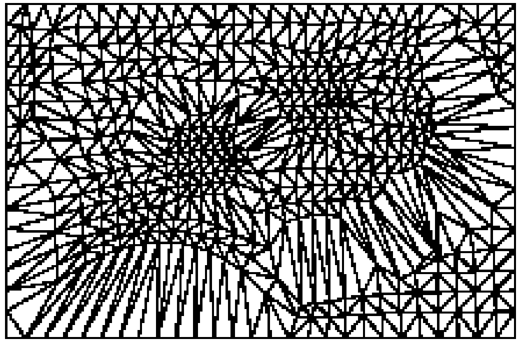
$$E = \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \in \text{Edges}} c_{ij} \, ||p_i - p_j||^2$$



Hooke's law



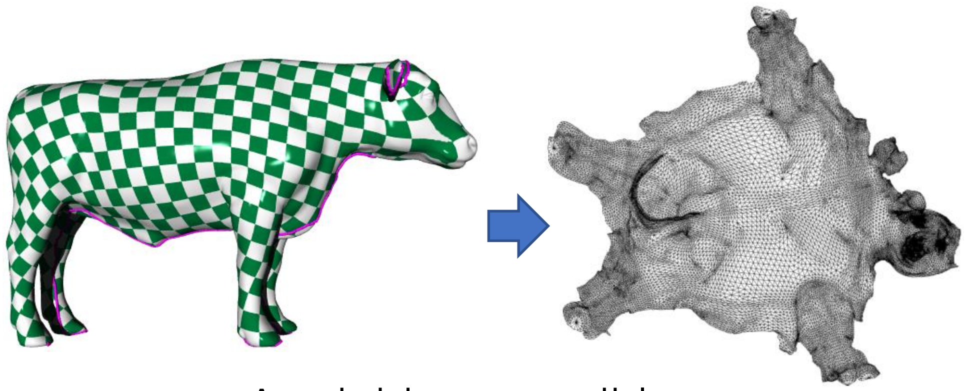
shape-preserving



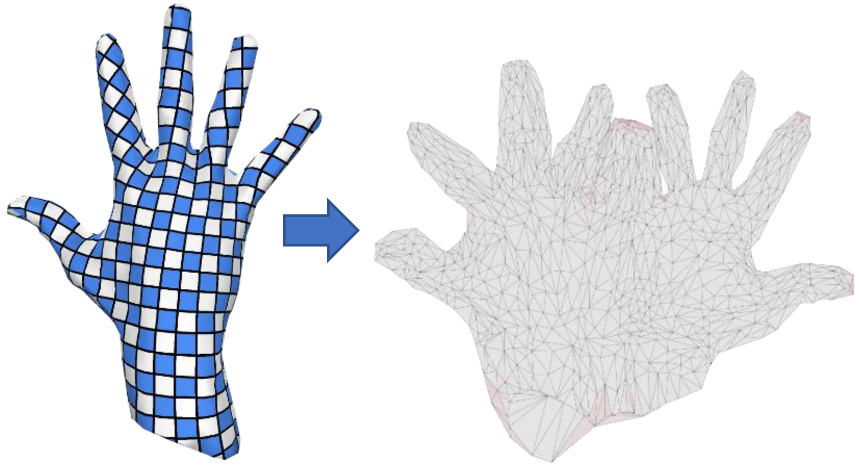
harmonic energy

Parameterization with free boundary

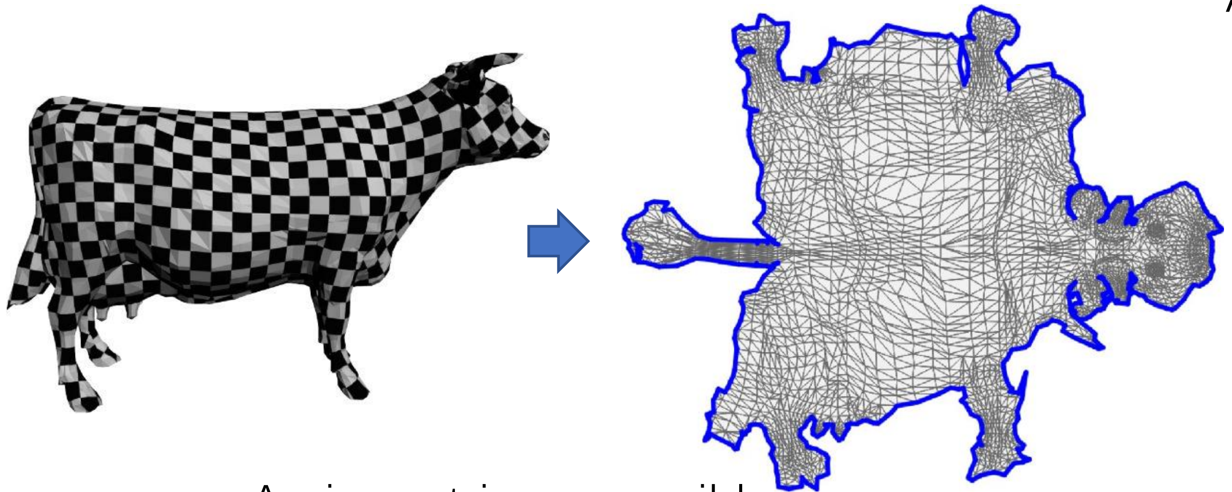
For surface with Disk topology



As-rigid-as-possible
(ARAP)



