第七章 粒子在位置空间中的运动 V

带电粒子在电磁场中的运动

前面讨论过的氢原子可以视作带电粒子在 Coulomb 场中的运动. 还可以考虑以下情况:

1. 带电量为 q 的粒子在匀强电场中的运动, 哈密顿量是

$$H = \frac{P^2}{2m} - q\mathbf{E}\cdot\mathbf{R}$$

设 $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$

$$= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m} - qEZ$$

哈密顿量中与 z 方向有关的部分 $\frac{P_z^2}{2m} - qEZ$ 描述的是线性势场中的运动, 在动量表象中容易求解. 在位置表象中的波函数与 Airy 函数有关.

2. 带电谐振子在匀强电场 $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z$ 中的运动, 哈密顿量为

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 - qEZ$$

在 z 方向上的运动相当于平衡位置平移了的谐振子的运动.

3. 具有一定自旋的粒子在磁场中的运动, 典型的问题是 SG 实验. 关于 SG 实验的更细致的讨论, 参看
   - D. E. Platt, American Journal of Physics **60**, 306 (1992).
   - G. Potel, F. Barranco, S. Cruz-Barrios, and J. Gómez-Camacho, Physical Review A **71**, 052106 (2005).

4. 无自旋带电量 q 的粒子在匀强磁场中的运动.

下面着重分析无自旋的带电粒子在电磁场中的运动.

微观粒子的质量为 m, 带电量为 q. 电场 $\mathbf{E}$, 磁场 $\mathbf{B}$. 标量势 ϕ, 矢量势 $\mathbf{A}$.

经典情形

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

对于给定的场强 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$, 可以有多种不同的 ϕ 和 $\mathbf{A}$ 与之对应,

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

其中 $\chi = \chi(\mathbf{r}, t)$. 规范变换不影响场强.

Lagrange 量

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - q\phi(\mathbf{r}, t) + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

其中 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

正则 (canonical) 动量

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}. \tag{1}$$

Hamilton 量

$$H = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} M v^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - q\mathbf{A}\right)^2 + q\phi. \tag{2}$$

量子情形

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - q\mathbf{A}\right)^2 + q\phi, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{R}, t), \ \ \phi = \phi(\mathbf{R}, t) \tag{3}$$

速度算子 $\mathbf{V}$,

$$\mathbf{V} = \frac{\text{机械动量算子}}{m} = \frac{1}{m}\left(\mathbf{P} - q\mathbf{A}\right).$$

考虑与速度算子有关的对易关系.

$$[R_j, V_k] = \frac{i\hbar}{m}\delta_{jk}$$

$$\begin{aligned}
[V_x, V_y] &= \frac{1}{m^2}[P_x, P_y] + \left(\frac{q}{m}\right)^2 [A_x, A_y] - \frac{q}{m^2}\big\{[A_x, P_y] + [P_x, A_y]\big\} \\
&= -\frac{q}{m^2}\big\{[A_x, P_y] + [P_x, A_y]\big\} \\
&= -i\frac{\hbar q}{m^2}\left\{\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right\} \\
&= \frac{i\hbar q}{m^2}\big(\nabla \times \mathbf{A}\big)_z = \frac{i\hbar q}{m^2} B_z
\end{aligned}$$

$$[V_j, V_k] = \frac{i\hbar q}{m^2}\epsilon_{jk\ell} B_\ell$$

其中 $\epsilon_{jk\ell}$ 是

$$\epsilon_{jk\ell} = \begin{cases} +1 & \text{当 } jk\ell = 123 \text{ 的偶数次置换} \\ -1 & \text{当 } jk\ell = 123 \text{ 的奇数次置换} \\ 0 & \text{当 } j, k, \ell \text{ 中至少两个是相等的} \end{cases}$$

速度算子期望值的运动方程　我们知道, 某个力学量 O 的期望值随时间变化的方程是

$$\frac{d}{dt}\langle O\rangle(t)=\frac{1}{i\hbar}\big\langle[O,H]\big\rangle+\left\langle\frac{\partial O}{\partial t}\right\rangle.$$

这里, 期望值是针对 $|\psi(t)\rangle$ 而言的. 考虑 $O=V_k$.

