

# 生物型体竞争模型的保正值有限体积WENO格式

张瑞

中国科技大学数学科学学院

2012年8月21日

本工作在舒其望教授、张梦萍教授指导下完成

# 摘要

- 1 模型简介
- 2 有限体积WENO格式
- 3 保正值的WENO格式
- 4 算例
- 5 有限体积WENO格式简介

# 1 模型简介

如何模拟一个或多个生物种群个体数量在特定的环境下随时间的演变？

- 年龄
- 发育程度
- 型体大小 (具有广泛而普遍的意义)
- 其它生物特征

个体的数量相关的量包括：环境、生理规律（繁殖率、死亡率、成长速度），它们相互影响、关联。

# 生物型体竞争模型

$$\begin{aligned}
 u_t + (g(x, Q(x, t))u)_x + m(x, Q(x, t))u &= 0, \quad (x, t) \in (0, L] \times (0, T] \\
 g(0, Q(0, t))u(0, t) &= C(t) + \int_0^L \beta(x, Q(x, t))u(x, t)dx, \quad t \in (0, T] \\
 u(x, 0) &= u^0(x), \quad x \in [0, L]
 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $u(x, t)$ 是在时间 $t$ 时个体大小为 $x$ 的生物体密度。包括全局积分的函数 $Q(x, t)$ 定义为

$$Q(x, t) = \alpha \int_0^x \omega(\xi)u(\xi, t)d\xi + \int_x^L \omega(\xi)u(\xi, t)d\xi, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (2)$$

其中 $\omega$ 为权函数。 $Q(x, t)$ 通常被称为环境影响因子，由生物密度函数 $u$ 的加权全局积分决定。

$g$ 表示增长率， $m$ 表示死亡率， $\beta$ 表示繁殖率。

# 弱解存在唯一性的假设条件

Ackleh、Deng、Hu在2005年给出了弱解存在唯一性的假设条件

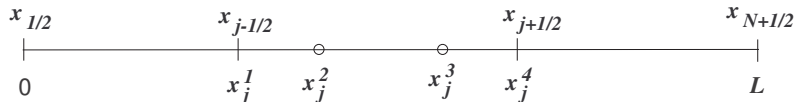
- (H1)  $g(x, Q)$  对 $x$ 和 $Q$ 均为2阶连续可导； $g(x, Q) > 0$ 对 $x \in [0, L)$ 成立； $g(L, Q) = 0$ ； $g_Q(x, Q) \leq 0$ 。
- (H2)  $m(x, Q)$  对 $x$ 和 $Q$ 均非负连续可导。
- (H3)  $\beta(x, Q)$  对 $x$ 和 $Q$ 均非负连续可导，且存在常数 $\omega_1 > 0$ 使得 $\sup_{(x, Q) \in [0, L] \times [0, \infty)} \beta(x, Q) \leq \omega_1$ 。
- (H4)  $\omega(x)$  非负连续可导。
- (H5)  $C(t)$  非负连续可导。
- (H6)  $u^0(x) \in BV[0, L]$  且 $u^0(x) \geq 0$ 。

- 差分类方法：
  - Lax-Wendroff (Sulsky) , 2阶精度, 间断处会数值振荡
  - 一些隐格式, 如BOX格式 (Angulo等) , 稳定性好, 2阶精度, 仍有数值振荡, 难于得到对一般情形下的方程的收敛结果
  - 对一般方程的2阶收敛的显格式 (Shen等)
  - WENO (Shen等)
- 特征线方法: SGN, AGN, 2阶精度, 收敛条件更苛刻

## 2 有限体积WENO格式



## 有限体积WENO格式



空间域为  $[0, L]$ , 记把它  $N$  等分后的网格点为  $x_{j+1/2}, j = 0, 1, \dots, N$ , 则  $x_{1/2} = 0$  和  $x_{N+1/2} = L$ 。在每个网格  $I_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  上, 记  $K$ -点 Gauss-Lobatto 点为

$$S_j = \{x_{j-1/2} = \hat{x}_j^1, \hat{x}_j^2, \dots, \hat{x}_j^{K-1}, \hat{x}_j^K = x_{j+1/2}\}.$$

要构造 5 阶精度的格式, 取  $K = 4$  就可以了。同样, 记

$$u_{j+1/2} = u(x_{j+1/2}, t), \quad Q_{j+1/2} = Q(x_{j+1/2}, t), \quad g_{j+1/2} = g(x_{j+1/2}, Q_{j+1/2})$$

$$u_j^k = u(\hat{x}_j^k, t), \quad Q_j^k = Q(\hat{x}_j^k, t), \quad \beta_j^k = \beta(\hat{x}_j^k, Q_j^k),$$

$$m_j^k = m(\hat{x}_j^k, Q_j^k), \quad \omega_j^k = \omega(\hat{x}_j^k), \quad C^n = C(t^n).$$

网格积分平均值

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx.$$

类似地，记

$$\overline{mu}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} m(x, Q) u(x, t) dx.$$

对模型方程(1)在网格 $I_j$ 上积分，然后除以 $\Delta x$ ，可得

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_j + \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1/2} - f_{j-1/2}) + \overline{mu}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (3)$$

其中

$$f_{j+1/2} = g(x_{j+1/2}, Q(x_{j+1/2}, t)) u(x_{j+1/2}, t)$$

为物理通量。

把方程(3)变为数值格式

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_j + \frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{j+1/2} - \hat{f}_{j-1/2}) + \overline{mu}_j = 0, \quad 1 \leq j \leq N \quad (4)$$

