

第一章 量子“小球”

参看文献 [1]. Albert 在该书的第一章讨论了电子的“颜色”和“硬度”，这实际上就是在谈论 Stern-Gerlach 实验，所谓的“颜色”和“硬度”对应于不同方向上电子的磁矩，或者说自旋角动量。

在这里，我们索性不说电子了，而是说量子“小球”。

这个量子“小球”是量子力学这门课的表象，我们将用它来叙述量子力学的基本概念和主要内容。

量子小球身处微观世界，人们自身的感官无法感受量子小球。

在微观世界中，一定有些什么“东西”，发生了一些“事情”。当我们使用某种特定的手段观测这个世界的时候，确实看到了很多现象——非经典现象，或者说量子现象。

在引言中我们说过：

- 谨慎使用描述现象的语言。
- 注意区分现象和现象的载体。

慎用语言。我们将语言的使用限制在对现象的描述上。避免妄语。

难免地，我们希望做一些“透过现象看本质”的事，希望知道究竟是什么东西引发了这些量子现象。我们把这些看不见、摸不到的存在于微观层面上的东西称为量子系统，或者微观粒子。

在经典力学中，现象和现象的载体几乎是不可分离的，二者处于同一层次。例如波动，一方面是一种现象，另一方面也介质振动的体现。我们可以通过研究介质的性质来理解波的传播。介质是可触及的，是经典世界中的事物。

在经典世界中，对现象的精确而严格的描述近乎对事物的性质或属性的描述。事物的性质和属性具有本体论意义上的实在性和确定性。

我们身处经典世界中，又学习了经典力学的理论，逐渐地习惯用同一套语言既描述看到的现象，又刻画承载现象的事物的性质。也就是说，我们习惯了语言的混用。同时，在经典世界中，我们也没有遇到这种混用带来的麻烦。

经典力学承认客观世界的实在性。经典世界中的研究对象具有不依赖于观测的独立存在的各种性质。观测只不过是彰显这些性质的一个手段。即便我们不能了解某个事物的所有性质，也不至于让我们对这个事物的实在性和真实性有所怀疑。

经典世界中的小球

考虑最为简单的模型：经典世界中的一个小球。它可以有很多不同的属性，我们只关心其中的两个：颜色和硬度。

用 C 表示颜色属性，用 H 表示硬度属性。

再假设每一个属性只有两个状态，即两个取值。 C 属性的取值记作 $c = 0, 1$ ，其中 0 表示白色，1 表示黑色。 H 属性的取值记作 $h = 0, 1$ ，其中 0 表示硬，1 表示软。

于是，小球的属性可以用一个二元数组表示， (c, h) ， $c, h = 0, 1$ 。这个二元数组就是小球的经典意义上的“态”。

我们可以说：“这是一个白色的硬球”，或者说，小球处于状态 $(0, 0)$ 。在这句话中，包含了两个表象——颜色表象和硬度表象。更细致地说，我们首先在颜色表象中对小球进行观测，然后在硬度表象中观测。我们还可以说：“这是一个硬的白球”。先是硬度表象，再是颜色表象。这两种说法是等价的，于是我们说，这两个表象可以对易。进而，在颜色表象中看到的现象和中硬度表象中看到的现象是彼此相容的，是可以共存的。

对易 \implies 相容

在经典世界中，不同的表象是彼此相容的。在一个表象中进行的测量不会影响到在另一个表象中的测量。

概率 设想一个大袋子里装了很多球。对其中的一部分（样本）进行观测，得到频度（frequency），然后可以有概率 $p(c)$ 或 $p(h)$ ，分别是观测到某种颜色或某种软硬度到概率。

还可以有联合概率， $p(c, h)$ ，它是两个事件 c 和 h 同时出现的概率。这里到“同时”未必是“同一时刻”的意思。由于 C 测量和 H 测量可以对易，这两个测量过程相容，它们的测量结果可以共存。所以，“同时”应该理解为“共存”。

例如， $p(c = 0, h = 0)$ 指的是，得到白色硬球的概率。我们把这一类概率称为联合（joint）概率。

可以从联合得到边缘（marginal），例如

$$p(c = 0) = p(c = 0, h = 0) + p(c = 0, h = 1)$$

$$p(h = 1) = p(c = 0, h = 1) + p(c = 1, h = 1)$$

如果两个事件不相容，那么就不存在联合几率，也不存在从联合到边缘的求和计算过程。

量子世界中的“小球”

测量仪器有两种,

C-box H-box

对应于两个不同的表象, C 表象和 H 表象.

