



中国科学技术大学

University of Science and Technology of China

数学建模

Mathematical Modeling

陈仁杰

中国科学技术大学

微分方程模型

微分方程模型

此类模型的建模思想是：

- 模型的因素随时间、空间而变化，可以看作是关于时间、空间的连续可微函数。
- 因素的变化与时间、空间以及因素本身有关，可用微分方程（或微分方程组）来表示。
- 微分方程的建立与求解是解决实际问题的核心。
- 当微分方程无解析解的时候，需要使用数值算法近似求解。
- 对于某些求泛函的极值问题，可以离散化，或者用变分法求解。

例1：（Giordano 《数学建模》 § 1.2）酵母培养物的增长。

时间	0	1	2	3	4	5	6	7	8
生物量	9.6	18.3	29.0	47.2	71.1	119.1	174.6	257.3	350.7
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
441	513.3	339.7	594.8	629.4	640.8	651.1	655.9	659.6	661.8

【模型建立】

- 设时间 t ，生物量 x ，生物量增量 δ 。观察 t, x, δ 两两之间的函数图像，猜测 δ 是 x 的二次函数。
- 生物学解释：酵母繁殖靠细胞分裂， $\delta = \lambda x$ 。受资源限制，增长率 λ 随 x 的增加而降低。可用线性函数近似 $\lambda = a - bx$ 。
- 解常微分方程 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$ ，得 $x(t) = \frac{a}{b + \left(\frac{a}{x_0} - b\right)e^{-at}}$ 。
- a, b 可由数据拟合确定。

例2：（谭永基《数学模型》第18章）生物群体模型。

考虑生物群体数量 x 随时间 t 的变化。

【单物种模型】

- $\frac{dx}{dt} = (a + bx)x$ ，其中 a 与物种的生长资源及人类的捕杀有关， b 与物种内部的合作与竞争有关， a, b 都可能是 t 的函数。

【双物种模型】

- $\begin{cases} x'(t) = f(x, y) \cdot x = (a_{11}x + a_{12}y + b_1) \cdot x \\ y'(t) = g(x, y) \cdot y = (a_{21}x + a_{22}y + b_2) \cdot y \end{cases}$ ，其中 $a_{12}, a_{21} > 0$ 表示双方互助， $a_{12}, a_{21} < 0$ 表示双方竞争， $a_{12}a_{21} < 0$ 表示捕食关系。
- 达到平衡时， $xy = 0$ 或 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + b_1 = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + b_2 = 0 \end{cases}$ 。
- f, g 可能是其它形式的函数，此处仅作局部线性近似。

例3：（姜启源《数学模型》 § 5.10）传染病的传播。

【模型一】

- 假设被发现的感染者都被隔离治疗，治愈后不再传播病菌。
- 设 $x(t)$ 是尚未感染的易感者比例， $y(t)$ 是未被发现的感染者比例， $z(t)$ 是已确诊的感染者比例
 $x + y + z = 1$ 。

$$\begin{cases} x'(t) = -axy \\ y'(t) = axy - by \\ z'(t) = by \end{cases}$$

其中 a 称为传染率， b 称为确诊率， a, b 可以是 t 的函数。

- 每日新增确诊病例数与 $y(t)$ 成正比例，积累确诊病例数与 $z(t)$ 成正比例。由此可以估计出 a, b 。
- 思考：求 $t \rightarrow \infty$ 时， $x(t)$ 和 $z(t)$ 的极限。

【模型二】

- 假设被发现的感染者都被隔离治疗，治愈后部分人免疫。
- 设 $x(t)$ 是尚未感染的易感者比例， $y(t)$ 是未被发现的感染者比例， $z(t)$ 是正在隔离治疗中的感染者比例， $x + y + z < 1$ 。

$$\begin{cases} x'(t) = -axy + dz \\ y'(t) = axy - by \\ z'(t) = by - cz \end{cases}$$

其中 a 称为传染率， b 称为确诊率， c 称为出院率， $0 < d < c$ 。

【思考】

- 参数 a, b, c, d 对于 $y(t)$ 的影响？
- 目前的一些防疫措施对 a, b, c, d 和 $y(t)$ 的影响？
- 如果希望把 $y(t)$ 迅速降至某一阈值之下，应如何调整参数？
- 如果考虑到调整参数所造成的社会经济影响，又如何处理？

例4：（CUMCM2007A）中国人口增长预测。

中国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据已有数据，运用数学建模的方法，对中国人口做出分析和预测是一个重要问题。

近年来中国的人口发展出现了一些新的特点，例如，老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些都影响着中国人口的增长。2007年初发布的《国家人口发展战略研究报告》(附录1)还做出了进一步的分析。

关于中国人口问题已有多方面的研究，并积累了大量数据资料。附录2就是从《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据。

试从中国的实际情况和人口增长的上述特点出发，参考附录2中的相关数据（也可以搜索相关文献和补充新的数据），建立中国人口增长的数学模型，并由此对中国人口增长的中短期和长期趋势做出预测；特别要指出你们模型中的优点与不足之处。

【模型建立】

- (人口的总数) 设时刻 t 时, 人口总数 $x(t)$ 。

$$x'(t) = \lambda(t)x(t) \Rightarrow x(t) = x(0)e^{\int_0^t \lambda(s)ds}$$

其中 $\lambda(t)$ 称为人口净增长率。 $\lambda(t)$ 与多种因素有关, 易受社会经济条件、国家政策、文化观念等影响。

- (人口的年龄结构) 设第 t 年时, 年龄 k 的人口总数 $x_k(t)$ 。

$$\begin{cases} x_0(t+1) = \sum_i b_i(t)x_i(t) \\ x_{k+1}(t+1) = (1 - d_k(t))x_k(t), \quad k \in \mathbf{N} \end{cases}$$

其中 $b_k(t)$ 和 $d_k(t)$ 分别是年龄 k 的人口的生育率和死亡率。

- 上述 $\lambda(t), b_k(t), d_k(t)$ 都可根据历史抽样数据估计得到。
- 上式可以表示成矩阵乘积的形式

$$X(t+1) = A(t)X(t) \Rightarrow X(t+1) = A(t) \cdots A(0)X(0)$$

其中

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & b_1(t) & \cdots & b_{n-1}(t) \\ 1 - d_0(t) & \ddots & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 - d_{n-2}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

- 上式还可以表示成偏微分方程的形式

$$\frac{\partial p(s, t)}{\partial s} + \frac{\partial p(s, t)}{\partial t} = -d(s, t)p(s, t)$$

其中 $p(s, t)$ 是 t 时刻年龄 s 的人口密度函数 $\int_0^\infty p(s, t)ds = 1, \forall t$ 。

这种表示形式仅具有理论意义，对于人口问题的计算没有任何优势。

- （老龄化问题）随着人均寿命的延长，老龄化进程不可逆转。国家和社会必须适应老龄化现象，而非试图改变老龄化现象。
- （人口的性别比例）随着男女平等观念的深入，无需特别考虑。
- （人口的城乡结构）这是政治和经济问题，不属于人口问题。

例5：（CUMCM2018A）高温作业专用服装设计。

在高温环境下工作时，人们需要穿着专用服装以避免灼伤。专用服装通常由三层织物材料构成，记为I、II、III层，其中I层与外界环境接触，III层与皮肤之间还存在空隙，将此空隙记为IV层。

为设计专用服装，将体内温度控制在 37°C 的假人放置在实验室的高温环境中，测量假人皮肤外侧的温度。为了降低研发成本、缩短研发周期，请利用数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况，并解决以下问题：

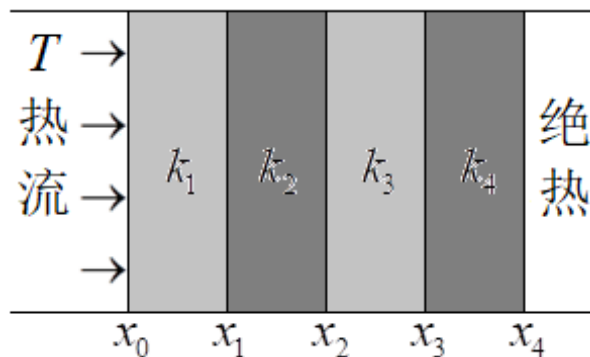
(1) 专用服装材料的某些参数值由附件1给出，对环境温度为 75°C 、II层厚度为6mm、IV层厚度为5mm、工作时间为90分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧的温度。建立数学模型，计算温度分布，并生成温度分布的Excel文件。

(2) 当环境温度为 65°C 、IV层的厚度为5.5mm时，确定II层的最优厚度，确保工作60分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过5分钟。

(3) 当环境温度为 80°C 时，确定II层和IV层的最优厚度，确保工作30分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过5分钟。

【问题1模型建立】

- 一维热传导方程 $u_t = (ku_x)_x$ 。 $x \in [0, L]$, $t \in [0, \infty)$ 。
- $k(x) = \frac{\text{热传导率}}{\text{密度} \times \text{比热}} = \text{const}$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$ 。 $x_0 = 0$, $x_4 = L$ 。
- 边界条件 $u(x, 0) = 37$, $u_x(0, t) = \lambda(u(0, t) - T)$, $u_x(L, t) = 0$ 。
 T 是环境温度, λ 是待求常数。



【模型求解】

k_1	$\cdots$	k_i	k_{i+1}	$\cdots$	k_n
u_0	u_1	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	$u_{n-1} \quad u_n$

- 把定义域 n 等分, 记 $u_i(t) = u(x_i, t)$, 则有 $u_i(0) = 37$, 并且

$$\begin{cases} k_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - k_i(u_i - u_{i-1}) \approx \frac{L^2}{n^2} u'_i(t), & 1 \leq i \leq n-1 \\ u_1 - u_0 \approx \frac{\lambda L}{n} (u_0 - T), & u_n - u_{n-1} \approx 0 \end{cases}$$