$$\begin{aligned}
V_k&=\frac{1}{m}\Big(P_k-qA_k\Big)\\
H&=\frac{1}{2}mV^2+q\phi=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{P}-q\mathbf{A}\right)^2+q\phi\\
[V_k,H]&=\frac{1}{2}m\sum_j[V_k,V_j^2]+q[V_k,\phi]\\
&=\frac{1}{2}m\sum_j\Big\{V_j[V_k,V_j]+[V_k,V_j]V_j\Big\}+\frac{q}{m}[P_k,\phi]\\
&=\frac{i}{2}\frac{\hbar q}{m}\sum_{j,\ell}\Big(V_j\,\epsilon_{kj\ell}B_\ell+\underline{\epsilon_{kj\ell}B_\ell V_j}\Big)-\frac{q}{m}i\hbar(\nabla\phi)_k\\
&=\frac{i}{2}\frac{\hbar q}{m}\sum_{j,\ell}\epsilon_{kj\ell}(V_jB_\ell\underline{-B_jV_\ell})-\frac{q}{m}i\hbar(\nabla\phi)_k
\end{aligned}$$

对于上面计算的最后两步, 补充一个步骤:

$$\sum_{j,\ell}\epsilon_{kj\ell}B_\ell V_j=-\sum_{j,\ell}\epsilon_{k\ell j}B_\ell V_j=-\sum_{j,\ell}\epsilon_{kj\ell}B_jV_\ell$$

可以看一个具体的形式.

$$\begin{aligned}
[V_1,H]&=\frac{i}{2}\frac{\hbar q}{m}(V_2B_3-B_2V_3-V_3B_2+B_3V_2)-\frac{q}{m}i\hbar(\nabla\phi)_1\\
&=\frac{i}{2}\frac{\hbar q}{m}(\mathbf{V}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{V})_1-\frac{q}{m}i\hbar(\nabla\phi)_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i\hbar}[V_1,H]+\frac{\partial V_1}{\partial t}&=\frac{q}{2m}(\mathbf{V}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{V})_1-\frac{q}{m}(\nabla\phi)_1-\frac{q}{m}\frac{\partial A_1}{\partial t}\\
&=\frac{1}{2}\frac{q}{m}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{V}\right)_1+\frac{q}{m}E_1
\end{aligned}$$

$$\left\langle m\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right\rangle=q\langle\mathbf{E}\rangle+\frac{1}{2}q\left\langle\mathbf{V}\times\mathbf{B}-\mathbf{B}\times\mathbf{V}\right\rangle$$

可以类比于经典情形下的运动方程.

机械角动量算子　定义

$$\boldsymbol{\Lambda}=m\mathbf{R}\times\mathbf{V}$$

这是机械角动量算子.

计算对易子

$$[\Lambda_x,\Lambda_y]=m^2[YV_z-ZV_y,ZV_x-XV_z]$$

$$=i\hbar\big(-mYV_x+qYZB_y+qZ^2B_z+qXZB_x+mXV_y\big)$$

$$=i\hbar\big(\Lambda_z+qZ\mathbf{R}\cdot\mathbf{B}\big)$$

而正则角动量的对易关系依旧是

$$[L_x,L_y]=i\hbar L_z$$

计算机械角动量 的期望值随时间的变化.

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle|\rangle=\langle[,H]|[,H]\rangle$$

$$[XV_y-YV_x,H]=\frac{i\hbar}{m}(XF_y-YF_x)+i\hbar[V_x,V_y]$$

$$[V_yX-V_xY,H]=\frac{i\hbar}{m}(F_yX-F_xY)-i\hbar[V_x,V_y]$$

注意到 $XV_y=V_yX, YV_x=V_xY$, 以上两式相加再除以 2, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\Lambda_z\rangle=\frac{1}{2}\langle XF_y-YF_x-F_xY+F_yX|XF_y-YF_x-F_xY+F_yX\rangle$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\boldsymbol{\Lambda}\rangle=\frac{1}{2}\langle\mathbf{R}\times\mathbf{F}-\mathbf{F}\times\mathbf{R}\rangle$$

可类比于经典结论: 角动量的变化率对于力矩.