As-isometric-as-possible
Locally injective

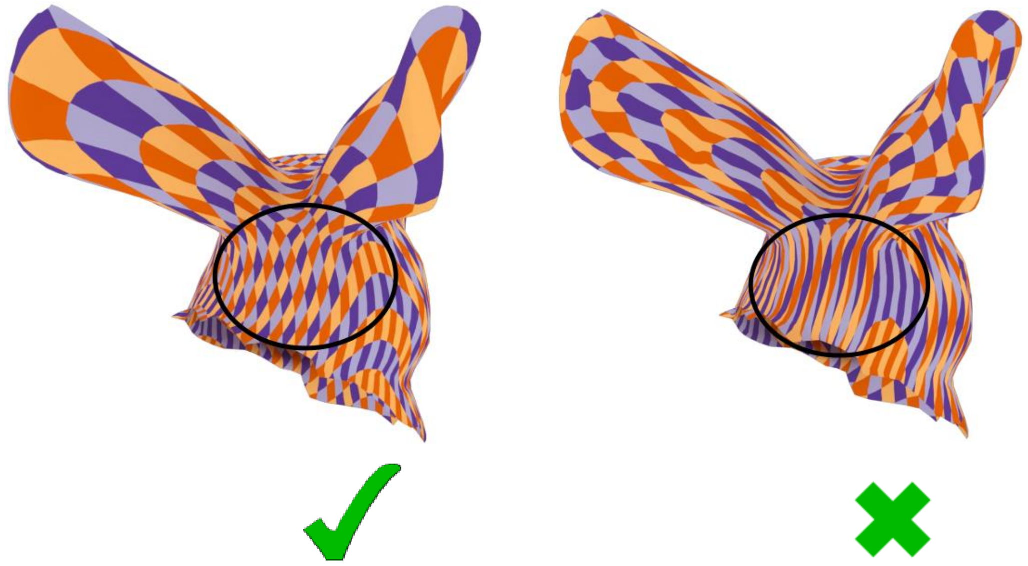


As-isometric-as-possible
Bijective

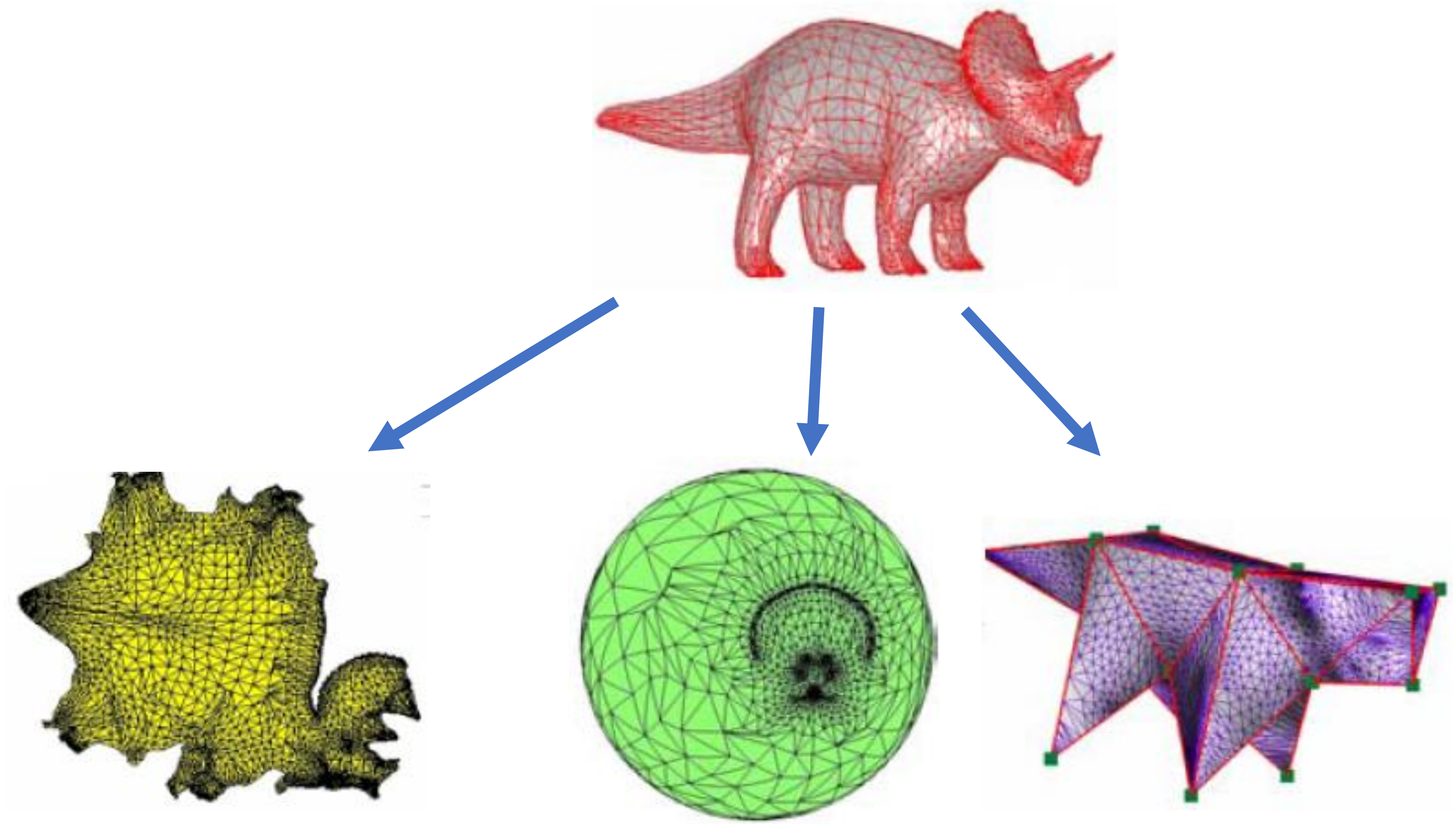
More about Parameterization

参数化的数学本质：映射

- Low distortion
- Locally injective
- Globally bijective
- Effective
- Smooth
- … …



不同的参数化定义域（参数域）



平面参数化　球面参数化　流形参数化

Surface Parameterization

Q: What is a **good** parameterization?

A: One that preserves all the basic geometry length, angles, area, …

→ **Isometric parameterization**

But: only possible for developable surfaces

e.g. there will always be distortions!