- 记 $\mathbf{v}(t) = (u_1, \cdots, u_{n-1})$, 上式可表示为 $\mathbf{v}'(t) + A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, 其中 $\mathbf{b} = \left(\frac{n^2}{L^2} \frac{\lambda L k_1}{n + \lambda L} T, 0, \cdots, 0 \right)$

$$A = \frac{n^2}{L^2} \begin{pmatrix} \frac{\lambda L k_1}{n + \lambda L} + k_2 & -k_2 & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -k_{n-2} & k_{n-2} + k_{n-1} & -k_{n-1} \\ & & & -k_{n-1} & k_{n-1} \end{pmatrix}$$

A 是对称正定、对角占优。

- 解得 $\mathbf{v}(t) = e^{-At}(\mathbf{v}(0) - A^{-1}\mathbf{b}) + A^{-1}\mathbf{b}$ 。设 $\mathbf{c}$ 是全一向量。注意到 $A\mathbf{c} = \frac{1}{T}\mathbf{b}$, $\mathbf{v}(0) = 37\mathbf{c}$ 。
故 $\mathbf{v}(t) = T\mathbf{c} - (T - 37)e^{-At}\mathbf{c}$, $u_n(t)$ 形如 $T - \sum_{i=1}^n a_i e^{-b_i t}$
- 取定 n , 求 λ 使 $u(L, t) \approx u_n(t)$ 的图像与数据拟合。

【问题2, 3模型建立】

- 求II层的厚度 d , 使得 $u(L, 3300) \leq 44$ 且 $u(L, 3600) \leq 47$ 。
- 求II、IV层的厚度 d_1, d_2 , 使得 $u(L, 1500) \leq 44$ 且 $u(L, 1800) \leq 47$ 。

【问题求解】

- 对给定的 x, t , 视 $u(x, t)$ 为 d 或 d_1, d_2 的函数。

例6：（姜启源《数学模型》§5.8）赛跑的速度。
如何分配体能使得成绩最好？

【模型建立】

- 设赛程 L ，速度 $v(x)$ ，则成绩 $T = \int_0^L \frac{dx}{v(x)}$ 。
- 设空气阻力 f 关于 v 单调增，并且不超过运动员的最大爆发力 F 。
- 运动员消耗的体能 $\int_0^L f(x)dx$ 也有上限 E 。
- 问题化为求 $\int_0^L \frac{dx}{v(x)}$ 在上述两个约束下的最小值。

【模型求解】

- 由均值不等式，当且仅当 $v(x)$ 是常数时， $\int_0^L \frac{dx}{v(x)} \int_0^L f(x)dx$ 最小。
- 比赛策略：先全力加速至最大，再保持匀速，最后耗尽体能冲刺。

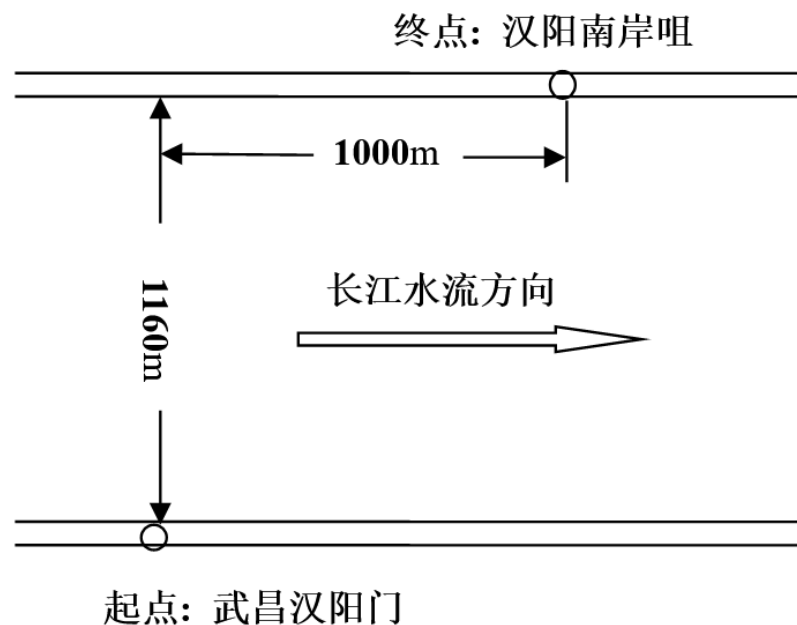
例7：（CUMCM2003D）抢渡长江。

“渡江”是武汉城市的一张名片。1934年9月9日，武汉警备旅官兵与体育界人士联手，在武汉第一次举办横渡长江游泳竞赛活动，起点为武昌汉阳门码头，终点设在汉口三北码头，全程约5000米。有44人参加横渡，40人达到终点，张学良将军特意向冠军获得者赠送了一块银盾，上书“力挽狂澜”。

2001年，“武汉抢渡长江挑战赛”重现江城。2002年，正式命名为“武汉国际抢渡长江挑战赛”，于每年的5月1日进行。由于水情、水性的不可预测性，这种竞赛更富有挑战性和观赏性。

2002年5月1日，抢渡的起点设在武昌汉阳门码头，终点设在汉阳南岸咀，江面宽约1160米。据报载，当日的平均水温 16.8°C ，江水的平均流速为1.89米/秒。参赛的国内外选手共186人（其中专业人员将近一半），仅34人到达终点，第一名的成绩为14分8秒。除了气象条件外，大部分选手由于路线选择错误，被滚滚的江水冲到下游，而未能准确到达终点。

假设在竞渡区域两岸为平行直线，它们之间的垂直距离为1160米，从武昌汉阳门的正对岸到汉阳南岸咀的距离为1000米，见示意图。



请通过数学建模来分析上述情况，并回答以下问题：

1. 假定在竞渡过程中游泳者的速度大小和方向不变，且竞渡区域每点的流速均为1.89米/秒。试说明2002年第一名是沿着怎样的路线前进的，求他游泳速度的大小和方向。如何根据游泳者自己的速度选择游泳方向，试为一个速度能保持在1.5米/秒的人选择游泳方向，并估计他的成绩。
2. 在（1）的假设下，如果游泳者始终以和岸边垂直的方向游，他们能否到达终点？根据你们的数学模型说明为什么1934年和2002年能游到终点的人数的百分比有如此大的差别；给出能够成功到达终点的选手的条件。
3. 若流速沿离岸边距离的分布为 
$$v(y) = \begin{cases} 1.47, & 0 \leq y \leq 200 \\ 2.11, & 200 \leq y \leq 960 \\ 1.47, & 960 \leq y \leq 1160 \end{cases}$$

(设从武昌汉阳门垂直向上为 y 轴正向)
游泳者的速度大小（1.5米/秒）仍全程保持不变，
试为他选择游泳方向和路线，估计他的成绩。
4. 若流速沿离岸边距离为连续分布，例如 
$$v(y) = \begin{cases} \frac{2.28}{200}y, & 0 \leq y \leq 200 \\ 2.28, & 200 \leq y \leq 960 \\ \frac{2.28}{200}(1160 - y), & 960 \leq y \leq 1160 \end{cases}$$

或你们认为合适的连续分布，如何处理这个问题。
5. 用普通人能懂的语言，给有意参加竞渡的游泳爱好者写一份竞渡策略的短文。
6. 你们的模型还可能有什么其他的应用？

【模型建立】

- 设游泳方向角 θ , 则游泳路线 (x, y) 满足 $\begin{cases} x'(t) = 1.5 \cos \theta + v \\ y'(t) = 1.5 \sin \theta \end{cases}$ 。
- 求 $\theta(y)$ 使得 $\int_0^{1160} \frac{1.5 \cos \theta + v}{1.5 \sin \theta} dy = 1000$ 并且 $T = \int_0^{1160} \frac{1}{1.5 \sin \theta} dy$ 最小。

【模型求解】

- 当 T 最小时, $\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1.5 \cos \theta + v}{1.5 \sin \theta} \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{1.5 \sin \theta} \right)$, 其中 λ 是待定常数。
- 化简上式, 得 $\cos \theta = \frac{1.5}{\lambda - v}$ 。再由约束条件, 解得 λ , 进而得 θ, T 。

微分方程模型

1 传染病模型

2 经济增长模型

3 正规战与游击战

4 药物在体内的分布与排除

5 香烟过滤嘴的作用

6 人口预测和控制

7 烟雾的扩散与消失

动态 模型

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

微分 方程 建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

1. 传染病模型

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高潮到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，用机理分析方法建立模型

模型1 已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

- 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为 λ

建模

$$i(t + \Delta t) - i(t) = \lambda i(t) \Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \lambda i$$



$$i(t) = i_0 e^{\lambda t}$$

$$i(0) = i_0$$



$$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \infty \quad ?$$

若有效接触的是病人，
则不能使病人数增加



必须区分已感染者(病人)
和未感染者(健康人)

模型2

SI 模型

区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

- 1) 总人数 N 不变, 病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$
- 2) 每个病人每天有效接触人数为 λ , 且使接触的健康人致病

$\lambda \sim$ 日接触率

建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = [\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

$$\frac{di}{dt} = \lambda si$$

$$s(t) + i(t) = 1$$

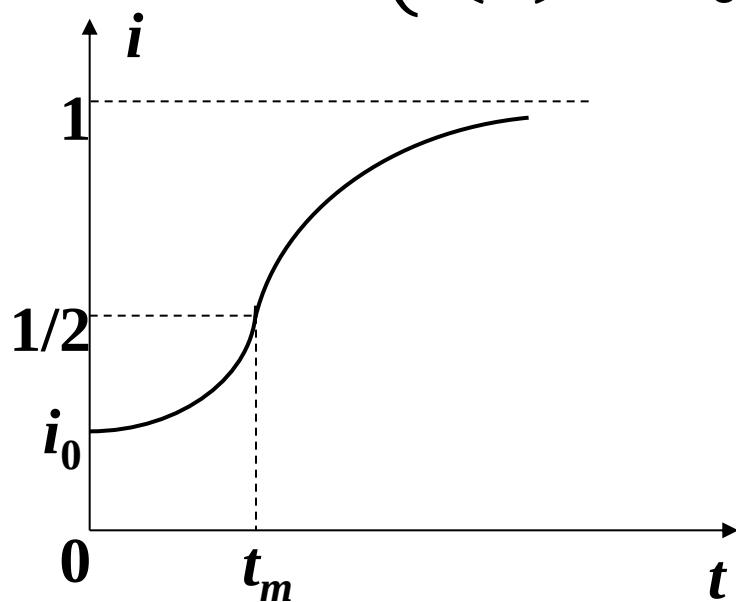


$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

⇒ Logistic 模型



$t = t_m$, $\frac{di}{dt}$ 最大

$t_m \sim$ 传染病高潮到来时刻

λ (日接触率) $\downarrow \rightarrow t_m \uparrow$

$$i(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{i_0} - 1\right) e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln \left(\frac{1}{i_0} - 1 \right)$$

$t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 1$

?