空间位置表象中的 Hamilton 量

$$H=\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla-q\mathbf{A}\right)^2+q\phi$$

$$H=\frac{1}{2m}\big[P^2-q(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{P})+q^2A^2\big]+q\phi$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}=-i\hbar\nabla\cdot\mathbf{A}$$

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{i\hbar q}{m}\mathbf{A}\cdot\nabla+\frac{i\hbar q}{2m}\nabla\cdot\mathbf{A}+\frac{q^2}{2m}A^2+q\phi \tag{4}$$

通常选择 Coulomb 规范

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0. \tag{5}$$

规范变换

如下形式的势的变换不会改变场强,

$$\mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\chi$$

$$\phi\longrightarrow\phi'=\phi-\frac{\partial\chi}{\partial t},$$

对于 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla-q\mathbf{A}\right)^2\Psi+q\phi\Psi \tag{6}$$

势的变换不能保证方程的形式不变, 还需要对量子态进行变换, 需满足 $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = |\Psi'(\mathbf{r},t)|^2$,

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = \Psi \exp\left\{\frac{iq}{\hbar}\chi\right\} \tag{7}$$

于是 Schrödinger 方程的形式保持不变,

$$i\hbar\frac{\partial\Psi'}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}'\right)^2\Psi' + q\phi'\Psi'$$

规范不变量

- 速度的期望值是规范不变的.
- 速度的本征值也是规范不变的.
- 几率流密度矢量是规范不变的.

速度的期望值

$$\langle\Psi|\,\mathbf{V}\,|\Psi\rangle = \left\langle\Psi\middle|\left(\frac{\mathbf{P}}{m} - \frac{q\mathbf{A}}{m}\right)\middle|\Psi\right\rangle$$

在规范变换下,

$$\begin{aligned}
&\left(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}'\right)\Psi' \\
=&\left[-i\hbar\nabla - q\big(\mathbf{A} + \nabla\chi\big)\right]e^{i(q/\hbar)\chi}\Psi \\
=&e^{i(q/\hbar)\chi}\left(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}\right)\Psi
\end{aligned}$$

所以, 速度的期望值是规范不变的.

但是, 动量的期望值 $\langle\Psi|\,\mathbf{P}\,|\Psi\rangle$ 却不是规范不变的.

另外, 速度的本征值也是规范不变的. 设 $\psi(\mathbf{r})$ 是 V_z 的本征态.

$$\left(\frac{P_z}{m} - \frac{q}{m}A_z\right)\psi(\mathbf{r}) = v_z\psi(\mathbf{r})$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{P_z}{m} - \frac{q}{m}A_z'\right)e^{i(q/\hbar)\chi}\psi(\mathbf{r}) &= e^{i(q/\hbar)\chi}\left(\frac{P_z}{m} - \frac{q}{m}A_z\right)\psi(\mathbf{r}) \\
&= v_z e^{i(q/\hbar)\chi}\psi(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

几率流密度矢量

$$\mathbf{J} = \mathrm{Re}\left\{\Psi^*(\mathbf{r},t)\left[\frac{\mathbf{P}}{m} - \frac{q}{m}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right]\Psi(\mathbf{r},t)\right\}$$

也是规范不变的.

无自旋粒子在匀强磁场中的运动

重新回到哈密顿量 (3), 现在不考虑电场, 设电势 $\phi = 0$. 粒子质量 m, 带电量 q (以下设 $q > 0$). 磁感应强度 $\mathbf{B}$ 恒定, 设矢量势 $\mathbf{A}$ 不含时.

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$$

$$[V_z, V_x] = [V_z, V_y] = 0$$

$$H = H_{xy} + H_z$$

$$H_{xy} = \frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2), \quad H_z = \frac{1}{2}mV_z^2$$

$$[H_{xy}, H_z] = 0$$

$$[V_x, V_y] = \frac{i\hbar q}{m^2}B$$

$$令\ \gamma = \sqrt{\frac{\hbar qB}{m^2}}$$

$$V_x = \gamma Q', \quad V_y = \gamma P'$$

$$[Q', P'] = i$$

$$H_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\hbar qB}{m}(P'^2 + Q'^2)$$

$$H_{xy}\ 的本征值是\ \big(n + \tfrac{1}{2}\big)\frac{\hbar qB}{m}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

至于 H_z 的本征值, 只需考虑 V_z 的本征值. 而 V_z 的本征值是规范不变的. 可以将 A_z 选择为 0. 于是 V_z 的本征值就相当于 P_z 的本征值, 从 $-\infty$ 到 $+\infty$.