测量装置的一端联系着微观世界, 另一端将体现观测结果. 观测结果是宏观的经典层面上的现象.

C 仪器 C 仪器的左侧有一个入口, 量子小球通过这个入口进入 C 仪器中. 仪器的右侧有两个出口, 分别叫做白出口和黑出口. 如果量子小球从白出口 (或者黑出口) 出来了, 我们就说量子小球在颜色检验中表现出白色 (或者黑色).

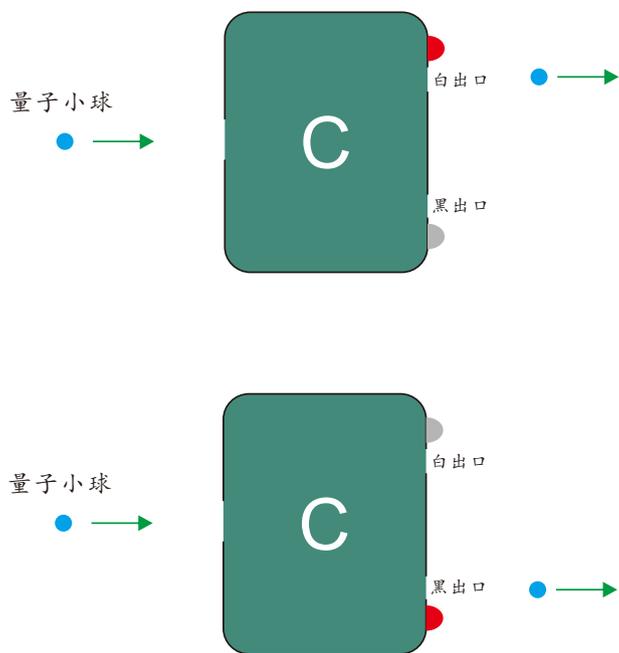


图 1

当然, 量子小球是看不见的, 怎么知道它们是从哪个出口出去的呢? 在两个出口上安装指示灯, 如果白出口上的灯亮了, 就表明量子小球从白出口出去了, 量子小球在这个检测过程中表现出白色; 如果黑出口上的灯亮了, 就表明量子小球从黑出口出去了, 量子小球在这个检测过程中表现出黑色. 如图 1 所示.

还需要说明的是, 我们并没有看到白色或黑色. 实际上, 这不过是为了区分不同的观测结果而人为设定的一种说法. 已经假设量子小球在颜色检验中只能表现出两个不同的结果, 我们把其中一个结果叫做白色, 另一个结果叫做黑色. 当然也可以把它们分别叫做红色和绿色. 为了看到并且区分这

两个不同的结果, 我们在两个出口上安装了指示灯. 其中一个指示灯亮了, 就对应一种观测结果, 姑且叫做白色; 另一个指示灯亮了, 就对应另一种观测结果, 姑且叫做黑色.

只有被观测到的才能被称作现象. 我们为现象赋予“真实”、“客观”这样一类描述, 但也止步于此.

H 仪器 设想量子小球可以表现出另一类型的现象, 姑且叫做硬度. 同样地为了简单起见, 假设量子小球只会表现出两种硬度 —— 硬的和软的.

为了检测量子小球的硬度, 我们需要使用另一个仪器, 叫做 H 仪器. 和 C 仪器类似, H 仪器的左侧有一个入口, 右侧有两个出口, 一个叫做硬出口, 另一个叫做软出口. 两个出口上各有一盏指示灯, 用来表明量子小球是从哪一个出口出去的, 或者说, 用来表明量子小球在关于硬度的检测中表现出怎样的现象. 如图 2 所示.