病人可以治愈!

模型3 SIS 模型

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，
健康人可再次被感染

增加假设

3) 病人每天治愈的比例为 μ

$\mu \sim$ 日治愈率

建模

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda Ns(t)i(t)\Delta t - \mu Ni(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda i(1 - i) - \mu i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

$\lambda \sim$ 日接触率

$1/\mu \sim$ 感染期

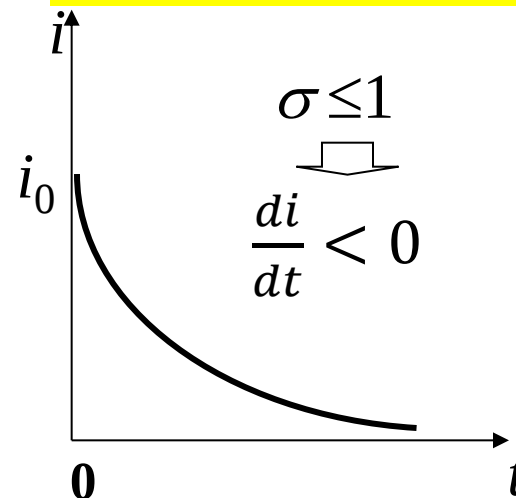
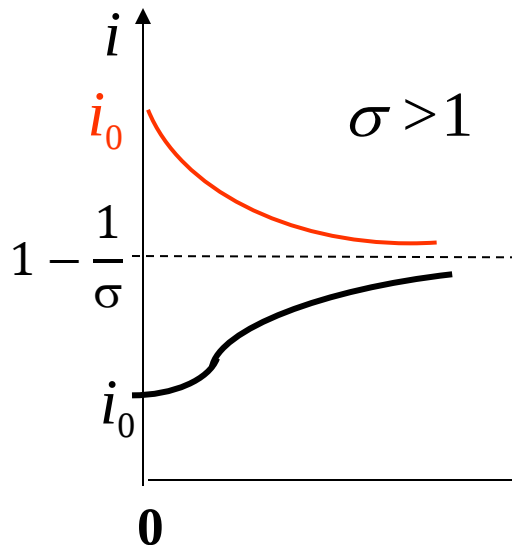
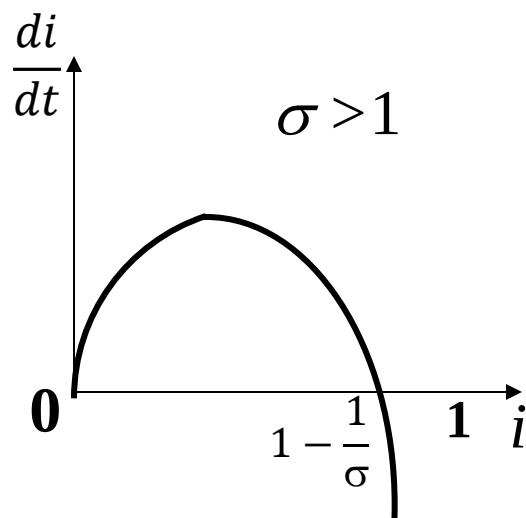
$$\sigma = \lambda/\mu$$

$\sigma \sim$ 一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**。

模型3

$$\frac{di}{dt} = \lambda i(1-i) - \mu i \quad \sigma = \lambda/\mu$$

$$\frac{di}{dt} = -\lambda i \left[i - \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right) \right]$$



$$i(\infty) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{\sigma}, & \sigma > 1 \\ 0, & \sigma \leq 1 \end{cases}$$

接触数 $\sigma = 1 \sim$ 阈值

$$\sigma \leq 1 \Rightarrow i(t) \downarrow$$

$\sigma > 1$
 i_0 小 $\Rightarrow i(t)$ 按 S 形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4

SIR模型

传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称移出者

假设

- 1) 总人数 N 不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$
- 2) 病人的日接触率 λ ，日治愈率 μ ，接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

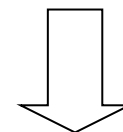
模型4 SIR模型

$$N[i(t + \Delta t) - i(t)] = \lambda N s(t) i(t) \Delta t - \mu N i(t) \Delta t$$

$$N[s(t + \Delta t) - s(t)] = -\lambda N s(t) i(t) \Delta t$$


$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

⇒ 无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解



在相平面 $s \sim i$ 上研究解的性质

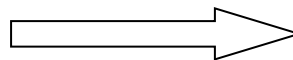
$$i_0 + s_0 \approx 1 \text{ (通常 } r(0) = r_0 \text{ 很小)}$$

模型4 SIR模型

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去 dt

$$\sigma = \lambda/\mu$$



$$\begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i \Big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

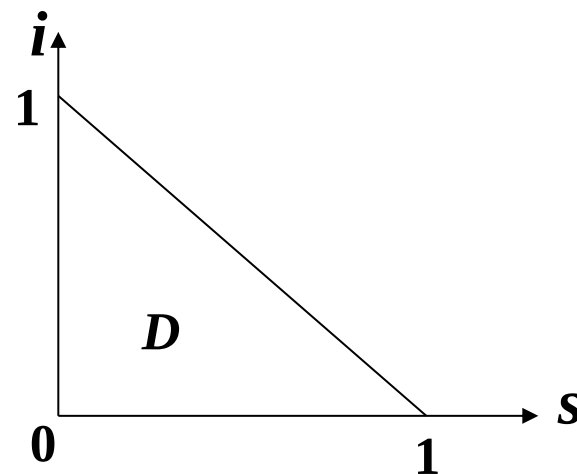
相轨线 $\Downarrow$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s, i) | s \geq 0, i \geq 0, s + i \leq 1\}$$

在 D 内作相轨线 $i(s)$ 的图形，进行分析



模型4 SIR模型

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \frac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0, s(0) = s_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{di}{ds} = \frac{1}{\sigma s} - 1 \\ i \Big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

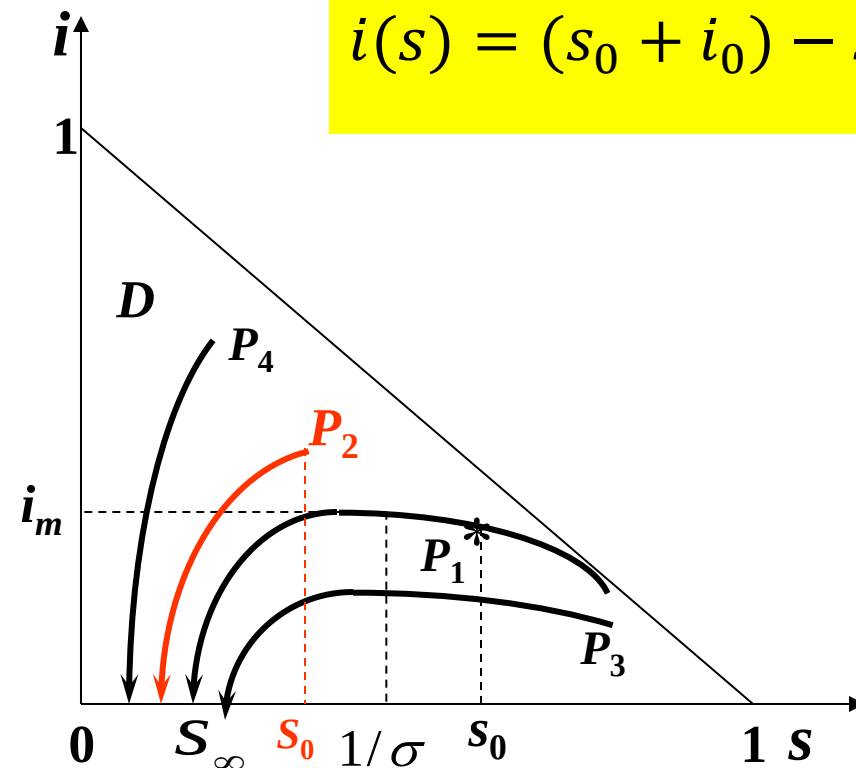
$s(t)$ 单调减 $\rightarrow$ 相轨线的方向

$$s = 1/\sigma, i = i_m \quad t \rightarrow \infty, i \rightarrow 0$$

$$s_\infty \text{ 满足 } s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

相轨线 $i(s)$ 及其分析

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s}{s_0}$$



$P_1: s_0 > 1/\sigma \rightarrow i(t)$ 先升后降至0

$\Rightarrow$ 传染病蔓延

$1/\sigma \sim$ 阈值

$P_2: s_0 < 1/\sigma \rightarrow i(t)$ 单调降至0

$\Rightarrow$ 传染病不蔓延

模型4 SIR模型

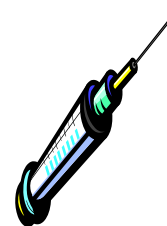
预防传染病蔓延的手段

传染病不蔓延的条件—— $s_0 < 1/\sigma$

- 提高阈值 $1/\sigma$ $\Rightarrow$ 降低 $\sigma (= \lambda/\mu)$ $\Rightarrow \lambda \downarrow, \mu \uparrow$