Try to keep the distortion as low as possible

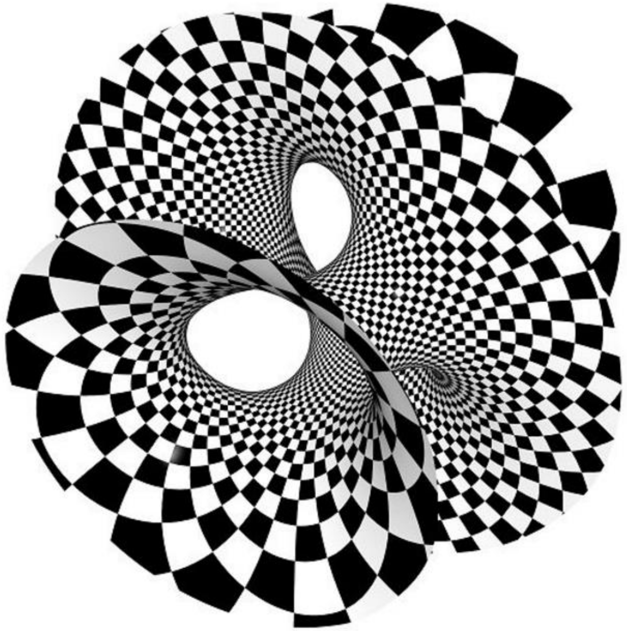
求解映射的方法

- 连续方法
  - 首先求一个连续光滑的映射函数
  - 然后采样得到离散三角网格
  - 特点：理论漂亮，实际操作有采样的问题
- 离散方法
  - 直接从离散三角网格映射到结果网格
  - 特点：直接求解分片线性映射
- 混合方法