其中 $\hat{f}_{j+1/2}$ 为数值通量。由 $g \geq 0$ ,  $\hat{f}_{j+1/2}$ 的迎风形式为

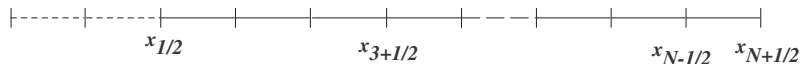
$$\hat{f}_{j+1/2} = g_{j+1/2}u_{j+1/2}^- = g_j^K u_j^K, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

$\overline{mu}_j$ 可以用Gauss-Lobatto积分来计算

$$\overline{mu}_j = \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k m_j^k u_j^k \quad (6)$$

其中的 $\hat{\omega}_k$ 是积分系数。如 $K = 4$ 的情形下, 我们有 $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_4 = 1/12$ ,  $\hat{\omega}_2 = \hat{\omega}_3 = 5/12$ 。

## 数值通量(5)的计算



- $g_{1/2}u_{1/2}$  : 由边界条件得到
- $u_{j+1/2}^-, j = 3, \dots, N$  : 由WENO插值得到
- $u_{j+1/2}^-, j = 1, 2$  : 需要用到ghost网格。两个ghost网格上的积分平均可以取为函数  $p_g(x)$  在网格上的积分平均。  $p_g(x)$  是满足如下条件的插值多项式

$$p_g(0) = u_{1/2}, \quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} p_g(x) = \bar{u}_j, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

其中的  $u_{1/2}$  是  $u$  在左边界的值, 它由边界条件计算得到。

$$\begin{aligned}\bar{u}_0 &= \int_{-\Delta x}^0 p_g(x) dx = \frac{1}{12}(60u_{1/2} - 77\bar{u}_1 + 43\bar{u}_2 - 17\bar{u}_3 + 3\bar{u}_4) \\ \bar{u}_{-1} &= \int_{-2\Delta x}^{-\Delta x} p_g(x) dx = \frac{1}{12}(300u_{1/2} - 505\bar{u}_1 + 335\bar{u}_2 - 145\bar{u}_3 + 27\bar{u}_4)\end{aligned}\tag{7}$$

# 边界条件

用 $K$ -点Gauss-Lobatto复化积分来计算

$$\hat{f}_{1/2} = g_{1/2}u_{1/2} = C + \Delta x \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k \beta_j^k u_j^k. \quad (8)$$

这样,  $u$  在左边界值可由下式得到

$$u_{1/2} = \frac{\hat{f}_{1/2}}{g_{1/2}} \quad (9)$$

# 环境 $Q_j^k = \alpha \int_0^x \omega(\xi)u(\xi, t)d\xi + \int_x^L \omega(\xi)u(\xi, t)d\xi$ 的计算



$$Q_j^k = \left( \alpha \sum_{i=1}^{j-1} \bar{Q}_i + \alpha \sum_{\ell=1}^k \bar{Q}_j^\ell + \sum_{\ell=k+1}^K \bar{Q}_j^\ell + \sum_{i=j+1}^N \bar{Q}_i \right) \Delta x \quad (10)$$

其中  $\bar{Q}_j^l$  是取积分点为  $\{x_j^l, l = 1, 2, 3, 4\}$  对

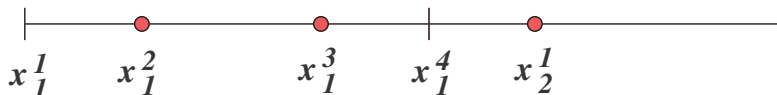
$$\int_{x_j^{l-1}}^{x_j^l} \omega(\xi)u(\xi, t)d\xi$$

做的积分近似，其中取  $x_j^0 = x_j^1$ 。

$$\bar{Q}_j = \sum_{k=1}^K \bar{Q}_j^k,$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_j^1 &= 0 \\ \bar{Q}_j^2 &= \left( \frac{11}{120} + \frac{1}{24\sqrt{5}} \right) \omega_j^1 u_j^1 + \frac{25 - \sqrt{5}}{120} \omega_j^2 u_j^2 + \frac{25 - 13\sqrt{5}}{120} \omega_j^3 u_j^3 \\ &\quad + \left( -\frac{1}{120} + \frac{1}{24\sqrt{5}} \right) \omega_j^4 u_j^4 \\ \bar{Q}_j^3 &= -\frac{1}{12\sqrt{5}} \omega_j^1 u_j^1 + \frac{7}{12\sqrt{5}} \omega_j^2 u_j^2 + \frac{7}{12\sqrt{5}} \omega_j^3 u_j^3 + \frac{1}{12\sqrt{5}} \omega_j^4 u_j^4 \\ \bar{Q}_j^4 &= \left( -\frac{1}{120} + \frac{1}{24\sqrt{5}} \right) \omega_j^1 u_j^1 + \frac{25 - 13\sqrt{5}}{120} \omega_j^2 u_j^2 + \frac{25 - \sqrt{5}}{120} \omega_j^3 u_j^3 \\ &\quad + \left( \frac{11}{120} + \frac{1}{24\sqrt{5}} \right) \omega_j^4 u_j^4 \end{aligned}$$