λ (日接触率) $\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平 $\uparrow$

μ (日治愈率) $\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平 $\uparrow$



- 降低 s_0 $\Rightarrow$ 提高 r_0 $\Rightarrow$ 群体免疫

$$s_0 + i_0 + r_0 = 1$$

σ 的估计

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0 \quad \text{忽略 } i_0$$

$$\sigma = \frac{\ln s_0 - \ln s_\infty}{s_0 - s_\infty}$$

模型4

SIR模型

被传染人数的估计

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma} \ln \frac{s_\infty}{s_0} = 0$$



$$i_0 \cong 0, s_0 \cong 1$$

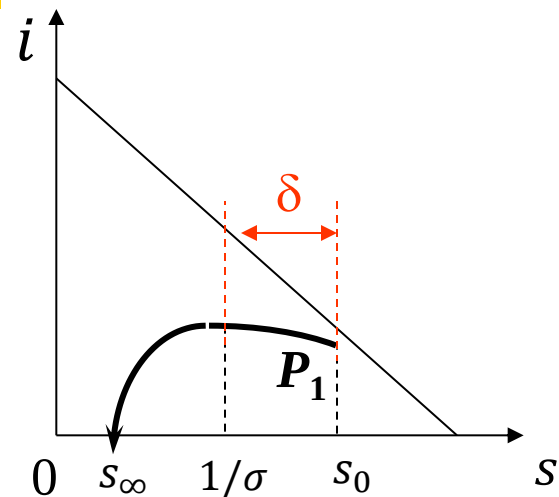
$$x + \frac{1}{\sigma} \ln \left(1 - \frac{x}{s_0} \right) \cong 0$$



$$x \ll s_0$$

$$x \left(1 - \frac{1}{s_0 \sigma} - \frac{x}{2s_0^2 \sigma} \right) \cong 0$$

$$\Rightarrow x \approx 2s_0 \sigma \left(s_0 - \frac{1}{\sigma} \right)$$



$$s_0 - 1/\sigma = \delta$$



$$\delta \text{ 小, } s_0 \sigma \cong 1$$



$$x \cong 2\delta$$

提高阈值 $1/\sigma$

→ 降低被传染人数比例 x

2. 经济增长模型

增加生产 发展经济 增加投资 增加劳动力 提高技术

- 建立产值与资金、劳动力之间的关系
- 研究资金与劳动力的最佳分配，使投资效益最大
- 调节资金与劳动力的增长率，使经济(生产率)增长

1. 道格拉斯(Douglas)生产函数

$$\text{产值 } Q(t) \leftarrow \begin{matrix} \text{资金 } K(t) & \text{劳动力 } L(t) \\ \text{技术 } f(t) = f_0 \end{matrix}$$

$$Q(t) = f_0 F(K(t), L(t))$$

F 为待定函数

1. 道格拉斯(Douglas)生产函数

静态模型

$$Q(K, L) = f_0 F(K, L)$$

每个劳动力的产值 $z = \frac{Q}{L}$

每个劳动力的投资 $y = \frac{K}{L}$

模型假设

z 随着 y 的增加而增长, 但增长速度递减

$$z = Q/L = f_0 g(y) \quad g(y) = y^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\Rightarrow Q = f_0 L (K/L)^\alpha$$

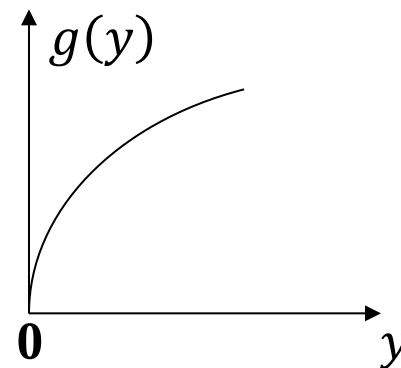


$$Q(K, L) = f_0 K^\alpha L^{1-\alpha}$$

Douglas生产函数

$$\frac{\partial Q}{\partial K}, \frac{\partial Q}{\partial L} > 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$$



1. Douglas生产函数 $Q(K, L) = f_0 K^\alpha L^{1-\alpha}$

$Q_K \sim$ 单位资金创造的产值

$Q_L \sim$ 单位劳动力创造的产值

$$\Downarrow$$
$$\frac{KQ_K}{Q} = \alpha, \quad \frac{LQ_L}{Q} = 1 - \alpha$$

$$\Downarrow$$
$$KQ_K + LQ_L = Q$$

$\alpha \sim$ 资金在产值中的份额

$1 - \alpha \sim$ 劳动力在产值中的份额

更一般的道格拉斯(Douglas)生产函数

$$Q(K, L) = f_0 K^\alpha L^\beta, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad f_0 > 0$$

2) 资金与劳动力的最佳分配（静态模型）

资金来自贷款，利率 r 劳动力付工资 w

资金和劳动力创造的效益 $S = Q - rK - wL$

求资金与劳动力的分配比例 K/L (每个劳动力占有的资金)，使效益 S 最大

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial K} = 0, \frac{\partial S}{\partial L} = 0 &\Rightarrow \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{r}{w} \\ \frac{KQ_K}{Q} = \alpha, \frac{LQ_L}{Q} = 1 - \alpha &\Rightarrow \frac{Q_K}{Q_L} = \frac{L}{K} \frac{\alpha}{1 - \alpha} \end{aligned} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{w}{r}$$

$$w \uparrow, r \downarrow, \alpha \uparrow \Rightarrow K/L \uparrow$$

3) 经济(生产率)增长的条件 (动态模型)

要使 $Q(t)$ 或 $Z(t)=Q(t)/L(t)$ 增长, $K(t), L(t)$ 应满足的条件

模型
假设

• 投资增长率与产值成正比
(用一定比例扩大再生产)

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = \lambda Q, \lambda > 0$$

• 劳动力相对增长率为常数

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \mu L \Rightarrow L(t) = L_0 e^{\mu t}$$

$$Q = f_0 L g(y) \quad g(y) = y^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = \lambda f_0 L y^\alpha$$

$$y = \frac{K}{L}, K = Ly \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{dt} = L \frac{dy}{dt} + \mu Ly$$

$$\frac{dK}{dt} = \lambda f_0 L y^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} + \mu y = f_0 \lambda y^\alpha$$

$$\frac{dK}{dt} = L \frac{dy}{dt} + \mu L y$$

伯努利方程

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{f_0 \lambda}{\mu} + (y_0^{1-\alpha} - \frac{f_0 \lambda}{\mu}) e^{-(1-\alpha)\mu t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y_0 = K_0 / L_0, Q_0 = f_0 K_0^\alpha L_0^{1-\alpha}, \dot{K}_0 = \lambda Q_0 \Rightarrow y_0^{1-\alpha} = f_0 \lambda \frac{K_0}{\dot{K}_0}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left\{ \frac{f_0 \lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 - \mu \frac{K_0}{\dot{K}_0} \right) e^{-(1-\alpha)\mu t} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

3) 经济增长的条件

$$y(t) = \left\{ \frac{f_0 \lambda}{\mu} \left[1 - \left(1 - \mu \frac{K_0}{\dot{K}_0} \right) e^{-(1-\alpha)\mu t} \right] \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned} Q &= f_0 L g(y) & \frac{dQ}{dt} &= f_0 L g'(y) \frac{dy}{dt} + f_0 g(y) \frac{dL}{dt} \\ g(y) &= y^\alpha & &= f_0 L y^{2\alpha-1} [f_0 \alpha \lambda + \mu(1-\alpha)y^{1-\alpha}] \end{aligned}$$

$$\frac{dQ}{dt} > 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\mu}{\dot{K}_0 / K_0} \right) e^{-(1-\alpha)\mu t} < \frac{1}{1-\alpha} \quad (A)$$

$$\mu > 0 \Rightarrow A \text{ 成立}$$

$$\mu < 0 \Rightarrow \text{当 } t < \frac{1}{(1-\alpha)\mu} \ln(1-\alpha) \left(1 - \frac{\mu}{\dot{K}_0 / K_0} \right), A \text{ 成立}$$

3) 经济增长的条件

每个劳动力的产值 $Z(t)=Q(t)/L(t)$ 增长 $\Leftrightarrow dZ/dt > 0$

$$Z(t) = \frac{f_0 L y^\alpha}{L} = f_0 y^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dZ}{dt} = f_0 \alpha y^{\alpha-1} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dZ}{dt} > 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} > 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{\mu}{\dot{K}_0 / K_0}\right) e^{-(1-\alpha)\mu t} > 0 \quad (B)$$

$$\mu < 0 \Rightarrow B \text{ 成立} \quad \mu > 0 \Rightarrow \text{当 } \frac{\mu}{\dot{K}_0 / K_0} < 1 \text{ 时, } B \text{ 成立}$$

$$\mu < \frac{\dot{K}_0}{K_0}, \text{ 劳动力增长率小于初始投资增长率}$$

3. 正规战与游击战

第一次世界大战Lanchester提出预测战役结局的模型

战争分类：正规战争，游击战争，混合战争

只考虑双方兵力多少和战斗力强弱

兵力因战斗及非战斗减员而减少，因增援而增加

战斗力与射击次数及命中率有关

建模思路和方法为用数学模型讨论社会领域实际问题提供了可借鉴的示例

一般模型

$x(t) \sim$ 甲方兵力, $y(t) \sim$ 乙方兵力

模型 假设

- 每方战斗减员率取决于双方的兵力和战斗力
- 每方非战斗减员率与本方兵力成正比
- 甲乙双方的增援率为 $u(t)$, $v(t)$

模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, y) - \alpha x + u(t), & \alpha > 0 \\ \dot{y}(t) = g(x, y) - \beta y + v(t), & \beta > 0 \end{cases}$$

f, g 取决于战争类型

正规战争模型

双方均以正规部队作战

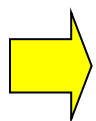
- 甲方战斗减员率只取决于乙方的兵力和战斗力

$f(x, y) = -ay$, $a \sim$ 乙方每个士兵的杀伤率

$a = r_y p_y$, $r_y \sim$ 射击率, $p_y \sim$ 命中率

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dot{y} = -bx - \beta y + v(t) \end{cases} \quad g = -bx, b = r_x p_x$$

