答题时不要超过此线

# 中国科学技术大学

## 2010— 2011学年 第 2 学期考试试卷

考试科目：数 值 计 算 方 法　　　　　　得分：____________

学生所在系：____________　　姓名：____________　　学号：____________

**注意事项：**

1. 答卷前，考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚。
2. 本试卷为闭卷考试。共 9 道试题， 满分 100 分，考试时间 120 分钟。
3. 计算结果保留4位小数。

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

**一、填空题**

1. （6分）设$f(x)=2x^7+x^3+1$，则$f[2^0,2^1]=$________，　$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=$________，$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=$________；

2. （6分）设$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，　则$\|A\|_1=$________，　$\|A\|_\infty=$________，　$\rho(A)=$________。

3. （6分）做Dolittle分解 $\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \underline{\quad\quad} & 1 & 0\\ \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad}\\ 0 & \underline{\quad\quad} & \underline{\quad\quad}\\ 0 & 0 & \underline{\quad\quad}\end{pmatrix}$

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

**二、解答题**

4. （10分）试对如下数据作出 $y(x)=ax^3+b$ 形式的拟合函数:

| $x_i$ | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $y_i$ | 2.0 | 4.0 | 3.2 | 5.0 |

5. （10分）设$f(x) = x^5 + x + 1$， 试构造一个最低阶的插值多项式$q(x)$满足条件

$q(-1) = f(-1)$，$q(0) = f(0)$，$q(1) = f(1)$，$q'(0) = f'(0)$， 并写出误差表达式。

6. （12分）用幂法求矩阵$A=\begin{pmatrix} 9 & -29 & 13 \\ -2 & 6 & -2 \\ -10 & 34 & -14 \end{pmatrix}$的特征值，以某初值开始，若干步后，得到如下结果，试分析矩阵$A$的按模最大特征值和相应的特征向量。

| $k$ | $X_k$ |
|---|---|
| .. | ... |
| 6 | (-12.8014, 6.9905, 19.7919) |
| 7 | (-60.6427, 27.962, 88.6047) |
| 8 | (-204.8219, 111.8481, 316.6699) |
| 9 | (-970.2823, 447.3923, 1417.6747) |
| 10 | (-3277.1495, 1789.5697, 5066.7192) |

7. （14分）用牛顿迭代求如下的非线性方程组的根，要求误差$\epsilon < 10^{-5}$，取初值为$(2.006, -2.003)^T$，

$$\begin{cases} x^2 + y^3 + 2x = 0 \\ x^3 + y^2 + 5y = 2 \end{cases}$$

8. （18分）

（1）讨论用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代解Ax=b时的收敛性，如果收敛，比较那种方法收敛较快，其中 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$；

（2）用Gauss-Seidel迭代解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 10x_3 = 10 \end{cases}$$

取初值为$x^{(0)}=(1,1,1)^T$，迭代2步。

9.（18分）对于常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), a \leqslant x \leqslant b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

其等价形式为：$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$。

（1）对于下列情形，分别推导出该常微分方程的线性多步法格式，

（A）$p=0$，积分点取$x_n, x_{n-1}$；

（B）$p=1$，积分点取$x_{n+1}, x_n, x_{n-1}$；

（2）分析(1)中格式(A)的局部截断误差；

（3）试构造该常微分方程的一种预估－校正格式。

# 答案

1. ，2 ，0

2. 4，3，

4. $\begin{pmatrix} 4890 & 100 \\ 100 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440.4 \\ 14.2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0.0357 \\ 2.6567 \end{pmatrix}$

6. 4,−4,

7. $\begin{pmatrix} 6.012 & 12.036 \\ 12.0721 & 0.994 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0692 \end{pmatrix}$ ，$(2, -2)$

$\begin{pmatrix} 6.0 & 12.0 \\ 12.0 & 1. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$，$(2, -2)$