最左边的区间 $I_1$ ，取积分节点为 $\{x_1^2, x_1^2, x_1^4, x_1^2\}$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^1 &= 0 \\ \bar{Q}_1^2 &= \frac{9+5\sqrt{5}}{40}\omega_1^2 u_1^2 + \frac{5-67\sqrt{5}}{240}\omega_1^3 u_1^3 + \frac{4+\sqrt{5}}{12}\omega_1^4 u_1^4 \\ &\quad + \left( \frac{11}{120(-3+\sqrt{5})} + \frac{1}{24\sqrt{5}(-3+\sqrt{5})} \right) \omega_2^2 u_2^2 \\ \bar{Q}_1^3 &= \frac{1}{2+2\sqrt{5}}\omega_1^2 u_1^2 + \frac{35+33\sqrt{5}}{240}\omega_1^3 u_1^3 + \frac{-5-9\sqrt{5}}{120}\omega_1^4 u_1^4 \\ &\quad + \frac{-1}{12\sqrt{5}(-3+\sqrt{5})}\omega_2^2 u_2^2 \\ \bar{Q}_1^4 &= \frac{11-5\sqrt{5}}{40}\omega_1^2 u_1^2 + \frac{35-\sqrt{5}}{240}\omega_1^3 u_1^3 + \frac{5+2\sqrt{5}}{60}\omega_1^4 u_1^4 \\ &\quad + \left( \frac{-1}{120(-3+\sqrt{5})} + \frac{1}{24\sqrt{5}(-3+\sqrt{5})} \right) \omega_2^2 u_2^2 \end{aligned}$$

# 有限体积WENO格式的算法流程

- 1 用WENO重构(32)得到所有Gauss-Lobatto点的值 $u_j^k$ ；
- 2 由(10)计算环境 $Q_j^k$ ；
- 3 由(8)计算左边界的通量 $\hat{f}_{1/2}$ ，然后由(9)计算左边界的值 $u_{1/2}$ ；
- 4 由(7)计算Ghost网格上的积分平均；
- 5 用WENO重构(32)重新计算邻近左边界的两个网格上的Gauss-Lobatto点的值 $u_j^k, j = 1, 2$ ；
- 6 取 $u_{j+1/2}^- = u_j^K$ 来计算数值通量(5)；由 $u_j^k$ 计算死亡率(6)；
- 7 得到有限体积格式(4)，然后用3阶TVD Runge-Kutta格式(42)求解。

### 3 保正值的WENO格式

## 保正值的WENO格式

对于格式(4), 当我们采用向前Euler格式做时间层离散后, 可以得到

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \lambda(\hat{f}_{j+1/2}^n - \hat{f}_{j-1/2}^n) + \Delta t \overline{mu}_j^n, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (11)$$

假定在网格 $I_j$ 上有个 $r$ 阶多项式 $p_j(x)$ , 并且 $p_j(x)$ 在 $I_j$ 上的积分平均就是 $\bar{u}_j^n$ 。记 $\hat{v}^k = p_j(\hat{x}_j^k), k = 1, \dots, K$ 。取 $K$ 为满足 $2K - 3 \geq r$ 的最小整数, 则有

$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} p_j(x) dx = \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k \hat{v}^k. \quad (12)$$

如前所述, 我们要构造的是5阶格式, 因此 $r = 4$ , 这样我们可以取 $K = 4$ 。

由 (12), 方程(11)可以写为

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_j^{n+1} &= \bar{u}_j^n + \lambda(g_{j-1/2} u_{j-1/2}^- - g_{j+1/2} u_{j+1/2}^-) - \bar{m} \bar{u}_j \Delta t \\
 &= \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k \hat{v}^k + \lambda(g_{j-1/2} u_{j-1/2}^- - g_{j+1/2} u_{j+1/2}^-) - \Delta t \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k m_j^k \hat{v}^k \\
 &= \lambda g_{j-1/2} u_{j-1/2}^- + u_{j+1/2}^- \left[ \hat{\omega}_K - \lambda(g_{j+1/2} + \hat{\omega}_K m_j^K \Delta x) \right] \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{K-1} \hat{\omega}_k \hat{v}^k (1 - \Delta t m_j^k)
 \end{aligned}$$

## 定理

考虑如上有限体积格式(11)和相应的 $r$ 阶多项式 $p_j(x)$ , 如果所有的 Gauss-Lobatto点值 $\hat{v}^k, k = 1, \dots, K$  及  $\bar{u}_j^n$  都是非负的, 则当CFL条件

$$\lambda \leq \min_j \left( \frac{\hat{\omega}_K}{g_j^K + \hat{\omega}_K m_j^K \Delta x}, \min_{1 \leq k \leq K-1} \frac{1}{m_j^k \Delta x} \right). \quad (13)$$

满足时,  $\bar{u}_j^{n+1}$  也是非负的。

# 两个要点



$$\bar{u}_j^n = \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k \hat{v}^k$$

- $\hat{v}^k$ 非负

$$\hat{v}^k \geq 0$$

# Zhang、Shu 限制器

对所有 $j$ , 假定 $\bar{u}_j^n \geq 0$ , 则我们可以重新取 $p_j(x)$ 为

$$\tilde{p}_j(x) = \theta(p_j(x) - \bar{u}_j^n) + \bar{u}_j^n \quad (14)$$

其中

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{u}_j^n}{\bar{u}_j^n - \hat{m}_j}, 1 \right\}, \quad \hat{m}_j = \min_{\alpha} p_j(\hat{x}_j^{\alpha}) \quad (15)$$

他们证明了当 $\bar{u}_j^n \geq 0$ 成立时, 这种限制器仍然保持高精度。



需要说明的是，实际上我们并不需要显式地构造出 $p_j(x)$ ，然后对它使用限制器(14)-(15)。因为就算法本身而言，我们需要的只是多项式 $p_j(x)$ 或修正后的多项式 $\tilde{p}_j(x)$ 在Gauss-Lobatto点上的值。当然这些值

$$\hat{v}^k = p_j(\hat{x}_j^k), \quad \tilde{v}^k = \tilde{p}_j(\hat{x}_j^k) \quad (16)$$