- 忽略非战斗减员
- 假设没有增援



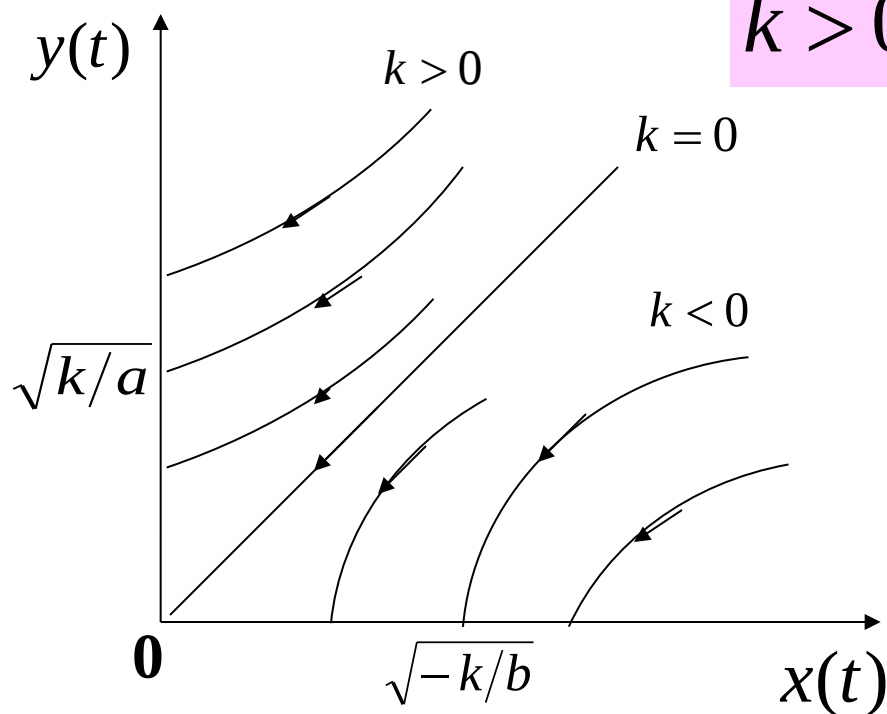
$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

正规战争模型

为判断战争的结局，不求 $x(t), y(t)$ 而在相平面上讨论 x 与 y 的关系

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \Rightarrow ay^2 - bx^2 = k$$
$$k = ay_0^2 - bx_0^2$$

$k > 0 \Rightarrow x = 0$ 时 $y > 0$ $\Rightarrow$ 乙方胜



$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{b}{a} = \frac{r_x p_x}{r_y p_y}$$

平方律
模型

$k < 0 \Rightarrow$ 甲方胜

$k = 0 \Rightarrow$ 平局

游击战争模型

双方都用游击部队作战

- 甲方战斗减员率还随着甲方兵力的增加而增加

$$f(x, y) = -cxy, \quad c \sim \text{乙方每个士兵的杀伤率}$$

$$\begin{aligned} c &= r_y p_y \\ r_y &\sim \text{射击率} \\ p_y &\sim \text{命中率} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_y &= s_{ry} / s_x \\ s_x &\sim \text{甲方活动面积} \\ s_{ry} &\sim \text{乙方射击有效面积} \end{aligned}$$

$$g(x, y) = -dxy, \quad d = r_x p_x = r_x s_{rx} / s_y$$

- 忽略非战斗减员
- 假设没有增援

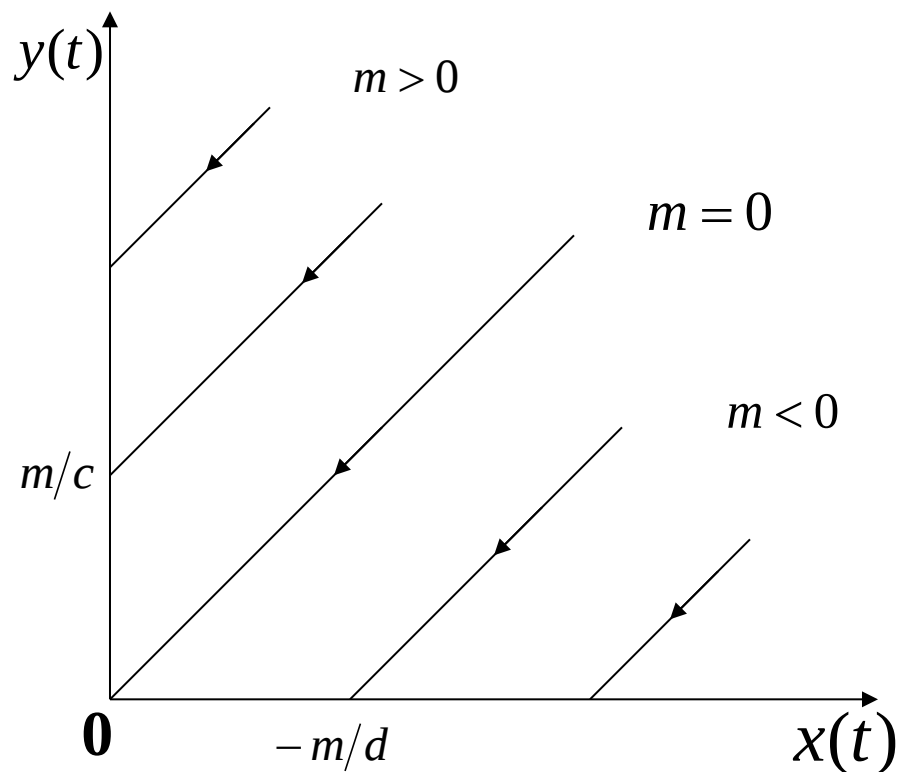
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -dxy \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

游击战争模型

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -dxy \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{c} \Rightarrow \begin{cases} cy - dx = m \\ m = cy_0 - dx_0 \end{cases}$$

$m > 0 \Rightarrow x = 0$ 时 $y > 0$
 $\Rightarrow$ 乙方胜



$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x s_{rx} s_x}{r_y s_{ry} s_y}$$

线性律
模型

$m < 0 \Rightarrow$ 甲方胜

$m = 0 \Rightarrow$ 平局

混合战争模型

甲方为游击部队，乙方为正规部队

$$\begin{cases} \dot{x} = -cxy \\ \dot{y} = -bx \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} cy^2 - 2bx &= n \\ n &= cy_0^2 - 2bx_0 \end{aligned}$$

$n > 0$
乙方胜

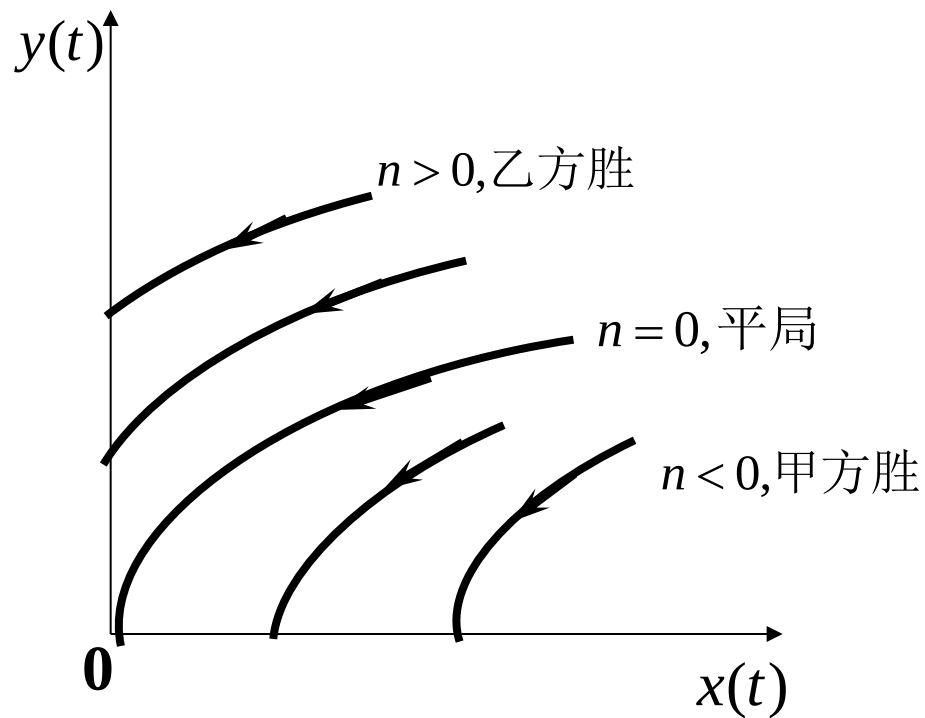
$$\Rightarrow \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2 > \frac{2b}{cx_0}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2 > \frac{2r_x p_x s_x}{r_y s_{ry} x_0}$$

设 $x_0=100, r_x/r_y=1/2, p_x=0.1,$
 $s_x=1(\text{km}^2), s_{ry}=1(\text{m}^2)$

$$\Rightarrow (y_0 / x_0)^2 > 100$$

乙方必须10倍于甲方的兵力



4. 药物在体内的 分布与排除

- 药物进入机体形成**血药浓度**（单位体积血液的药物量）
- 血药浓度需保持在一定范围内——**给药方案设计**
- 药物在体内吸收、分布和排除过程——**药物动力学**
- 建立**房室模型**——药物动力学的基本步骤
- 房室——机体的一部分，药物在一个房室内均匀分布（血药浓度为常数），在房室间按一定规律转移
- 本节讨论**二室模型**——中心室（心、肺、肾等）和周边室（四肢、肌肉等）