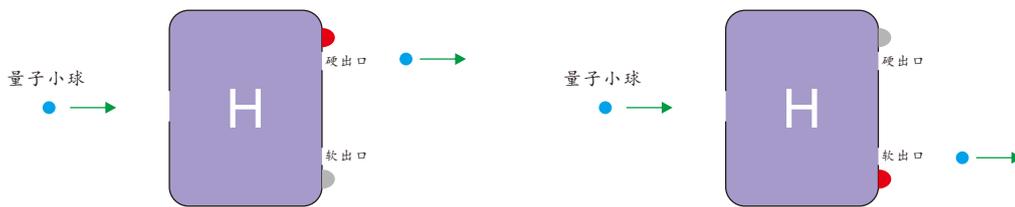


图 2

颜色检验的结果 用 C 仪器检测量子小球, 如图 3 所示. 可以看到:

1. 当量子小球一个一个地进入 C 仪器时, 每次只有一盏指示灯闪亮, 表明量子小球要么从白出口出来, 要么从黑出口出来. 两盏灯不会同时亮, 就是说, 一个量子小球不会同时从两个出口出来.
2. 某一个量子小球进入 C 仪器之后, 我们无法断定哪一个出口上的指示灯会闪亮. 但是, 随着进入 C 仪器的量子小球越来越多, 观测结果呈现一定的规律: 白出口上指示灯闪亮的次数和黑出口上指示灯闪亮的次数大概各占一半. 为了叙述简练, 下面暂且省略“大概”这个词.

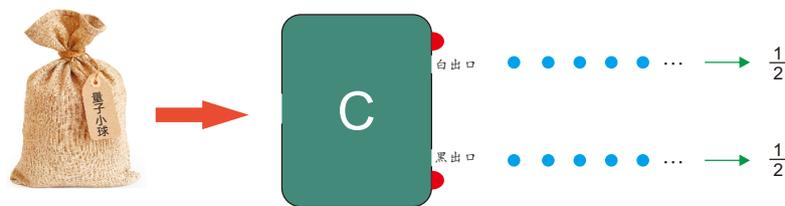


图 3: 在这里和以后的图示中, 当我们把两个出口上的指示灯都画成红色的时候, 只是为了说明在实验过程中不会只有一个指示灯在闪亮, 而不是两个指示灯同时闪亮.

第一个现象容易理解, 向 C 仪器输入一个量子小球, 不会在输出端出来两个. 第二个现象可以用经

典小球作类比: 一大袋子经典小球, 其中一半是白球, 另一半是黑球. 需要注意的是, 这个类比并不严格, 但是可以接受.

硬度检验的结果 与颜色检验的结果类似. 如图 4 所示.

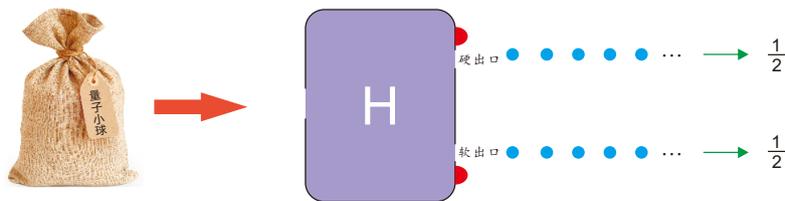


图 4: 让量子小球一个一个地进入 H 仪器, 每次只会看到一个指示灯闪亮, 而且, 从 H 仪器的硬出口和软出口出去的量子小球各占一半.

这个现象也可以理解.

重复检验 在图 5 中, 第一次颜色检验结束之后紧接着再做一次颜色检验.

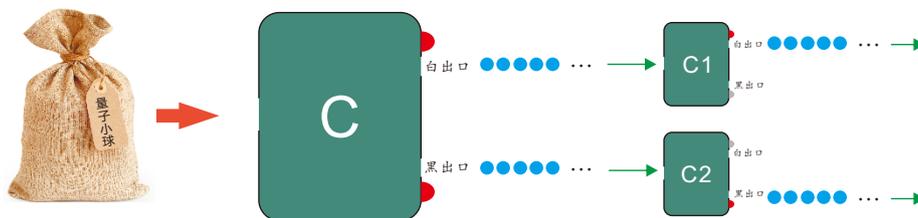


图 5

C1 仪器白出口上的指示灯不断闪亮, 而黑出口上的指示灯始终不亮; C2 仪器黑出口上的指示灯不断闪亮, 而白出口上的指示灯始终不亮.