必须满足

$$\sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k \hat{v}^k = \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k \tilde{v}^k = \bar{u}_j \quad (17)$$

因为保正值限制器不能改变解的网格积分平均值。当满足(17)的多项式 $p_j(x)$ 存在时，那么由(14)就可以得到满足(17)的多项式 $\tilde{p}_j(x)$ 。 $p_j(x)$ 这个多项式的次数并不重要，而只要 $\hat{v}^k$ 具有足够的精度。

由WENO重构出的Gauss-Lobatto点上的值满足

$$u_j^k = u(\hat{x}_j^k, t^n) + O(\Delta x^5), \quad 1 \leq k \leq K \quad (18)$$

这样，我们可以用如下的简单过程来修正 $\hat{v}^k$ :

1 取 $\hat{v}^k$ 满足(17)

$$\hat{v}^k = u_j^k + \hat{\alpha}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{u}_j - \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k u_j^k$$

2 修正Gauss-Lobatto点上的值

$$\tilde{v}^k = \theta(\hat{v}^k - \bar{u}_j^n) + \bar{u}_j^n. \quad (19)$$

$$\theta = \min \left\{ \frac{\bar{u}_j^n}{\bar{u}_j^n - \hat{m}_j}, 1 \right\}, \quad \hat{m}_j = \min_{1 \leq k \leq K} \hat{v}^k. \quad (20)$$

显然, 由(18)知, 上面第1步中,  $\hat{\alpha}$ 是个5阶小量 $O(\Delta x^5)$ , 它并不会影响精度。我们还可以使用如下更好但稍微复杂点的公式来计算 $\hat{v}^k$

$$\hat{v}^k = \alpha \left( \frac{1}{\alpha^+} (u_j^k - \bar{u}_j)^+ - \frac{1}{\alpha^-} (u_j^k - \bar{u}_j)^- \right) + \bar{u}_j, \quad 1 \leq k \leq K,$$

其中

$$\alpha^\pm = \sum_{k=1}^K \hat{\omega}_k (u_j^k - \bar{u}_j)^\pm, \quad \alpha = \min(\alpha^+, -\alpha^-)$$

$$a^+ = \max(a, 0) \quad a^- = \min(a, 0)$$

# 保正值WENO格式

在原来的WENO格式中，每次得到重构值 $u_j^k$ 后，使用公式(19)来修正。我们记这个格式为PP-WENO格式。

- 1 用WENO重构(32)得到所有Gauss-Lobatto点的值 $u_j^k$ ，用(19)修正 $u_j^k$ ， $j = 1, 2, \dots, N$ ；
- 2 由(10)计算环境 $Q_j^k$ ；
- 3 由(8)计算左边界的通量 $\hat{f}_{1/2}$ ，然后由(9)计算左边界的值 $u_{1/2}$ ；
- 4 由(7)计算Ghost网格上的积分平均；
- 5 用WENO重构(32)重新计算邻近左边界的两个网格上的Gauss-Lobatto点的值 $u_j^k$ ，用(19)修正 $u_j^k$ ， $j = 1, 2$ ；
- 6 取 $u_{j+1/2}^- = u_j^k$ 来计算数值通量(5)；由 $u_j^k$ 计算死亡率(6)；
- 7 得到有限体积格式(4)，然后用3阶TVD Runge-Kutta格式(42)求解。

## 定理

当  $t^n \leq T$  时,  $\|\bar{u}^n\|_{L^1}$  对网格尺寸一致有界。

证明：由  $\bar{u}_j^n \geq 0$ ,  $m_j^{n,\alpha} \geq 0$ ,  $u_j^{n,\alpha} \geq 0$ , 及  $g_{N+1/2}^n = 0$ , 我们有

$$\begin{aligned}
 \frac{\|\bar{u}^{n+1}\|_{L^1} - \|\bar{u}^n\|_{L^1}}{\Delta t} &= \sum_{j=1}^N \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{\Delta t} \Delta x \\
 &= \sum_{j=1}^N \left( \hat{f}_{j-1/2}^n - \hat{f}_{j+1/2}^n \right) - \sum_{j=1}^N \Delta x \sum_{\alpha=1}^K \hat{\omega}_\alpha m_j^{n,\alpha} u_j^{n,\alpha} \\
 &\leq \sum_{j=1}^N \left( \hat{f}_{j-1/2}^n - \hat{f}_{j+1/2}^n \right) \\
 &= \hat{f}_{1/2}^n - \hat{f}_{N+1/2}^n = \hat{g}_{1/2}^n u_{1/2}^n \\
 &= C^n + \sum_{j=1}^N \Delta x \sum_{\alpha=1}^K \hat{\omega}_\alpha \beta_j^{n,\alpha} u_j^{n,\alpha} \\
 &\leq C^n + \omega_1 \|\bar{u}^n\|_{L^1}
 \end{aligned}$$

其中的  $\omega_1$  是特性(H3)中要求的  $\beta(x, Q)$  的上界。记  $C$  是  $C(t), t \in [0, T]$  的上界。则对常值的  $\Delta t$ , 我们有

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^n\|_{L^1} &\leq \Delta t C + (1 + \omega_1 \Delta t) \|\bar{u}^{n-1}\|_{L^1} \\ &\leq (1 + \omega_1 \Delta t)^n \|\bar{u}^0\|_{L^1} + \sum_{j=0}^{n-1} (1 + \omega_1 \Delta t)^j C \Delta t \\ &\leq e^{\omega_1 T} \|\bar{u}^0\|_{L^1} + \frac{C e^{\omega_1 T}}{\omega_1} \end{aligned}$$