H 的本征值是

$$E_n(v_z) = \big(n + \tfrac{1}{2}\big)\frac{\hbar qB}{m} + \frac{1}{2}mv_z^2, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{8}$$

被称为 Landau 能级.

讨论一下对求得的能量本征值的理解. 哈密顿量 H 由可分离的两项组成: H_{xy} 和 H_z, 它们彼此对易, 于是 H 的本征值是 H_{xy} 的本征值和 H_z 的本征值之和. 带电粒子在 z 方向的运动如同自由粒子的运动, 相应的能量即是动能 $\frac{1}{2}mv_z^2$. 横向运动, 即在平行于 xy 平面内的运动, 应该可以类比于经典情形中的圆周运动. 而经典电磁学告诉我们, 在匀强磁场 $B\mathbf{e}_z$ 中, 如果带电粒子在垂直于磁场的方向上的速度分量是 v_{xy}, 那么圆周运动的频率是 $\frac{qB}{m}$, 这正对应于 (8) 式中右端第一项中的频率.

求解本征波函数. 选择如下形式的矢量势,

$$A_x = -yB, \quad A_y = A_z = 0$$

满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Hamilton 量

$$H = \frac{1}{2m}\big[(P_x + yqB)^2 + P_y^2 + P_z^2\big]$$

显然 $[P_x, H] = [P_z, H] = 0$, 但是 P_y 与 H 不对易. 于是考虑对易力学量的集合 $\{H, P_x, P_z\}$.

在位置表象中,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \frac{i\hbar q}{m}By\frac{\partial}{\partial x}\psi + \frac{q^2B^2}{2m}y^2\psi = E\psi$$

ψ 可以选择为 P_x 和 P_z 的本征函数,

$$\psi(x, y, z) = \exp\big\{i(k_x x + k_z z)\big\}\varphi(y)$$

然后得到关于 $\varphi(y)$ 的方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\hbar qBk_x}{m}y\varphi(y) + \left[\frac{q^2B^2}{2m}y^2 + \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_z^2) - E\right]\varphi(y) = 0$$

y 的线性项可以通过平移变换消除.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(y)}{\mathrm{d}y^2}+\left[\frac{1}{2}m\omega_c^2(y-y_0)^2-E'\right]\varphi(y)=0$$

其中

$$y_0=-\frac{\hbar k_x}{qB}$$

$$\omega_c=\frac{qB}{m}$$

$$E'=E-\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}$$

而 E' 可以通过谐振子的能级得到,

$$E'=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad \omega=\omega_c$$

所以

$$E=\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m} \tag{9}$$

本征函数的形式

$$\psi=e^{i(k_xx+k_zz)}\,H_n\big(\alpha(y-y_0)\big)\,e^{-\frac{1}{2}\alpha^2(y-y_0)^2}$$

其中 $\alpha=\sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}=\sqrt{\frac{qB}{\hbar}}$, H_n 是 Hermite 多项式.

轨道中心坐标 先考虑经典情形. 带电粒子的位置

$$x-x_0=r\cos(\omega_ct+\theta),\quad y-y_0=-r\sin(\omega_ct+\theta)$$

粒子运动的速度

$$v_x=-\omega_cr\sin(\omega_ct+\theta),\quad v_y=-\omega_cr\cos(\omega_ct+\theta)$$

所以可以说, 轨道中心的坐标是

$$x_0=x+\frac{v_y}{\omega_c},\quad y_0=y-\frac{v_x}{\omega_c}$$

它们都是运动常数.