同样地, 关于硬度的重复检验有类似的结果.

重复检验的结果是确定的, 不再是随机的.

在进行重复检验时, 没有表象的改变.

C-H 检验 如图 6 所示, 这是一个测量序列, 包含两个不同的测量过程.

看到的现象是: 检测硬度的两个仪器, H1 和 H2, 黑出口和白出口上指示灯闪亮的次数各占一半.

交换测量次序, 进行 H-C 序列测量, 看到的现象类似.

以上现象也可以用经典小球类比 (仅仅是类比). 一个大袋子装了很多经典小球, 其中 (白, 硬), (白, 软), (黑, 硬), (黑, 软) 各占四分之一, 那么, 对经典小球的检验结果类似于对量子小球的 C-H 或 H-C 检验结果.

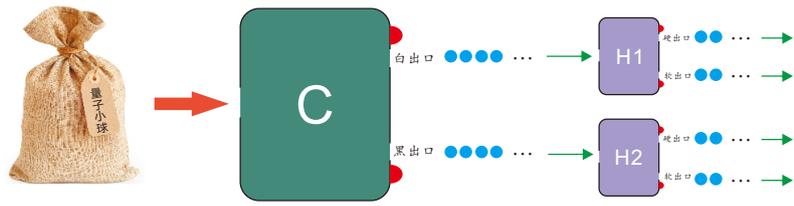


图 6

C-H-C 检验 包含三个测量过程的测量序列, 如图 7 所示.

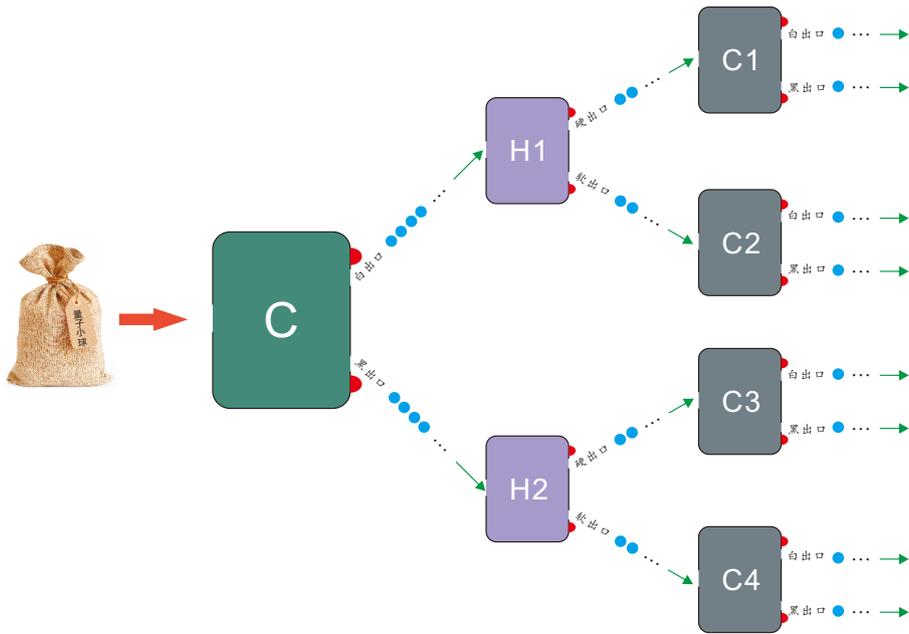


图 7

看到的现象是: 从 C1 到 C4, 在每一个仪器的输出端, 白出口和黑出口上指示灯闪亮的次数各占一半.

这个现象不能用经典小球类比, 因为经典小球模型给出的结果是, C1 和 C2 仪器只有白出口上的指示灯闪亮, C3 和 C4 仪器只有黑出口上的指示灯闪亮.

序列测量 H-C-H 与此类似, 也不能用经典小球模型类比.

对易与共存 考察一下对量子小球对颜色检验和硬度检验能否对易.