4

## 算例

- 食蚊鱼型体竞争模型：Gambusia Affinis

## 算例1

$$L = 1, \alpha = 0.5$$

$$u^0(x) = \begin{cases} 4(x - 3/4)^2, & 0.5 < x \leq 1 \\ 0, & 0 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$$

$$\omega(x) = 1$$

$$g(x, Q) = (1 - x)(5 - x + x^2/2 - Q) \quad (21)$$

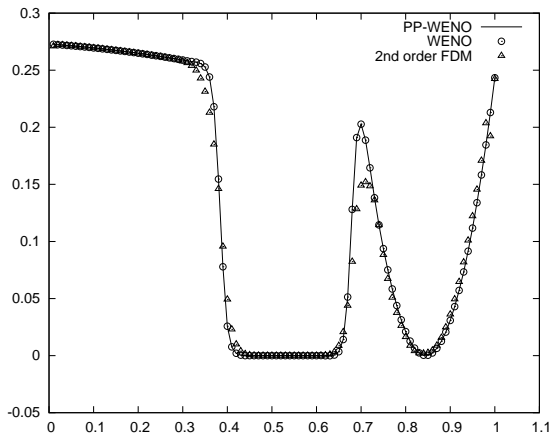
$$m(x, Q) = 4 + 2Q + \frac{(x - 1)^2}{2}$$

$$\beta(x, Q) = (1 + x)(2 - Q)$$

$$C(t) = 1$$

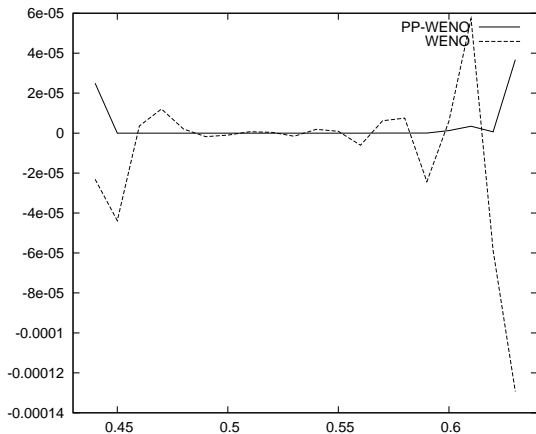


# 时间 $t = 0.1$ 的数值结果



**Figure:**  $N = 100$ 均匀网格, 时间  $t = 0.1$  的解。 三角形：2阶高分辨有限差分格式；圆形：5阶有限体积WENO格式；实线：5阶PP-WENO格式。

# 零值附近的区域放大图



**Figure:** 零值附近的区域放大图。实线：5阶PP-WENO格式；虚线：5阶有限体积WENO格式。

## 算例 2

$$L = 1, \alpha = 0.5$$

$$B(t) = \frac{1+t}{2+t}$$

$$\omega(x) = 1$$

$$g(x, Q) = \begin{cases} B'(t) + B(t) - x, & 0 \leq x \leq B(t) \\ 0, & B(t) \leq x \leq L \end{cases}$$

$$m(x, Q) = \begin{cases} -\frac{8B'(t)+8B(t)-14x-6}{x+1}, & 0 \leq x \leq B(t) \\ 0, & B(t) \leq x \leq L \end{cases} \quad (22)$$

$$\beta(x, Q) = 1$$

$$C(t) = -\frac{5B(t)^5}{3003} \left( -18018B'(t) + B(t)^9 + 14B(t)^8 + 91B(t)^7 \right. \\ \left. + 364B(t)^6 + 1001B(t)^5 + 2002B(t)^4 + 3003B(t)^3 \right. \\ \left. + 3432B(t)^2 - 15015B(t) \right)$$

$$u^0(x) = \begin{cases} 30(x+1)^8(B(0) - x)^5, & 0 \leq x \leq B(0) \\ 0, & B(0) \leq x \leq L \end{cases}$$

真解

$$u(x, t) = \begin{cases} 30(x+1)^8(B(t)-x)^5, & 0 \leq x \leq B(t) \\ 0, & B(t) \leq x \leq L. \end{cases}$$

**Table:**  $t = 1.0$ ,  $CFL = 0.6$ 时, 两种WENO格式的 $L_\infty$ 误差和精度阶, 和最后的 $u$ 的网格积分平均的最小值。

$\Delta x$	WENO 格式			PP-WENO 格式		
	误差	精度阶	最小值	误差	精度阶	最小值
1/40	1.84E-04		-4.94E-06	1.78E-04		0.00
1/80	7.68E-06	4.58	-5.15E-07	8.33E-06	4.42	0.00
1/160	1.94E-07	5.31	-1.27E-09	2.15E-07	5.28	0.00
1/320	4.25E-09	5.51	-1.22E-10	4.70E-09	5.52	0.00
1/640	1.59E-10	4.74	-9.68E-12	1.23E-10	4.73	0.00

# 食蚊鱼型体竞争模型：Gambusia Affinis

$$\begin{aligned}u_t + (g(x, t)u)_x + m(x, Q(t), t)u &= 0, \quad (x, t) \in [9, 63] \times (0, T] \\g(9, t)u(9, t) &= \int_9^{63} \beta(x, t)u(x, t)dx, \quad t \in (0, T] \\u(x, 0) &= u^0(x), \quad x \in [9, 63].\end{aligned}\tag{23}$$

含全局积分项的环境影响因子  $Q(t)$  定义为

$$Q(t) = \int_9^{63} \omega(x)u(x, t)dx.\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\beta(x, t) &= \beta(x)T_\beta(t), \\ g(x, t) &= g(x)T_g(t), \\ m(x, Q(t), t) &= m(x, Q(t))T_m(t)\end{aligned}$$