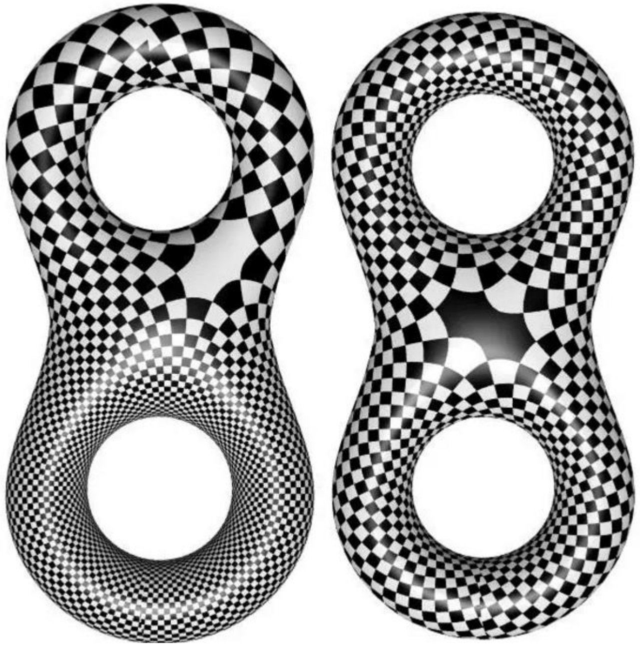
求解映射的连续方法

代表方法：计算共形几何（丘成桐、顾险峰）

- 相关学科：代数拓扑、复变函数、几何测度论、微分几何、黎曼面理论、几何偏微分方程、Teichmuller理论、Ricci流理论



Costa极小曲面的共形结构

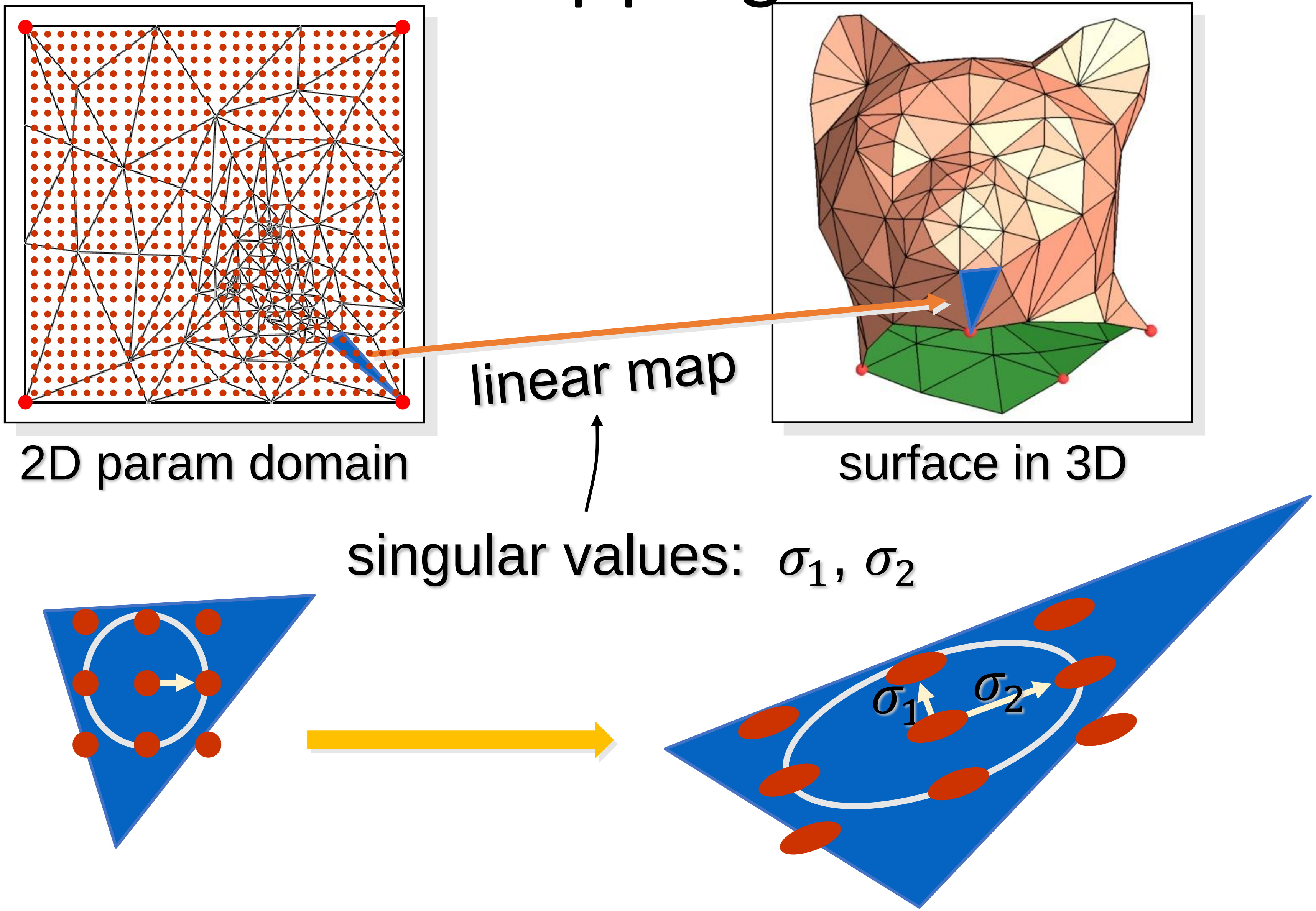


Riemann曲面上的全纯
1-形式构成复线性空间

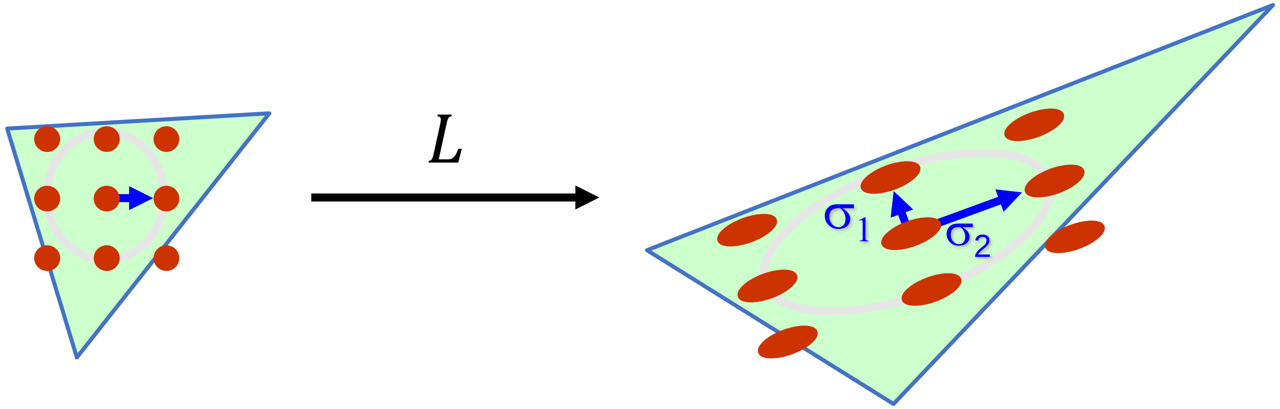
求解映射的方法

- 连续方法
  - 首先求一个连续光滑的映射函数
  - 然后采样得到离散三角网格
  - 特点：理论漂亮，实际操作有采样的问题
- 离散方法
  - 直接从离散三角网格映射到结果网格
  - 特点：直接求解分片线性映射
- 混合方法

Distortion of Linear Mapping



More Distortion Metric…



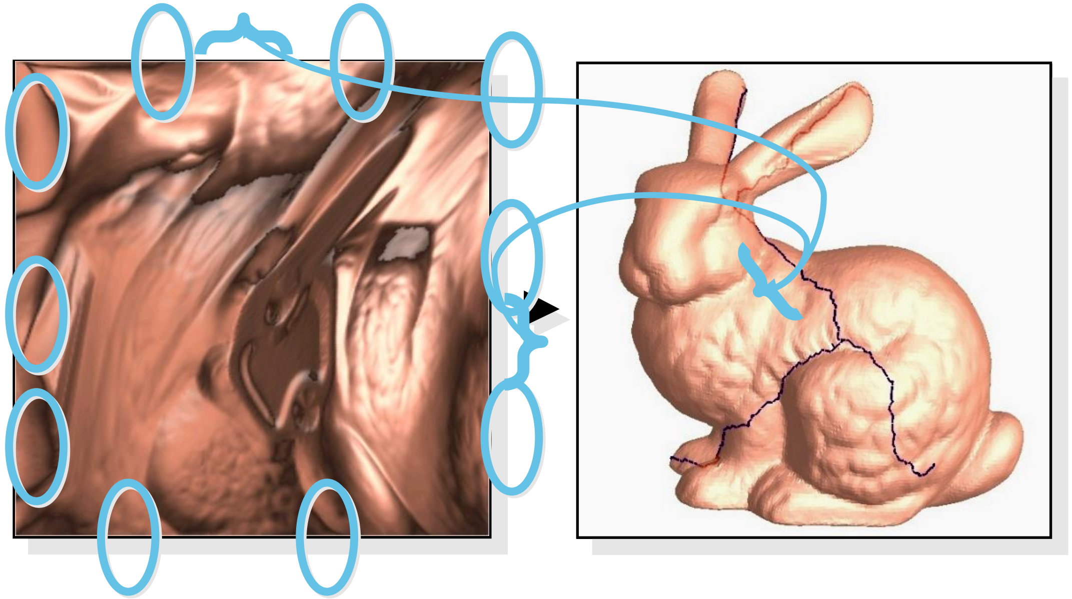
Angle-preserving (*conformal*) $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1$

Area-preserving (*authalic*) $\sigma_1 \sigma_2 = 1$

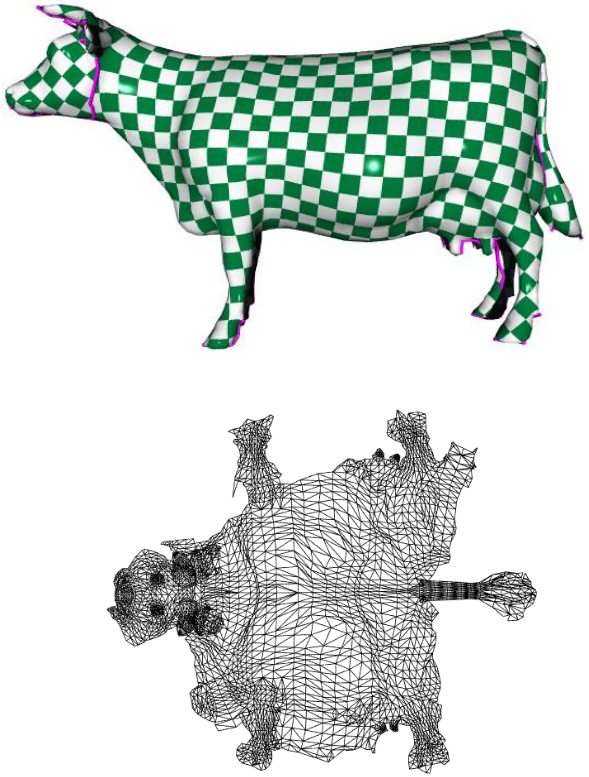
Length-preserving (*isometric*) $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$