模型假设

- 中心室(1)和周边室(2), 容积不变
- 药物从体外进入中心室, 在二室间相互转移, 从中心室排出体外
- 药物在房室间转移速率及向体外排除速率, 与该室血药浓度成正比

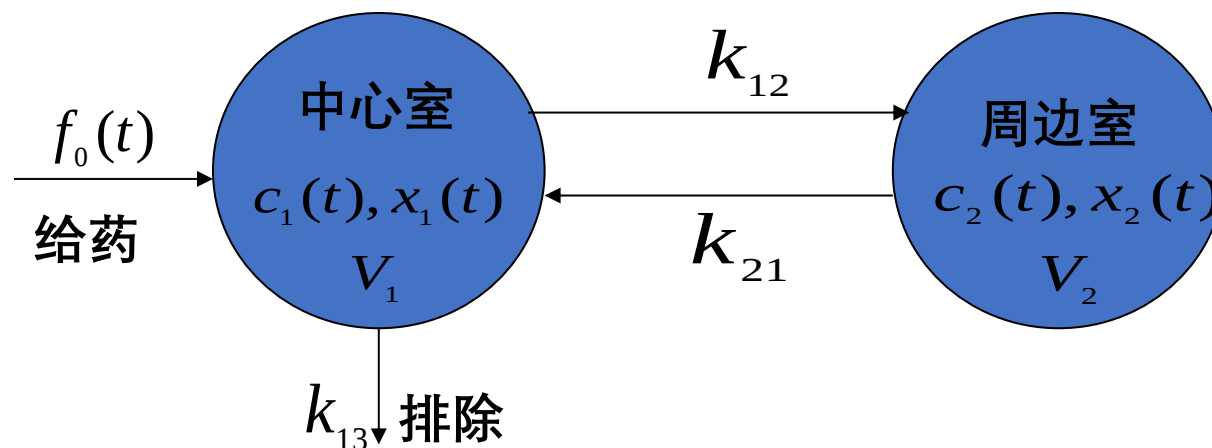
模型建立

$x_i(t) \sim$ 药量

$c_i(t) \sim$ 浓度

$V_i \sim$ 容积

$i=1,2$



$$\dot{x}_1(t) = -k_{12}x_1 - k_{13}x_1 + k_{21}x_2 + f_0(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = k_{12}x_1 - k_{21}x_2$$

$f_0 \sim$ 给药速率

模型建立

$$x_i(t) = V_i c_i(t), i = 1, 2$$

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12} + k_{13})c_1 + \frac{V_2}{V_1} k_{21} c_2 + \frac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \frac{V_1}{V_2} k_{12} c_1 - k_{21} c_2 \end{cases}$$

线性常系数
非齐次方程

对应齐次
方程通解

$$\begin{cases} \bar{c}_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} \\ \bar{c}_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21}k_{13} \end{cases}$$

几种常见的给药方式

给药速率 $f_0(t)$
和初始条件

1. 快速静脉注射

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12} + k_{13})c_1 + \frac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \frac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \frac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

$t=0$ 瞬时注射剂量 D_0
的药物进入中心室, 血
药浓度立即为 D_0/V_1

$$f_0(t) = 0, c_1(0) = \frac{D_0}{V_1}, c_2(0) = 0$$

$$c_1(t) = \frac{D_0}{V_1(\beta - \alpha)} [(k_{21} - \alpha)e^{-\alpha t} + (\beta - k_{21})e^{-\beta t}]$$

$$c_2(t) = \frac{D_0 k_{12}}{V_2(\beta - \alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21}k_{13} \end{cases}$$

2. 恒速静脉滴注

$0 \leq t \leq T$ 药物以速率 k_0 进入中心室

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12} + k_{13})c_1 + \frac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \frac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \frac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases} \quad f_0(t) = k_0, c_1(0) = 0, c_2(0) = 0$$

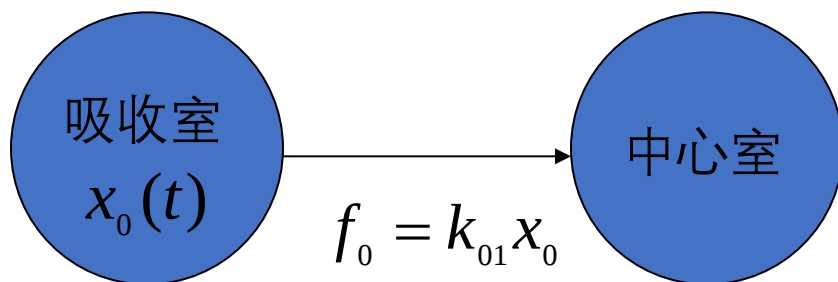
$$\begin{cases} c_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + B_1 e^{-\beta t} + \frac{k_0}{k_{13}V_1}, & 0 \leq t \leq T \\ c_2(t) = A_2 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} + \frac{k_{12}k_0}{k_{21}k_{13}V_2}, & 0 \leq t \leq T \\ A_2 = \frac{V_1(k_{12} + k_{13} - \alpha)}{k_{21}V_2} A_1, B_2 = \frac{V_1(k_{12} + k_{13} - \beta)}{k_{21}V_2} B_1 \end{cases}$$

$t > T$, $c_1(t)$ 和 $c_2(t)$ 按指数规律趋于零

3. 口服或肌肉注射



相当于药物(剂量 D_0)先进入吸收室，吸收后进入中心室



吸收室药量 $x_0(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = -k_{01}x_0 \\ x_0(0) = D_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{c}_1(t) = -(k_{12} + k_{13})c_1 + \frac{V_2}{V_1}k_{21}c_2 + \frac{f_0(t)}{V_1} \\ \dot{c}_2(t) = \frac{V_1}{V_2}k_{12}c_1 - k_{21}c_2 \end{cases}$$

$$x_0(t) = D_0 e^{-k_{01}t} \quad f_0(t) = k_{01}x_0(t) = D_0 k_{01} e^{-k_{01}t}$$

$$c_1(t) = Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ee^{-k_{01}t}$$

$$c_1(0) = 0, c_2(0) = 0 \Rightarrow A, B, E$$

参数估计

各种给药方式下的 $c_1(t)$, $c_2(t)$
取决于参数 k_{12} , k_{21} , k_{13} , V_1 , V_2

$t=0$ 快速静脉注射 D_0 , 在 $t_i (i=1,2,\dots,n)$ 测得 $c_1(t_i)$

$$c_1(t) = \frac{D_0}{V_1(\beta - \alpha)} [(k_{21} - \alpha)e^{-\alpha t} + (\beta - k_{21})e^{-\beta t}]$$

设 $\alpha < \beta$, t 充分大 $\Rightarrow c_1(t) = \frac{D_0(k_{21} - \alpha)}{V_1(\beta - \alpha)} e^{-\alpha t} = Ae^{-\alpha t}$

由较大的 t_i , $c_1(t_i)$ 用最小二乘法定 A , α

$$\tilde{c}_1(t) = c_1(t) - Ae^{-\alpha t} = Be^{-\beta t}$$

由较小的 t_i , $\tilde{c}_1(t_i)$ 用最小二乘法定 B , β

参数估计

$t \rightarrow \infty, c_1, c_2 \rightarrow 0 \Rightarrow$ 进入中心室的药物全部排除

$$D_0 = k_{13} V_1 \int_0^\infty c_1(t) dt \Rightarrow D_0 = k_{13} V_1 \left(\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} \right)$$

$$c_1(0) = \frac{D_0}{V_1} = A + B \Rightarrow k_{13} = \frac{\alpha\beta(A + B)}{\alpha B + \beta A}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k_{12} + k_{21} + k_{13} \\ \alpha\beta = k_{21}k_{13} \end{cases} \Rightarrow k_{21} = \frac{\alpha\beta}{k_{13}}$$

$$k_{12} = \alpha + \beta - k_{13} - k_{21}$$

5. 香烟过滤嘴的作用

问题

- 过滤嘴的作用与它的材料和长度有什么关系
- 人体吸入的毒物量与哪些因素有关，其中哪些因素影响大，哪些因素影响小。

模型分析

- 分析吸烟时毒物进入人体的过程，建立吸烟过程的数学模型。
- 设想一个“机器人”在典型环境下吸烟，吸烟方式和外部环境认为是不变的。

模型 假设

- 1) $l_1 \sim$ 烟草长, $l_2 \sim$ 过滤嘴长, $l = l_1 + l_2$, 毒物量 M 均匀分布, 密度 $w_0 = M/l_1$
- 2) 点燃处毒物随烟雾进入空气和沿香烟穿行的数量比是 $a' : a$, $a' + a = 1$
- 3) 未点燃的烟草和过滤嘴对随烟雾穿行的毒物的(单位时间)吸收率分别是 b 和 β
- 4) 烟雾沿香烟穿行速度是常数 v , 香烟燃烧速度是常数 u , $v \gg u$