其中  $\beta(x)$  是拟合 Krumholtz (1948) 数据的一个光滑样条函数, 可以通过MATLAB 的函数 `csaps` 实现。  $T_\beta(t)$  定义为

$$T_\beta(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{30}\right)^3 \left(1 - \frac{t-30}{10} + \frac{(t-30)^2}{150}\right), & 0 \leq t \leq 30 \\ 1, & 30 \leq t \leq 90, \\ -\left(\frac{t-120}{30}\right)^3 \left(1 + \frac{t-90}{10} + \frac{(t-90)^2}{150}\right), & 90 \leq t \leq 120, \\ 0, & 120 \leq t \leq 365, \end{cases} \quad (25)$$

是一个以“年”为周期的函数

$$T_\beta(t + 365n) = T_\beta(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

函数  $g(x)$  定义为

$$g(x) = \frac{63}{80.2} \left(1 - \frac{x}{63}\right), \quad 9 \leq x \leq 63 \quad (26)$$

函数  $T_g(t)$  定义为

$$T_g(t) = 0.2 + 0.8T_\beta(t). \quad (27)$$

函数  $m(x, Q)$  为

$$m(x, Q) = \begin{cases} 0.1 \exp(-C/Q), & 9 \leq x \leq 31, \\ 0.1 \exp(-C/Q) - (0.023 - 0.1 \exp(-C/Q)) \\ \quad \times (x - 31)^3 (1 - 2(x - 32)(65 - 2x)), & 31 \leq x \leq 32, \\ 0.023, & 32 \leq x \leq 63, \end{cases} \quad (28)$$

其中的常数  $C$  在后面会给定。函数  $T_m(t)$  定义为

$$T_m(t) = 2 - T_\beta(t), \quad (29)$$

最后，函数  $\omega(x)$  定义为

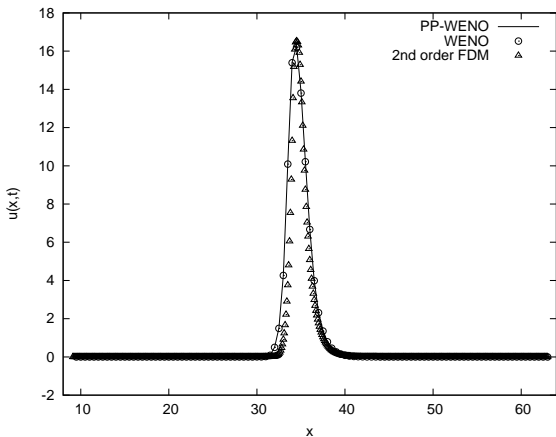
$$\omega(x) = \begin{cases} 2, & 9 \leq x \leq 30, \\ -2(x-31)^2(1+3(x-30)(2x-59)), & 30 \leq x \leq 31, \\ 0, & 31 \leq x \leq 63. \end{cases} \quad (30)$$

初值满足

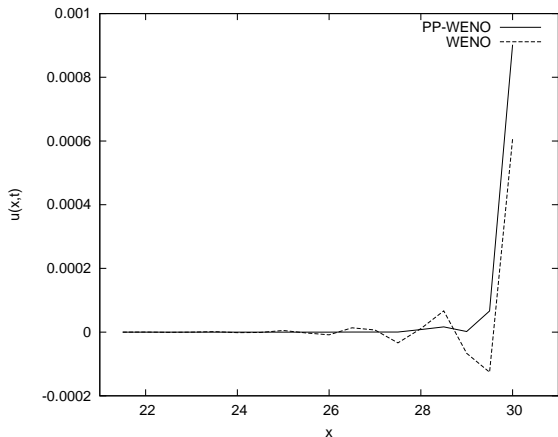
$$u^0(x) = \begin{cases} 0, & 9 \leq x \leq 34, \\ 5(1+\tau)^3, & 32 \leq x \leq 38, \\ 5+15\tau+15\tau^2+30\tau^3(\tau-2), & 38 \leq x \leq 42, \\ 5(2-\tau)^3, & 42 \leq x \leq 46, \\ 0, & 46 \leq x \leq 63. \end{cases} \quad (31)$$

其中  $\tau = (x-38)/4$ 。

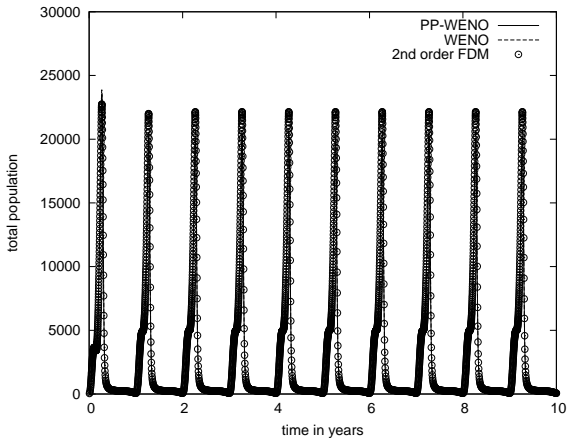




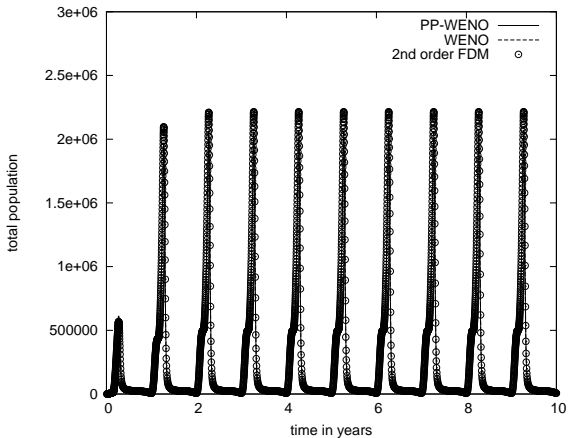
**Figure:** 时刻 $t = 365$ , 种群密度  $u$  与个体长度的关系图, 取 $CFL = 0.6$ . 实线: 取 $N = 108$ 个网格, PP-WENO格式的计算结果; 圆形: 取 $N = 108$ 个网格, WENO格式的计算结果; 三角形:  $N = 540$ 个网格, 2阶高分辨有限差分格式的计算结果。