平面参数化

- 封闭曲面需要割开



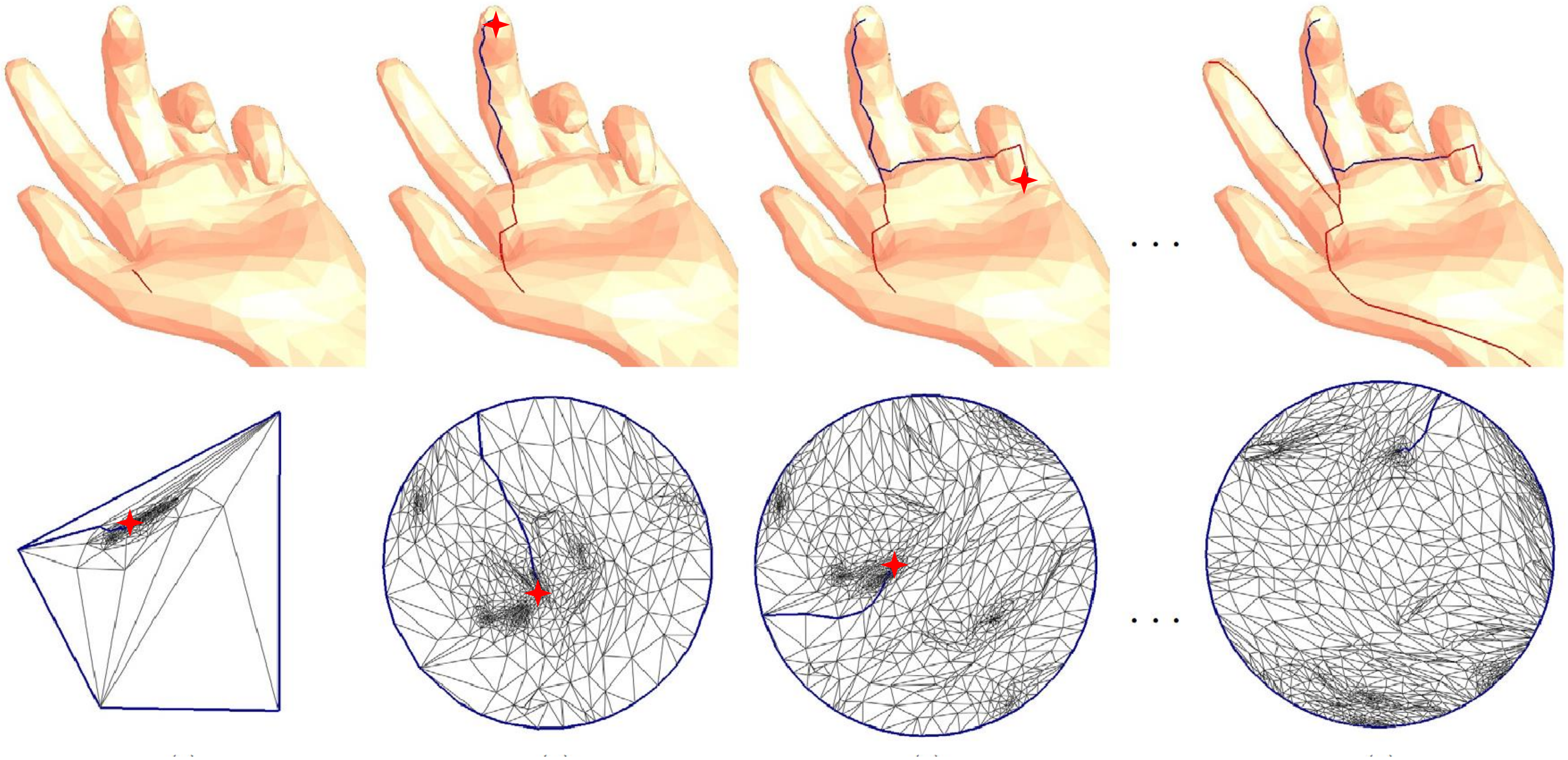
Geometry Image
[Gu et al. 2002]



ARAP Parametrization
[Liu et al. 2008]