定性分析

$Q \sim$ 吸一支烟毒物进入人体总量

$$\beta \uparrow, l_2 \uparrow, M \downarrow, a \downarrow, v \downarrow \Rightarrow Q \downarrow$$

$$b \uparrow, l_1 \uparrow \Rightarrow Q \downarrow ?$$

$$u \uparrow \Rightarrow Q \uparrow \downarrow ?$$

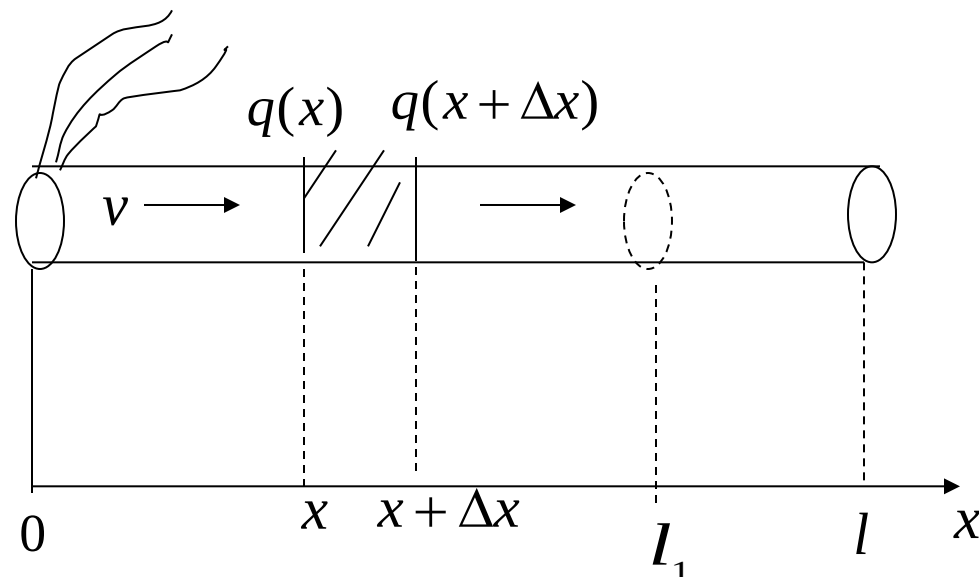
模型建立

$t=0, x=0$, 点燃香烟

$q(x,t) \sim$ 毒物流量

$w(x,t) \sim$ 毒物密度

$$w(x,0) = w_0$$



$$Q = \int_0^T q(l,t) dt, \quad T = l_1 / u$$

1) 求 $q(x,0)=q(x)$

$$q(x) - q(x + \Delta x) = \begin{cases} bq(x)\Delta\tau, & 0 \leq x \leq l_1, \\ \beta q(x)\Delta\tau, & l_1 \leq x \leq l, \end{cases} \quad \Delta\tau = \frac{\Delta x}{v}$$

$$\frac{dq}{dx} = \begin{cases} -\frac{b}{v} q(x), & 0 \leq x \leq l_1 \\ -\frac{\beta}{v} q(x), & l_1 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q(0) &= aH_0 \\ H_0 &= uw_0 \end{aligned}$$

1) 求 $q(x,0)=q(x)$

$$q(x) = \begin{cases} aH_0 e^{-\frac{bx}{v}}, & 0 \leq x \leq l_1 \\ aH_0 e^{-\frac{bl_1}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1 \leq x \leq l \end{cases}$$

2) 求 $q(l,t)$

t 时刻, 香烟燃至 $x=ut$

$$H(t) = uw(ut, t)$$

$$q(x, t) = \begin{cases} aH(t) e^{-\frac{b(x-ut)}{v}}, & ut \leq x \leq l_1 \\ aH(t) e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta(x-l_1)}{v}}, & l_1 \leq x \leq l \end{cases}$$

$$q(l, t) = auw(ut, t) e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}} e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

3) 求 $w(ut, t)$

$$w(x, t + \Delta t) - w(x, t) = b \frac{q(x, t)}{v} \Delta t$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{b}{v} a u w(ut, t) e^{-\frac{b(x-ut)}{v}} \\ w(x, 0) = w_0 \end{cases}$$

$$w(ut, t) = \frac{w_0}{a'} \left(1 - a e^{-\frac{a' b u t}{v}} \right), \quad a' = 1 - a$$

4) 计算 Q

$$w(ut, t) = \frac{w_0}{a'} \left(1 - ae^{-\frac{a'but}{v}} \right)$$

$$q(l, t) = auw(ut, t)e^{-\frac{b(l_1-ut)}{v}}e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$$

$$q(l, t) = \frac{auw_0}{a'} e^{-\frac{bl_1}{v}} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(e^{-\frac{but}{v}} - ae^{-\frac{abut}{v}} \right)$$

$$Q = \int_0^{l_1/u} q(l, t) dt = \frac{aw_0v}{a'b} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a'bl_1}{v}} \right)$$

$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}} \varphi(r),$$

$$r = \frac{a'bl_1}{v}, \varphi(r) = \frac{1 - e^{-r}}{r}$$

结果分析

$$Q = aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}} \varphi(r), \quad r = \frac{a'bl_1}{v}, \quad \varphi(r) = \frac{1 - e^{-r}}{r}$$

1) Q 与 a, M 成正比, aM 是毒物集中在 $x=l$ 处的吸入量

2) $e^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ ~ 过滤嘴因素, β, l_2 ~ 负指数作用

$aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}}$ 是毒物集中在 $x=l_1$ 处的吸入量

3) $\varphi(r)$ ~ 烟草的吸收作用

烟草为什么有作用?

$$r = \frac{a'bl_1}{v} \ll 1 \quad \varphi(r) \doteq 1 - r/2$$

$$Q \doteq aMe^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(1 - \frac{a'bl_1}{2v} \right)$$

b, l_1 ~ 线性作用

结果 分析

4) 与另一支不带过滤嘴的香烟比较, w_0, b, a, v, l 均相同, 吸至 $x=l_1$ 扔掉

带过滤嘴

$$Q_1 = \frac{aw_0v}{a'b} e^{-\frac{\beta l_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a'bl_1}{v}} \right)$$

不带过滤嘴

$$Q_2 = \frac{aw_0v}{a'b} e^{-\frac{bl_2}{v}} \left(1 - e^{-\frac{a'bl_1}{v}} \right)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = e^{-\frac{(\beta-b)l_2}{v}}$$

$$\beta > b \Rightarrow Q_1 < Q_2$$

提高 $\beta-b$ 与加长 l_2 , 效果相同

6. 人口预测和控制

- 年龄分布对于人口预测的重要性
- 只考虑自然出生与死亡，不计迁移

人口 发展 方程

$F(r, t) \sim$ 人口分布函数 (年龄 $< r$ 的人口)

$p(r, t) \sim$ 人口密度函数

$N(t) \sim$ 人口总数

$r_m (\rightarrow \infty) \sim$ 最高年龄

$$F(0, t) = 0, F(r_m, t) = N(t)$$

$$p(r, t) = \frac{\partial F}{\partial r}$$

人口发展方程

$\mu(r, t) \sim$ 死亡率

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} t \\ \text{年龄}[r, r + dr] \text{ 人数} \end{array} & \text{---} & \begin{array}{c} t + dt \\ \text{年龄}[r + dr_1, r + dr_1 + dr] \text{ 人数} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \\ dt = dr_1 \end{array} & \begin{array}{c} (t, t + dt) \text{ 内} \\ \text{死亡人数} \end{array} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

$$p(r, t)dr - p(r + dr_1, t + dt)dr = \mu(r, t)p(r, t)drdt$$

$$\begin{aligned} & [p(r + dr_1, t + dt) - p(r, t + dt)] + [p(r, t + dt) - p(r, t)] \\ & = -\mu(r, t)p(r, t)dt, \quad dt = dr_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r, t)p(r, t)$$

一阶偏微分方程

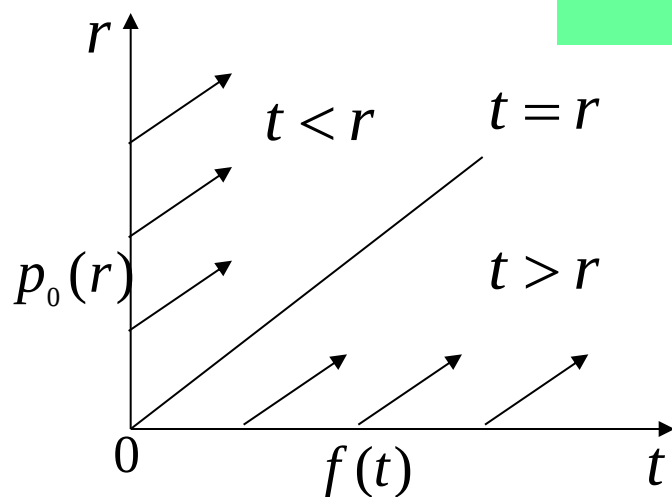
$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} = -\mu(r, t) p(r, t) \\ p(r, 0) = p_0(r), \quad r \geq 0 \\ p(0, t) = f(t), \quad t \geq 0 \end{cases}$$

人口发展方程

~已知函数（人口调查）

~生育率（控制人口手段）

$$\mu(r, t) = \mu(r) \Rightarrow p(r, t) = \begin{cases} p_0(r-t)e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}, & 0 \leq t \leq r \\ f(t-r)e^{-\int_0^r \mu(s) ds}, & t > r \end{cases}$$



$$F(r, t) = \int_0^r p(s, t) ds$$

$$N(t) = \int_0^{r_m} p(s, t) ds$$

生育率的分解



$k(r, t) \sim$ (女性)性别比函数

$b(r, t) \sim$ (女性)生育数 $[r_1, r_2] \sim$ 育龄区间

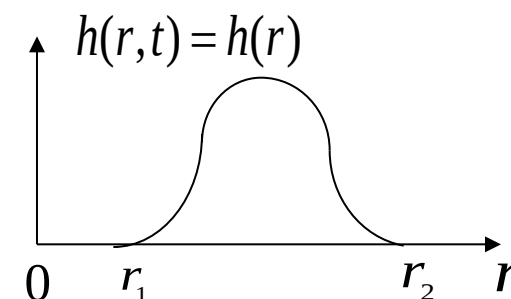
$$f(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r, t) k(r, t) p(r, t) dr$$

$$b(r, t) = \beta(t) h(r, t)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} h(r, t) dr = 1 \quad h \sim \text{生育模式}$$