**Figure:** 间断附近的局部放大图。实线：PP-WENO格式的结果；虚线：WENO格式的计算结果。



**Figure:** 10年间，种群总数的变化。 $C = 2000$ 。实线： $N = 20$ 个网格，PP-WENO格式的计算结果；虚线： $N = 20$ 个网格，WENO格式的计算结果；圆形： $N = 108$ 个网格，2阶高分辨有限差分格式的计算结果。

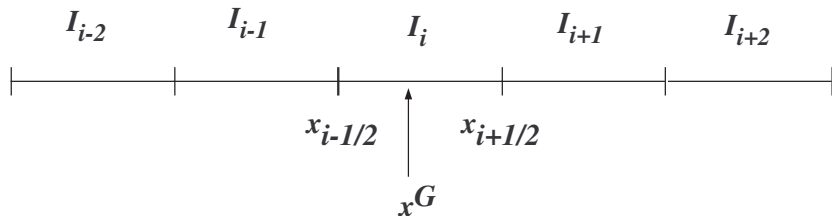


**Figure:** 10年间，种群总数的变化。 $C = 200000$ 。实线： $N = 20$ 个网格，PP-WENO格式的计算结果；虚线： $N = 20$ 个网格，WENO格式的计算结果；圆形： $N = 108$ 个网格，2阶高分辨有限差分格式的计算结果。

# 谢谢

- 5 有限体积WENO格式简介
- WENO格式的构造流程
  - 有限体积WENO格式
  - 时间离散

# WENO重构过程



WENO格式的本质思想是使用自适应的重构过程。  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , 点  $x^G = x_{i-1/2} + \alpha \Delta x$ 。已知网格上的积分平均, 重构点  $x^G$  处的值。  
3个小模板

$$S_1 = \{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i\}, \quad S_2 = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}, \quad S_3 = \{I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$$

5阶近似可以写为

$$v(x^G) = \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2 + \omega_3 v_3 \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{6} \left( (3\alpha^2 - 1) \bar{v}_{i-2} + (-6\alpha^2 - 6\alpha + 5) \bar{v}_{i-1} \right. \\ &\quad \left. + (3\alpha^2 + 6\alpha + 2) \bar{v}_i \right), \\ v_2 &= \frac{1}{6} \left( (3\alpha^2 - 6\alpha + 2) \bar{v}_{i-1} + (-6\alpha^2 + 6\alpha + 5) \bar{v}_i \right. \\ &\quad \left. + (3\alpha^2 - 1) \bar{v}_{i+1} \right), \\ v_3 &= \frac{1}{6} \left( (3\alpha^2 - 12\alpha + 11) \bar{v}_i + (-6\alpha^2 + 18\alpha - 7) \bar{v}_{i+1} \right. \\ &\quad \left. + (3\alpha^2 - 6\alpha + 2) \bar{v}_{i+2} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

$\omega_i, i = 1, 2, 3$  为非线性权(34)。



## 非线性权

$$\omega_j = \frac{\tilde{\omega}_j}{\sum_j \tilde{\omega}_j} \quad (34)$$

其中

$$\tilde{\omega}_j = \frac{\gamma_j}{(\epsilon + \beta_j)^2}$$

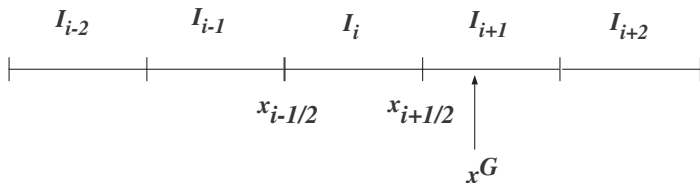
这里的 $\epsilon$ 为一个小正数，以避免分母为零（一般取为 $10^{-6}$ ）。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{5\alpha^4 - 20\alpha^3 + 15\alpha^2 + 10\alpha - 6}{60\alpha^2 - 20} \\ \gamma_2 &= \frac{-30\alpha^6 + 90\alpha^5 + 55\alpha^4 - 260\alpha^3 + 81\alpha^2 + 64\alpha - 24}{20(3\alpha^2 - 1)(3\alpha^2 - 6\alpha + 2)}, \\ \gamma_3 &= \frac{5\alpha^4 - 15\alpha^2 + 4}{60\alpha^2 - 120\alpha + 40}, \end{aligned} \quad (35)$$

## 光滑因子

$$\beta_j = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Delta} |\Delta|^{2|\alpha|-1} (D^\alpha p_j(x))^2 dx$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_{i-2} - 2\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_i)^2 + \frac{1}{4} (\bar{v}_{i-2} - 4\bar{v}_{i-1} + 3\bar{v}_i)^2, \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_{i-1} - 2\bar{v}_i + \bar{v}_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (\bar{v}_{i-1} - \bar{v}_{i+1})^2, \\ \beta_3 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_i - 2\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3\bar{v}_i - 4\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i+2})^2. \end{aligned} \quad (36)$$