类比到量子情形, 有

$$X_0=X+\frac{V_y}{\omega_c},\quad Y_0=Y-\frac{V_x}{\omega_c}$$

它们与哈密顿量对易,

$$[X_0,H]=[Y_0,H]=0$$

所以它们也是运动常数. 但是, X_0 和 Y_0 不对易,

$$[X_0,Y_0]=\frac{-i\hbar}{qB}$$

因此, 轨道中心算子的 x 分量和 y 分量之间存在不确定关系,

$$\Delta X_0\,\Delta Y_0\geqslant\frac{1}{2}\frac{1}{qB}$$

选择其它形式的 $\mathbf{A}$, 会对结果产生怎样的影响呢?

$$\mathbf{A}=-\frac{1}{2}\mathbf{R}\times\mathbf{B}=-\frac{1}{2}BY\mathbf{e}_x+\frac{1}{2}BX\mathbf{e}_y$$

速度算子

$$
\begin{aligned}
V_x &= \frac{P_x}{m} + \frac{1}{2}\frac{qB}{m}Y = \frac{P_x}{m} + \frac{1}{2}\omega_c Y \\
V_y &= \frac{P_y}{m} - \frac{1}{2}\frac{qB}{m}X = \frac{P_y}{m} - \frac{1}{2}\omega_c X \\
V_z &= \frac{P_z}{m}
\end{aligned}
$$

重新表示哈密顿量

$$
\begin{aligned}
H &= H_\perp + H_\parallel \\
H_\perp &= \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) - \frac{\omega_c}{2}L_z + \frac{m\omega_c^2}{8}(X^2 + Y^2) \\
H_\parallel &= \frac{1}{2m}P_z^2
\end{aligned}
$$

其中 L_z 是轨道角动量 $\mathbf{L}$ 的 z 方向上的分量. 注意到 $[H_\perp, H_\parallel] = 0$.

单独考虑 $H_\perp$, 令

$$
H_{\text{2D}} = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2(X^2 + Y^2)
$$

这相当于一个频率为 $\frac{\omega_c}{2}$ 的二维谐振子, 而且 $[H_{\text{2D}}, L_z] = 0$. 因此 H_{2D} 和 L_z 有共同的本征态.

引入升降算子 $a_x, a_x^\dagger, a_y, a_y^\dagger$,

$$
a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta X + i\frac{P_x}{\hbar\beta}\right), \quad a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\beta Y + i\frac{P_y}{\hbar\beta}\right)
$$

其中

$$
\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad \omega = \frac{\omega_c}{2}
$$

对易关系

$$
[a_x, a_x^\dagger] = [a_y, a_y^\dagger] = \mathbb{1}
$$

下标不相同的对易子为零. H_{2D} 可以表示为

$$
H_{\text{2D}} = (a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1)\hbar\omega
$$

本征态

$$
\left|\varphi_{n_x,n_y}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x!\,n_y!}}\left(a_x^\dagger\right)^{n_x}\left(a_y^\dagger\right)^{n_y}|\varphi_{0,0}\rangle
$$

本征值

$$
E_{\text{2D}} = (n+1)\hbar\omega, \quad n = n_x + n_y
$$

轨道角动量 L_z 可以表示为

$$
L_z = i\hbar(a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y)
$$

定义

$$
a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - i a_y), \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + i a_y)
$$

非零的对易子

$$
[a_1, a_1^\dagger] = [a_2, a_2^\dagger] = \mathbb{1}
$$

用 a_1 和 a_2 表示 a_x 和 a_y,

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2), \quad a_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2)$$

令 $N_1 = a_1^\dagger a_1$, $N_2 = a_2^\dagger a_2$, 有

$$H_{\mathrm{2D}} = (N_1 + N_2 + 1)\hbar\omega, \quad \omega = \frac{\omega_c}{2}$$

$$L_z = \hbar(N_1 - N_2)$$

$$H_\perp = H_{\mathrm{2D}} - \frac{\omega_c}{2} L_z$$

算子 N_1 和 N_2 的本征值分别记作 n_1 和 n_2, 它们的取值都是 $0, 1, 2, \cdots$. 容易得到 $H_\perp$ 的本征值

$$E_\perp = (n_1 + n_2 + 1)\frac{\hbar\omega_c}{2} - (n_1 - n_2)\frac{\hbar\omega_c}{2} = \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

可以看出, $E_\perp$ 正好等于 (9) 式的第一项, 考虑了 $H_\parallel$ 之后, 哈密顿量的本征值仍然是 (9), 这是应该的, 因为规范变换不会改变能量本征值 (对比前面说过的结论: 速度算子的本征值是规范不变的).