$$\beta(t) = \int_{r_1}^{r_2} b(r, t) dr \quad \beta \sim \text{总和生育率}$$

$$f(t) = \beta(t) \int_{r_1}^{r_2} h(r, t) k(r, t) p(r, t) dr$$



人口发展方程和生育率

$$f(t) = \beta(t) \int_{r_1}^{r_2} h(r, t) k(r, t) p(r, t) dr$$

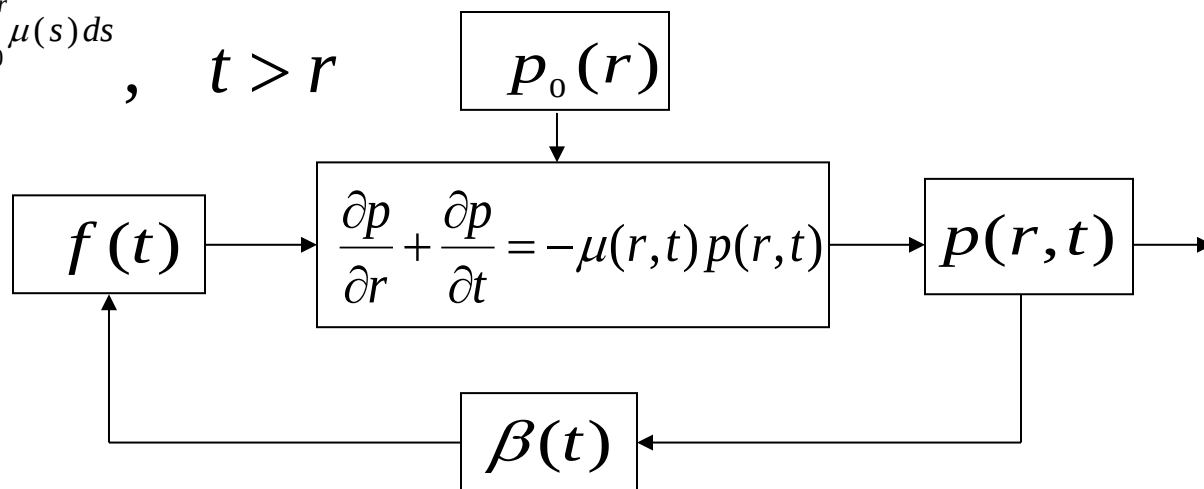
$\beta(t)$ ~ 总和生育率——控制生育的多少

$h(r, t)$ ~ 生育模式——控制生育的早晚和疏密

$$p(r, t) = \begin{cases} p_0(r-t) e^{-\int_{r-t}^r \mu(s) ds}, & 0 \leq t \leq r \\ f(t-r) e^{-\int_0^r \mu(s) ds}, & t > r \end{cases}$$

• 正反馈系统

• 滞后作用很大



人口指数

1) 人口总数 $N(t) = \int_0^{r_m} p(r, t) dr$

2) 平均年龄 $R(t) = \frac{1}{N(t)} \int_0^{r_m} r p(r, t) dr$

3) 平均寿命 $S(t) = \int_t^\infty e^{-\int_0^{\tau-t} \mu(r, t) dr} d\tau$

t 时刻出生的人，死亡率按 $\mu(r, t)$ 计算的平均存活时间

4) 老龄化指数 $\omega(t) = R(t) / S(t)$

控制生育率



控制 $N(t)$ 不过大

控制 $\omega(t)$ 不过高

7. 烟雾的扩散与消失

现象 和 问题

炮弹在空中爆炸，烟雾向四周扩散，形成圆形不透光区域。

不透光区域不断扩大，然后区域边界逐渐明亮，区域缩小，最后烟雾消失。

建立模型描述烟雾扩散和消失过程，分析消失时间与各因素的关系。

问题 分析

无穷空间由瞬时点源导致的扩散过程，用二阶偏微分方程描述烟雾浓度的变化。

观察的烟雾消失与烟雾对光线的吸收，以及仪器对明暗的灵敏程度有关。

模型假设

- 1) 烟雾在无穷空间扩散，不受大地和风的影响；扩散服从热传导定律。
- 2) 光线穿过烟雾时光强的减少与烟雾浓度成正比；无烟雾的大气不影响光强。
- 3) 穿过烟雾进入仪器的光线只有明暗之分，明暗界限由仪器灵敏度决定。

模型建立

- 1) 烟雾浓度 $C(x, y, z, t)$ 的变化规律

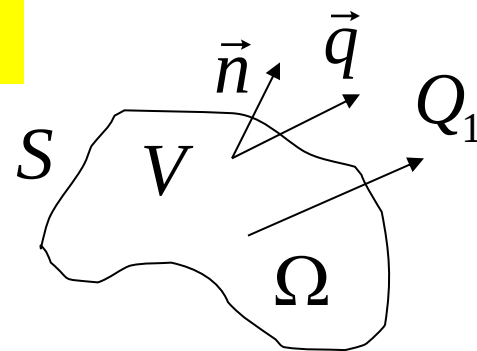
热传导定律：单位时间通过单位法向面积的流量与浓度梯度成正比

$$\vec{q} = -k \cdot \text{grad}C$$

1) 烟雾浓度 $C(x, y, z, t)$ 的变化规律

$[t, t + \Delta t]$ 通过 Ω 流量

$$Q_1 = \int_t^{t+\Delta t} \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma dt$$



Ω 内烟雾改变量 $Q_2 = \iiint_V [C(x, y, z, t) - C(x, y, z, t + \Delta t)] dV$

曲面积分的奥氏公式 $\iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{q} dV$

$$Q_1 = Q_2$$

$$\vec{q} = -k \cdot \text{grad} C$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k[\text{div}(\text{grad} C)] = k \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

1) 烟雾浓度 $C(x, y, z, t)$ 的变化规律

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right), \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0$$

初始条件

$$C(x, y, z, 0) = Q\delta(x, y, z)$$

Q ~炮弹释放的烟雾总量

δ ~单位强度的点源函数

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4kt}}$$

- 对任意 t , C 的等值面是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; $R \uparrow \rightarrow C \downarrow$
- 仅当 $t \rightarrow \infty$, 对任意点 (x, y, z) , $C \rightarrow 0$

2) 穿过烟雾光强的变化规律

$I(l) \sim$ 沿 l 方向的光强

光强的减少与烟

$C(l) \sim$ 沿 l 方向的烟雾浓度

雾浓度成正比

$$\frac{dI}{dl} = -\alpha C(l)I(l)$$

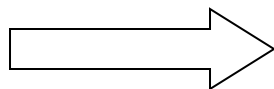
$I(l_0) = I_0$ 未进入烟雾($l \leq l_0$)的光强为 I_0

⇒
$$I(l) = I_0 e^{-\alpha \int_{l_0}^l C(s) ds}$$

3) 仪器灵敏度与烟雾明暗界限

$$I(l) = I_0 e^{-\alpha \int_{l_0}^l C(s) ds}$$

烟雾浓度连续变化



不透光区域有扩大、

烟雾中光强连续变化



缩小、消失的过程

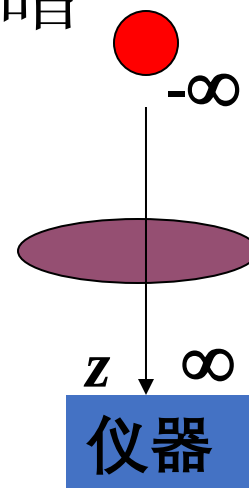
穿过烟雾进入仪器的光线只有明暗之分，明暗界限由仪器灵敏度决定。

$\mu \sim$ 仪器灵敏度，当 $I / I_0 < 1 - \mu$ ，观测结果为暗

设光源在 $z = -\infty$ ，仪器在 $z = \infty$ ，则观测到的明暗界限为

$$e^{-\alpha \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz} = 1 - \mu$$

$\sim$ 不透光区域边界



4) 不透光区域边界的变化规律

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}} \quad e^{-\alpha \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz} = 1 - \mu$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1 - \mu} \approx \frac{\mu}{\alpha} \quad (\mu \text{ 很小})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a} dx = \sqrt{\pi a} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz = \frac{Q}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}}$$

$$\frac{Q}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} = \frac{\mu}{\alpha}$$

对任意 t , 不透光区域边界是圆周

$$x^2 + y^2 = r^2$$

不透光区域
边界半径

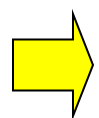
$$r(t) = \sqrt{4kt \ln \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu t}}$$

结果分析

$$r(t) = \sqrt{4kt \ln \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu t}}$$

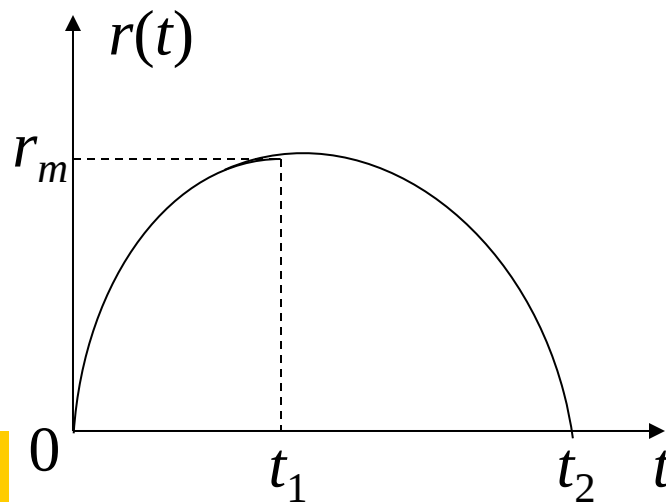
$$t = t_1 = \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu e}, \quad r = r_m = \sqrt{\frac{\alpha Q}{\pi \mu e}} \text{ (最大值)}$$

$$t = t_2 = \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu}, \quad r = 0$$



$$t_2 = t_1 \cdot e \doteq 2.7t_1$$

观测到不透光区域边界达到最大的时刻 t_1 ，可以预报烟雾消失的时刻 t_2



$$\alpha \uparrow, Q \uparrow, \mu \downarrow \Rightarrow t_1 \uparrow, r_m \uparrow \quad k \downarrow \Rightarrow t_1 \uparrow$$



中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

谢谢！