从操作的角度讨论测量过程能否对易. 分别用 C-H 和 H-C 两个测量序列检验处于某种状态量子小球, 并且假设检验过程没有摧毁量子小球¹. 如果对于任意状态的量子小球, 经过了 C-H 测量后

¹在 SG 实验中, 银原子撞在了接收屏上, 产生了亮点, 银原子就此不复存在, 我们不能拿它做进一步的实验, 这就是说, 在 SG 实验中, 银原子在观测过程中被摧毁了.

的状态和经过了 H-C 测量后的状态是相同的, 那么就表明 C 测量与 H 测量是对易, 或者说, C 表象和 H 表象是相容的.

先考虑如图 6 所示的 C-H 测量序列. 我们把实验过程作一些修改, 让 C 仪器的白出口和黑出口出来的量子小球汇聚在一起, 然后让它们通过一个 (而不是两个) H 仪器, 这相当于把原来的两个 H 仪器合二为一, 如图 8 所示. 显然, 从 H 仪器的硬出口和软出口出来的量子小球各占一半, 把经历了这个测量序列的量子小球称为 C-H 量子小球.

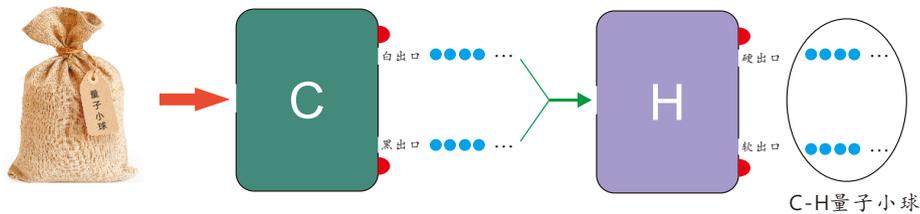


图 8

交换测量次序, 得到 H-C 测量序列, 如图 9 所示. 显然, 从 C 仪器的白出口和黑出口出来的量子小球各占一半, 把经历了这个测量序列的量子小球称为 H-C 量子小球.

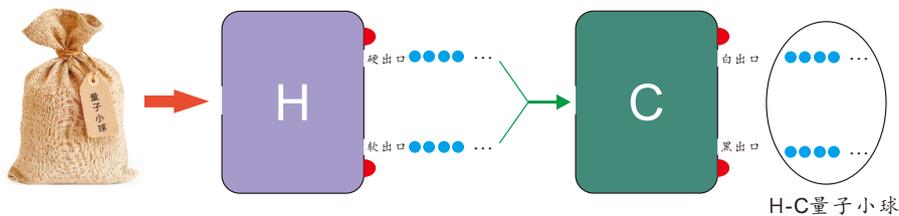


图 9

接下来的问题是, C-H 量子小球和 H-C 量子小球的状态是不是一样的? 不能妄谈量子小球的状态, 需要通过测量, 根据看到的现象回答这个问题.

用所有可能的方式测量 C-H 量子小球和 H-C 量子小球, 如果得到的结果相同, 那么才能说这两种量子小球的状态是相同的. 只要有一种测量过程给出了不同的结果, 就表明这两种量子小球的状态是不同的.

