答 题 时 不 要 超 过 此 线

中国科学技术大学

2007– 2008学年第 1 学期考试试卷

考试科目：数 值 计 算 方 法 　　　　　　　　得分：＿＿＿＿＿＿

学生所在系：＿＿＿＿＿＿　　姓名：＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 请考生在答卷纸左侧留出装订区域。
3. 本试卷为闭卷考试。共 13 道试题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。
4. 计算中保留4位小数。

得分	评卷人

一、填空题

1. (6分) 设$X=(x_1,x_2,x_3)^T$，则如下的三种公式能否成为向量范数，
   $|x_1|+2|x_2|+4|x_3|$______，$|x_1|+3|x_2+x_1|+2|x_3|$______，$|x_1|+3|x_2|$______。

2. (3分) 设A为实的对称阵，则__________方法可以求出它的所有特征值。

3. (3分)设$f(x)=2x^4-6x^2+1$，则$f[-1,0,2,4,9]=$__________。

4. (3分) 设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 3\end{pmatrix}$， 则$\|A\|_1=$__________。

5. (3分) 给出用Newton迭代求$\sqrt[4]{5}$的格式________________。

6. (6分) 设$l_0(x)$，$l_1(x)$，$l_2(x)$，$l_3(x)$是以互异的x_0,x_1,x_2,x_3为节点的Lagrange插值基函数，
   则$\sum_{j=0}^{3} l_j(x)(x_j+1)^3=$__________。

7. (6分) 写出以$(-\alpha,f(-\alpha),f'(-\alpha)),(0,f(0),f'(0)),(\alpha,f(\alpha),f'(\alpha))$ 为插值点构造的插值多项式的截断误差：

   ____。

得分	评卷人

二、解答题

8. (10分) 设有数据

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	0	3	2

，求其形如$a+bx^2$的拟合多项式。

9. (10分) 考虑常微分方程初值问题$\begin{cases} y' = x^2 \sin y \ , 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 用4阶经典的Runge-Kutta公式求$y(0.1)$的近似，取步长$h=0.1$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \dfrac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_1) \\ K_3 = f(x_n + \dfrac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hK_2) \\ K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3) \end{cases}$$

10. (15分)用LDL^T分解求解下列方程组

$$\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 & = 20 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 & = 1 \end{cases}$$

11. (15分) 用Gauss-Seidel方法求解下列方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

1) 写出迭代格式，2) 求迭代矩阵；3) 讨论迭代矩阵是否收敛？

12. (15分)

1) (10分) 确定参数A，B，C和α，使得数值积分公式

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \approx Af(\alpha) + Bf(0) + Cf(-\alpha)$$

具有尽可能高的代数精度，并求这个代数精度。

2) (5分) 若$f(x)$足够光滑，求这个数值积分公式的误差

13. (5分) 在做Newton插值时，已知节点组$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$和各阶差商$\{f(x_0), f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], \cdots, f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n]\}$；现增加了节点$(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$，试给出求差商$f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}]$的算法。

答案

1. 是(2分)，是(2分)，否(2分)

2. jacobi (3分)

3. 2(3分)

4. 5 (3分)

5. $\frac{3}{4}x_k + \frac{5}{4x_k^3}$

6. $(x+1)^3$ (3分)

7. $\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-\alpha)^2(x)^2(x-\alpha)^2, \xi \in [a,c]$ (4分)

8.
$$\begin{pmatrix} 3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} (6)$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix} (4)$$

9.
$$K_1 = 0(2分)$$
$$K_2 = 0.04207(2分)$$
$$K_3 = 0.04213(2分)$$
$$K_4 = 0.08437(2分)$$
$$y(0.1) = 1.00421(2分)$$

10. $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -1/2 & 1 & \\ -1/3 & 4/13 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 13/2 & \\ & & 236/39 \end{pmatrix}$

或

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.5 & 1 & \\ -0.3333 & 0.3077 & 1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} -6 & & \\ & 6.5 & \\ & & 6.0513 \end{pmatrix} (6分)$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Dz = y \\ L^T x = z \end{cases} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -5 \\ 35/2 \\ -236/39 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 35/13 \\ -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

或

$$y = \begin{pmatrix} -5 \\ 17.5 \\ -6.0513 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0.8333 \\ 2.6923 \\ -1.0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2.0 \\ 3.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}$$ (9分)

11\. 1) (5分) 2)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/10 & -13/20 \\ 0 & 3/20 & 1/40 \end{pmatrix}$$ (5分)

3) 收敛，对角占优(3分)

12\. 1)

$$\begin{cases} A + B + C = \int_{-2}^{2} x^0 dx = 4 \\ A(-\alpha) + C(\alpha) = \int_{-2}^{2} x^1 dx = 0 \\ A(-\alpha)^2 + C(\alpha)^2 = \int_{-2}^{2} x^2 dx = \dfrac{16}{3} \\ A(-\alpha)^3 + C(\alpha)^3 = \int_{-2}^{2} x^3 dx = 0 \\ A(-\alpha)^4 + C(\alpha)^4 = \int_{-2}^{2} x^4 dx = \dfrac{64}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{10}{9} \\ B = \dfrac{16}{9} \\ C = \dfrac{10}{9} \\ \alpha = \sqrt{\dfrac{12}{5}} \end{cases}$$

2)

$$\int_{-2}^{2} \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x+\alpha)^2 x^2 (x-\alpha)^2$$

$$= \frac{1024}{175}\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} = \frac{64}{7875} f^{(6)}(\xi)$$

13\.

$$f[x_0, x_{n+1}] = \frac{f(x_0) - f(x_{n+1})}{x_0 - x_{n+1}}$$

$$f[x_0, x_1, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_{n+1}]}{x_1 - x_{n+1}}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x_0, x_1, x_{n+1}]}{x_2 - x_{n+1}}$$

$$\cdots$$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}] = \frac{f[x_0, \cdots, x_n] - f[x_0, \cdots, x_{n-1}, x_{n+1}]}{x_n - x_{n+1}}$$