如果 $x^G$ 在网格 $I_{i+1}$ 上, 则光滑因子是

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{10}{3}\bar{v}_{i-2}^2 + \frac{61}{3}\bar{v}_{i-1}^2 + \frac{22}{3}\bar{v}_i^2 - \frac{49}{3}\bar{v}_{i-2}\bar{v}_{i-1} + \frac{29}{3}\bar{v}_{i-2}\bar{v}_i - \frac{73}{3}\bar{v}_{i-1}\bar{v}_i, \\
 \beta_2 &= \frac{4}{3}\bar{v}_{i-1}^2 + \frac{25}{3}\bar{v}_i^2 + \frac{10}{3}\bar{v}_{i+1}^2 - \frac{19}{3}\bar{v}_{i-1}\bar{v}_i + \frac{11}{3}\bar{v}_{i-1}\bar{v}_{i+1} - \frac{31}{3}\bar{v}_i\bar{v}_{i+1}, \\
 \beta_3 &= \frac{4}{3}\bar{v}_i^2 + \frac{13}{3}\bar{v}_{i+1}^2 + \frac{4}{3}\bar{v}_{i+2}^2 - \frac{13}{3}\bar{v}_i\bar{v}_{i+1} + \frac{5}{3}\bar{v}_i\bar{v}_{i+2} - \frac{13}{3}\bar{v}_{i+1}\bar{v}_{i+2},
 \end{aligned} \tag{37}$$

如果 $x^G$ 在网格 $I_{i+2}$ 上, 则光滑因子是

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{22}{3}\bar{v}_{i-2}^2 + \frac{121}{3}\bar{v}_{i-1}^2 + \frac{40}{3}\bar{v}_i^2 - \frac{103}{3}\bar{v}_{i-2}\bar{v}_{i-1} + \frac{59}{3}\bar{v}_{i-2}\bar{v}_i - \frac{139}{3}\bar{v}_{i-1}\bar{v}_i, \\
 \beta_2 &= \frac{10}{3}\bar{v}_{i-1}^2 + \frac{61}{3}\bar{v}_i^2 + \frac{22}{3}\bar{v}_{i+1}^2 - \frac{49}{3}\bar{v}_{i-1}\bar{v}_i + \frac{29}{3}\bar{v}_{i-1}\bar{v}_{i+1} - \frac{73}{3}\bar{v}_i\bar{v}_{i+1}, \\
 \beta_3 &= \frac{4}{3}\bar{v}_i^2 + \frac{25}{3}\bar{v}_{i+1}^2 + \frac{10}{3}\bar{v}_{i+2}^2 - \frac{19}{3}\bar{v}_i\bar{v}_{i+1} + \frac{11}{3}\bar{v}_i\bar{v}_{i+2} - \frac{31}{3}\bar{v}_{i+1}\bar{v}_{i+2}.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

WENO重构过程可以用于有限差分和有限体积格式的框架中。

有限体积格式可以用于任意大小、变化的网格而不会改变格式的精度、稳定性、守恒性等，而有限差分格式就只能定义在光滑网格上。有限体积格式同样更易于自适应网格上实现，如AMR类格式。所以，有限体积格式在实际当中有广泛的应用。

# 有限体积WENO格式

## 双曲守恒律

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (39)$$

均匀网格 $I_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ , 网格间距 $\Delta x$ 。在网格 $I_i$ 上对式(39)积分, 并除以网格间距 $\Delta x$ , 则有

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_i + \frac{1}{\Delta x} (f(u_{i+1/2}) - f(u_{i-1/2})) = 0 \quad (40)$$

其中

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx$$

为 $u(x, t)$ 在网格 $I_i$ 上的积分平均 (cell average)。

近似 $f(u_{i+1/2})$ 为

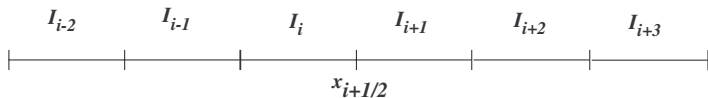
$$\hat{f}(u_{i+1/2}^-, u_{i+1/2}^+)$$

其中的 $\hat{f}(u^-, u^+)$ 为单调的数值通量，它需要满足

- $\hat{f}(u^-, u^+)$ 对第一个参数 $u^-$ 非减，对第二个参数 $u^+$ 非增，即 $\hat{f}(\uparrow, \downarrow)$ ；
- $\hat{f}(u, u) = f(u)$ ；
- $\hat{f}(u^-, u^+)$ 对两个参数 $u^-$ 和 $u^+$ 都是Lipschitz连续的。

如：

- Godunov数值通量
- Lax-Friedrichs数值通量
- Engquist-Osher数值通量



对于5阶WENO格式, 重构 $u_{i+1/2}^-$ 用的5网格的模板是

$$I_{i-2}, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}$$

而重构 $u_{i+1/2}^+$ 用的5网格的模板是

$$I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}, I_{i+3}$$



这样，整个有限体积格式就变成了一个常微分方程

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_i = -\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{f}(u_{i+1/2}^-, u_{i+1/2}^+) - f(u_{i-1/2}^-, u_{i-1/2}^+) \right) \quad (41)$$

## 3阶TVD Runge-Kutta 格式

如果记一个常微分方程为

$$\frac{d}{dt}u_j - L(u, t)_j = 0$$

则一个3阶的TVD Runge-Kutta时间离散格式可以写为

$$\begin{aligned}u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n, t^n), \\u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}(u^{(1)} + \Delta t L(u^{(1)}, t^n + \Delta t)), \\u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}\left(u^{(2)} + \Delta t L(u^{(2)}, t^n + \frac{1}{2}\Delta t)\right)\end{aligned}\tag{42}$$