考虑用 C 仪器测量 C-H 量子小球, 可以看到如图 10 所示的结果. 用 C 仪器检验 H-C 量子小球,

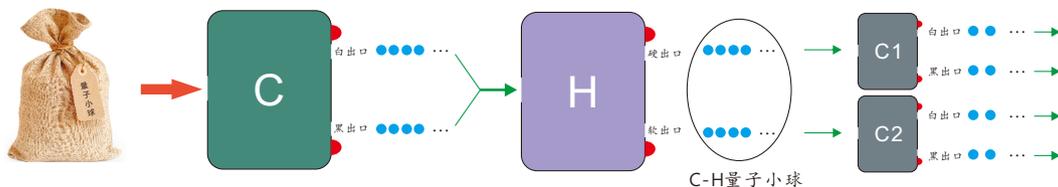


图 10

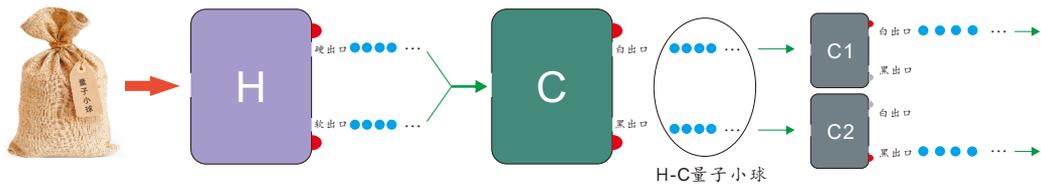


图 11

看到如图 11 所示的结果. 现在看到, 用 C 仪器分别检测 C-H 量子小球和 H-C 量子小球, 得到了不同的结果, 因此, 这两种量子小球的状态不同, 进而说明 C 测量和 H 测量不能对易, C 表象和 H 表象彼此不相容.

对所谓的 C-H 量子小球和 H-C 量子小球再作一些补充说明. 实际上, 用以后要学到的概念来说, 它们的量子态都是最大混合态, 有相同的数学形式, 即

$$\text{双值量子系统最大混合态的密度矩阵} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

仅仅就这个相同的数学形式而言, 二者不可区分. 但是, 二者的经历的过程是不相同的, 更确切地说, 两种量子小球的组成成分是不同的.

$$\text{C-H 量子小球的状态} = \left\{ \frac{1}{2}, |\text{硬}\rangle; \frac{1}{2}, |\text{软}\rangle \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中花括号中的描述指的是, 在 C-H 量子小球中各有 1/2 的几率分别处于状态“硬”和状态“软”, 这两个状态分别用 $|\text{硬}\rangle$ 和 $|\text{软}\rangle$ 表示.

$$\text{H-C 量子小球的状态} = \left\{ \frac{1}{2}, |\text{白}\rangle; \frac{1}{2}, |\text{黑}\rangle \right\} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

也就是说, 在 H-C 量子小球中, 各有 1/2 的几率分别处于状态 $|\text{白}\rangle$ 和状态 $|\text{黑}\rangle$.

虽然不能严格区分这两种量子小球, 但是, 有一定的几率可以区分它们, 那就是, 当我们观察到 C1 的黑出口或者 C2 的白出口上指示灯闪亮的时候, 就可以断定检测对象是 C-H 量子小球.

量子态

量子态是为了描述量子系统的状态而构造出来的数学形式, 用 Dirac 符号 $|\cdot\rangle$ 表示量子态. 量子态不是用来描述现象的, 只有经过测量才能看到现象; 量子态也不是用来描述几率的, 也只有经过测量才能谈论某个现象出现的几率.

对所有可能的测量, 量子态给出测量结果的 (概率意义上的) 定量描述.

下一章将讨论量子态的具体形式, 在这里, 先说下面两件事:

1. 我们用 Dirac ket 符号表示这样一类事物的状态——可以回答“看到了什么”这类问题, 但是难以回答“它是什么”这样的问题.
2. 在不同的表象中, 同一个量子态有不同的表示形式.

对于第一件事, 考虑在 C-H-C 序列测量看到的现象. 第一个 C 仪器的白出口上指示灯闪亮了, 表明有一个量子小球从这个出口出来, 对此我们不能说“它是白色的”, 也不能说“在以后的颜色检验中, 这个量子小球将始终表现为白色 (除非是关于颜色的重复检验).”实际上, 接着对它进行的硬度检验和再一次的颜色检验, 那么从第二个 C 仪器出来的量子小球不再一定表现出白色了.

我们可以在 Dirac 符号里写上描述现象的话, 但是要始终记住, 量子态和现象不在同一个层次, 不能相提并论. 在测量结果中, 与某个明确的“现象”对应的量子态可以写作 |现象>. 比如前面提到的 |白> 和 |黑>, 或者 |硬> 和 |软>.

如果没有测量, 没有看到明确的现象, 那么就不能在 ket 符号中写入描述现象的话, 只能写 |量子态>, |幻形怪>, 或者抽象的 $|\psi\rangle$. 在真实的 SG 实验中, 进入非均匀磁场的银原子的状态是未知的, 而且是混合态, 只能用以后将要讨论的密度矩阵 (或者说密度算子) ρ 表示.