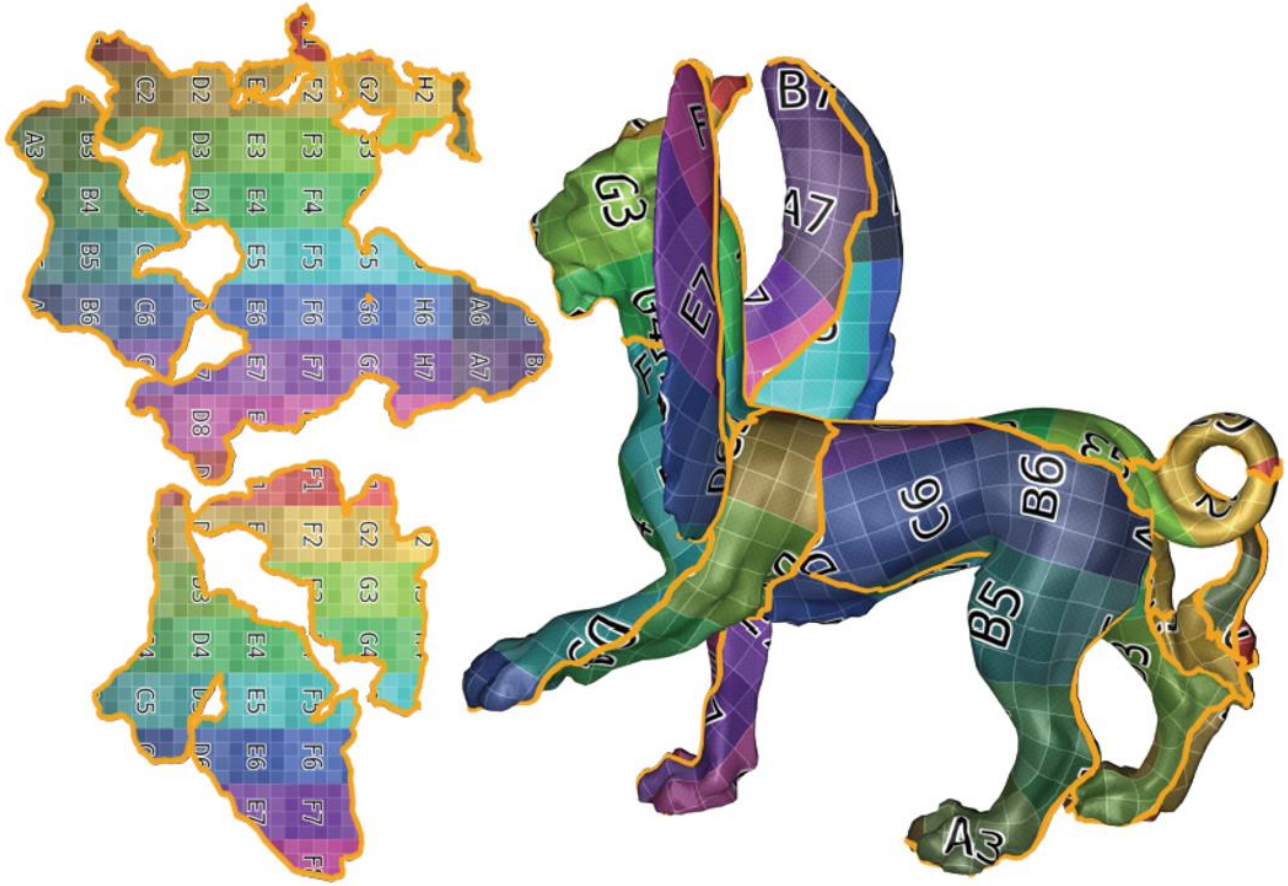
割缝问题的求解

- 拓扑（如何割开）＋几何（形变极小）



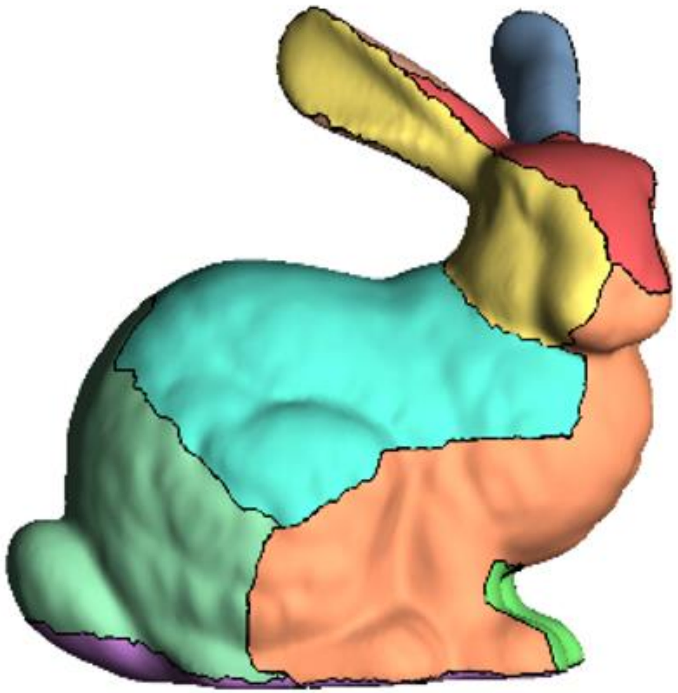
割缝问题的求解

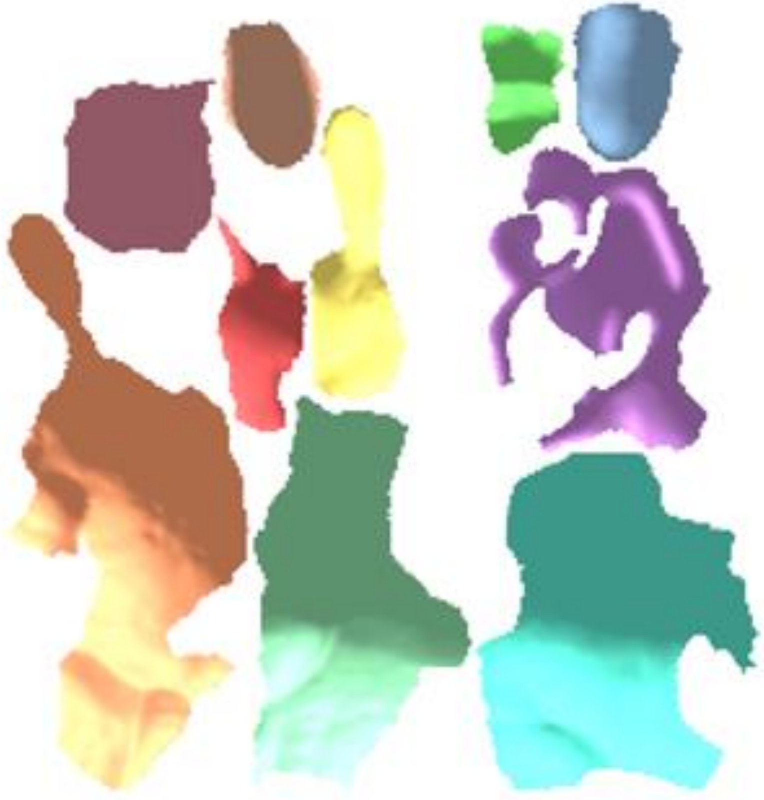
- 拓扑（如何割开） + 几何（形变极小）



分割：分片参数化

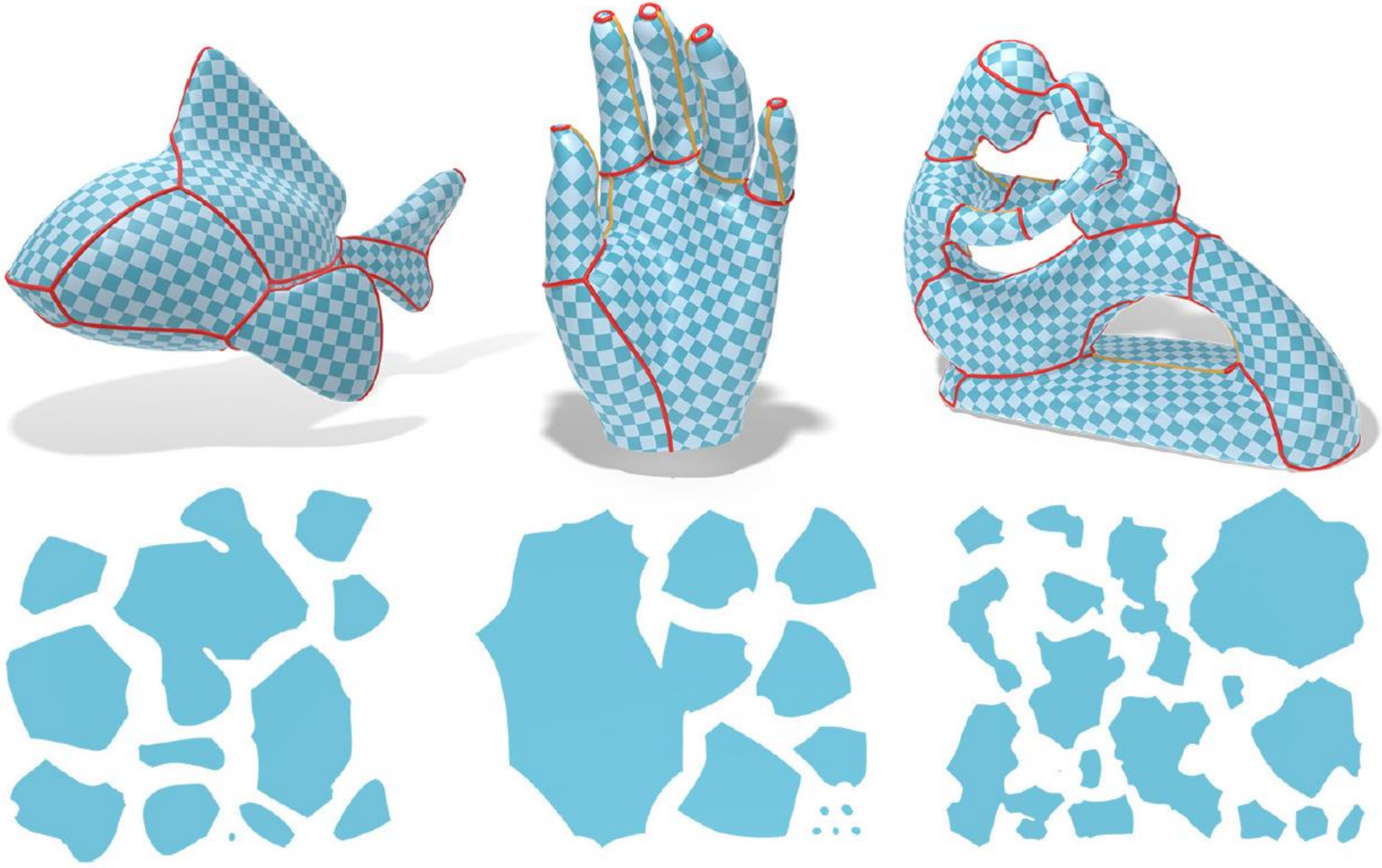
- 目的：减少几何形变



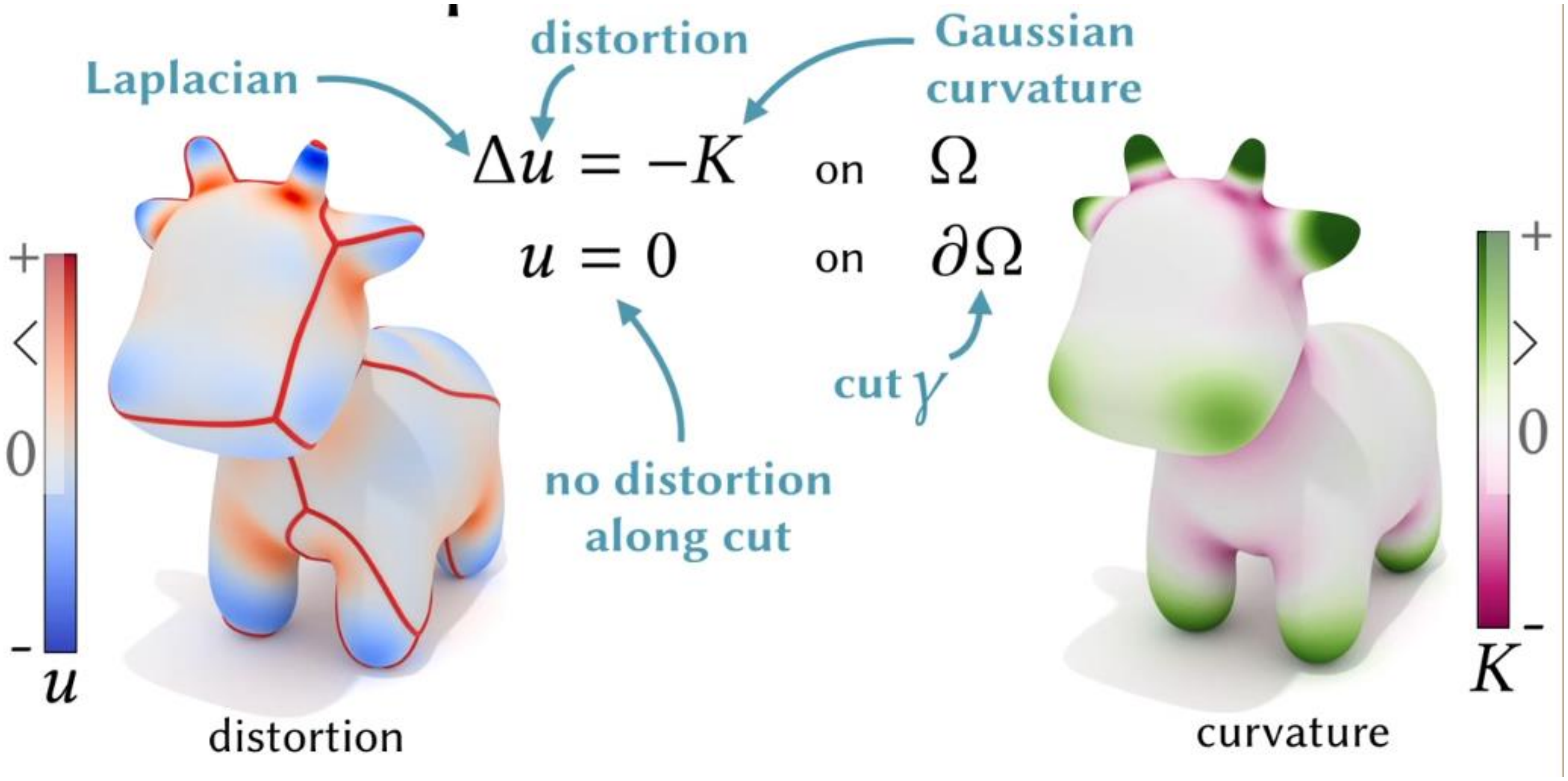


Packing Problem

网格曲面的分割

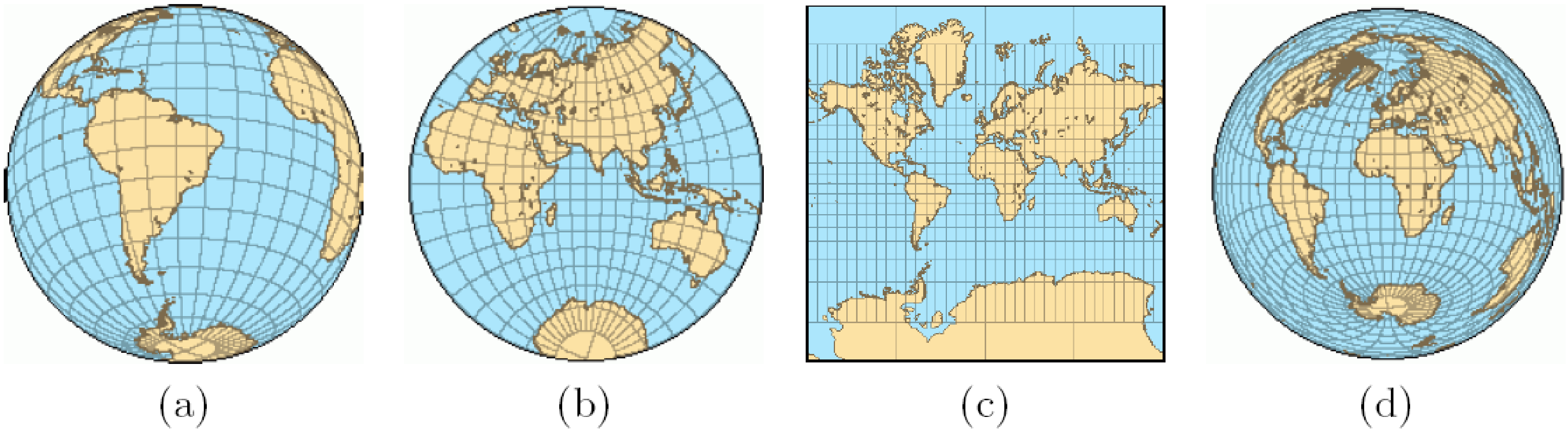


Yamabe equation for conformal parameterization



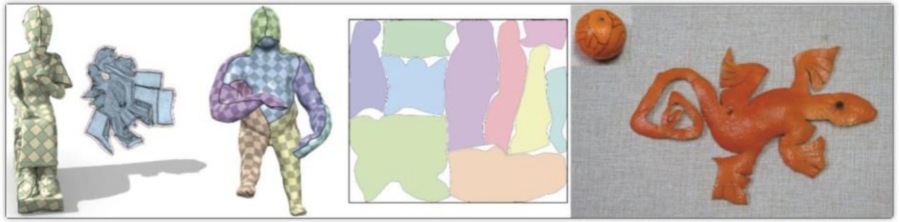
Challenge…

The optimal parameterization method has not been found yet, or it does not exist!



课程首页 | 课程安排 | 授课教师 | 课程作业 | 其它学习资料

GAMES 301：曲面参数化
Surface Parameterization



最新消息

- 2023年1月10日：本课程结束，课程相关资料将永久分享。课程QQ群将继续保留，供大家交流讨论。感谢大家对GAMES 301课程的支持！
- 2023年1月10日：已向完成课程及作业的学员发放"GAMES301结业证书"。祝贺！
- 2023年1月9日：课程作业已全部批改，优秀作业示例已更新。
- 2022年9月29日：直播时间调整：因国庆调休，本课程首次上课提前至10月7日，10:00-11:30。
- 2022年9月28日：开放课程作业注册系统。请计划提交作业的同学根据说明进行注册。
- 2022年9月25日：首次直播时间：10月8日，10:00-11:30
- 2022年9月16日：计划10月8日开课。

课程介绍

曲面参数化是计算图形学的核心任务，是各种几何处理与几何计算应用的基础，比如纹理映射、曲面拟合、曲面对应、重新网格化、曲面编辑、形状变形、形状分析等。在过去的三十多年中，人们提出了各种各样的曲面参数化方法，至今仍是一个活跃的研究课题。本课程将介绍曲面参数化的问题描述、参数化理论、计算与实现方法及其应用，使得初步接触该课题的学生及业界同仁能够快速入门并掌握曲面参数化的基础算法及实现方法。本课程的主要内容包括：曲面参数化的基本理论与问题描述、面向离散网格的参数化、基于基函数表示的连续参数化、共形参数化、曲面参数化的应用等。

课程安排

传送门：课程录像

时间			授课老师	课程题目 (点击可下载课件)
第一周	第1讲	10月7日, 10:00-11:30	刘利刚	曲面参数化介绍
	第2讲	10月9日, 10:00-11:30	傅孝明	面向离散网格的参数化概述 + 传统方法介绍