对于第二件事, 考虑图 12 所示的观测过程,

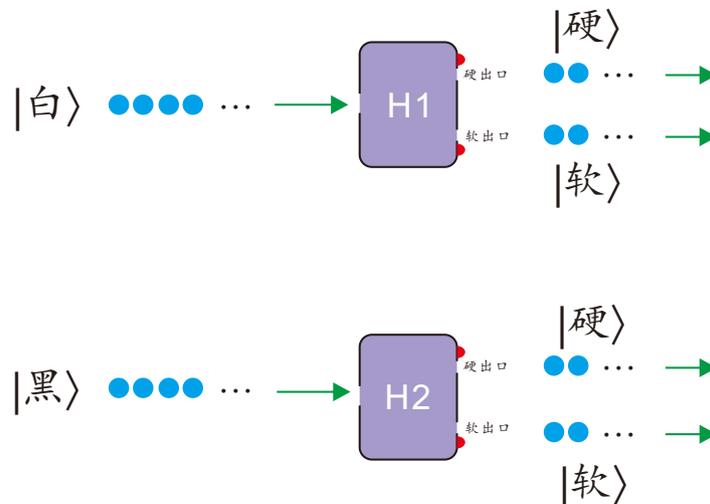


图 12

当处于量子态 |白> 的量子小球经历硬度检验的时候, 就应该在硬度表象中重新表示它的状态. 参考观察结果 —— 从硬出口和软出口出来的几率均为 1/2, 将 |白> 表示为

$$|\text{白}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{硬}\rangle + |\text{软}\rangle$$

对于量子态 |黑>, 则要写为

$$|\text{黑}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{硬}\rangle - |\text{软}\rangle$$

反过来, 如果用 C 仪器检验 $|\text{硬}\rangle$ 或 $|\text{软}\rangle$, 那么就要用 $|\text{白}\rangle$ 和 $|\text{黑}\rangle$ 的叠加形式表示 $|\text{硬}\rangle$ 和 $|\text{软}\rangle$. 简单地说, 到什么山头唱什么歌, 想测量什么就要在相应的表象中说话、做事.

观测量

观测对象是什么? 一个自然的回答是量子系统, 但是太笼统. 在经典力学中, 我们也不会简单地说, 观测对象是某个动力学系统, 而是说位置, 动量, 能量等等物理量. 在量子力学中, 观测量需要由具体的观测过程来确定, 特定的观测过程可以体现观测对象. 例如, 在 Stern-Gerlach 实验中, 用到了梯度磁场, 又看到了接收屏上粒子落点的偏移, 就认为 SG 实验装置的测量对象类似于经典电磁学中的磁矩, 于是磁矩或自旋角动量就是 SG 实验关注的观测量. 在氢原子光谱实验中, 看到了分立的谱线, 就认为这是与氢原子内部结构能量有关的现象, 从而引入了能级的概念, 哈密顿量就成为原子光谱实验的观测量.

量子力学中观测量的名称大多沿用经典物理学中物理量的名称, 因为二者之间在一定程度上是可以类比的. 但是, 仅仅是类比, 不可以将经典物理量的内涵随意移植到量子力学中. 例如, 经典力学的相空间中的一个点描述了物体的位置 q 和动量 p , 这两个物理量可以共存, 在某个时刻物体的状态由相空间中的点 (q, p) 确定. 但是, 在量子力学中, 虽然沿用位置和动量这些名称, 但是它们不能共存, 受到不确定关系的限制, 因而不能用相空间中的一个点描述微观粒子的位置和动量.

某个特定的观测量对应于特定的观测过程. SG 实验装置是用来测量磁矩或自旋角动量的, 不能用来测量原子的能级结构. 在 SG 装置中, 梯度磁场沿 z 方向和沿 x 方向, 这是两种不同的设置, 测量的是不同方向上的磁矩或角动量.

特定的观测量对应于特定的表象. 不同的观测过程不一定对易, 不同的表象不一定相容, 不同类型的观测结果不一定共存, 这是量子现象的特征之一, 也是讨论量子力学的时候需要慎重对待的事情.

References

- [1] Albert. *Quantum Mechanics and Experience*. Harvard University Press, (1992).