第二周	第3讲	10月15日, 10:00-11:30	傅孝明	无翻转参数化方法 – 初始存在翻转
	第4讲	10月16日, 10:00-11:30	傅孝明	无翻转参数化方法 – 初始无翻转
第三周	第5讲	10月22日, 10:00-11:30	傅孝明	全局单射参数化方法
	第6讲	10月23日, 10:00-11:30	傅孝明	参数化应用1 – Atlas生成、艺术设计
第四周	第7讲	10月29日, 10:00-11:30	傅孝明	参数化应用2 – 网格生成
	第8讲	10月30日, 10:00-11:30	陈仁杰	无翻转光滑映射
第五周	第9讲	11月5日, 10:00-11:30	陈仁杰	基于调和映射的高质量形变
	第10讲	11月6日, 10:00-11:30	方清	共形参数化1 – Circle填充、柯西黎曼方程
第六周	第11讲	11月12日, 10:00-11:30	方清	共形参数化2 – 离散共形等价类、曲率流
	第12讲	11月13日, 10:00-11:30	方清	锥奇异点参数化应用
第七周	第13讲	11月19日, 10:00-11:30	傅孝明	参数化应用3 – 高阶网格生成、曲面对应
	第14讲	11月19日, 15:00-16:30	刘利刚	参数化在产业中的应用(1)
	第15讲	11月20日, 10:00-11:30	刘利刚	参数化在产业中的应用(2)及课程总结

http://staff.ustc.edu.cn/~renjiec/GAMES301

Thank you!

Questions?