第 11 卷 第 4 期
1996 年 12 月

实 验 力 学
JOURNAL OF EXPERIMENTAL MECHANICS

Vol. 11, No. 4
Dec. 1996

反射波场运动规律的一般表达式

续伯钦　周　鹏　何世平
(中国科学技术大学，合肥，230026)

摘要　本文给出了当反射面发生运动或变形(与此同时，照明波长也发生变化)时反射波场强度变化的一般表达式。该表达式不依赖坐标选择，具有明确的物理意义。

关键词　反射，波场，运动。

1　引论

当反射面发生运动或变形时，空间散斑场的运动规律早已为人们所关注[1~6]。文献[6]给出了空间散斑运动规律的矩阵（分量）表达式。本文在更一般（不仅限于激光散斑场）的意义下，得到了反射波场运动规律的矢量表达式。

2　反射场变化的控制方程

当位于 S 处波长为 λ 的相干光源照射到小漫射元 Γ 时，在 P 点观察到的反射光场复振幅(见图 1)，可用如下克希霍夫积分表示：

$$U_1(P)=\int_\Gamma D(\vec{r})\frac{\exp[jk(|\vec{SM}|+\vec{MP}]}{|\vec{SM}|\cdot|\vec{MP}|}d r^2 \tag{1}$$

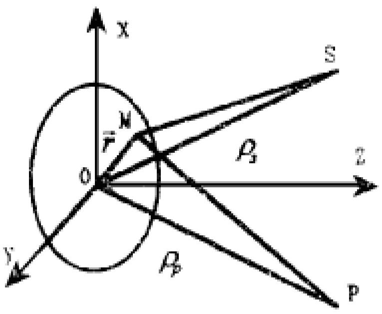

图 1

式中 $D(\Gamma)$ 为漫反射系数，k 为波数（$2\pi/\lambda$）。在近轴条件下可近似有：

$$|\vec{SM}|=(|\vec{OS}|^2-2|\vec{OM}|\cdot|\vec{OS}|+|\vec{OM}^2|^{1/2}$$
$$\cong\rho_S\left(1-\vec{r}\cdot\vec{k}_s+\frac{|\vec{r}|^2}{2}\right) \tag{2}$$

式中 ρ_S、ρ_P 和 $\vec{k}_s$，$\vec{k}_p$ 分别为知量 $\vec{OS}$、$\vec{OP}$ 的模和相应的单位矢量，$\vec{r}$ 为小面元平均平面上的位置矢量。类似地有：

$$|\vec{MP}|\cong\rho p\left(1-\vec{r}\cdot\vec{k}_p+\frac{|\vec{r}|^2}{2}\right) \tag{3}$$

将（2）、（3）式代入（1），得到：

$$U_1(P)=\frac{e^{jk(\rho_S+\rho_P)}}{\lambda\rho_S\rho_P}\int_\Gamma D(\vec{r})\exp[-jk(\vec{K}\cdot\vec{r})+jk\frac{|\vec{r}|^2}{2f}]d\vec{r}^2 \tag{4}$$

上式中的 $\vec{K}$ 为灵敏度矢量，$\vec{K}=\vec{k}_p+\vec{k}_s$；$f$ 为等效焦距，$\frac{1}{f}=\frac{1}{\rho_P}+\frac{1}{\rho_S}$。漫射元发生运动和

变形后, 其中心点位移 $\vec u$, $\vec r$ 点位移为 $\vec u + d\vec u$。若同时照明波长发生了变化, 则在 P' 观察到的新光场复振幅为 (见图 2)。

$$U_1(P') = \frac{e^{jk'(\rho_S' + \rho_P')}}{\lambda\rho_S'\rho_P'}\int_\Gamma D(\vec r)\exp[-jk'(\vec K'\cdot\vec r') + jk'\frac{|\vec r|'^2}{2f'}]d\vec r'^2 \tag{5}$$

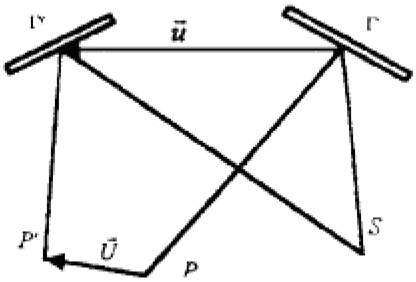

图 2

上式中以带 “′” 的参量表示该参量在衍射场发生变化后的相应值。

显然, 若我们计算衍射场前后 P 和 P' 点光强分布的相关函数 R_{cI}, 定义其极大值相应的 P' 点为波场中 P 点在变化后的新位置是合理的。对大多数我们所遇到的情况, 均可认为波场是正态的, 此时有:

$$R_{cI}(P, P') = \langle I(P)\rangle\langle I(P')\rangle + |R_{cA}(P, P')|^2 \tag{6}$$

式中以 $\langle\ \rangle$ 代表系综平均。R_{cA} 为振幅相关。(6) 式中前一项一般对极值分布无影响, 故问题归结于求振幅相关函数 R_{cA} 之模的极值点。根据 (1)、(2) 式有:

$$|R_{cA}(P, P')|^2 = \left|\frac{1}{\lambda\lambda'\rho_P\rho_P'\rho_S\rho_S'}\int_\Gamma \exp\{-j[k\nabla\vec u\cdot\vec K + \delta(k\vec K)]\cdot\vec r + j[\delta(\frac{k}{f}) + \frac{k}{f}\nabla\cdot\vec u]\frac{|\vec r|^2}{2}\}d\vec r^2\right| \tag{7}$$

式中: ∇ 为二维 nabla 算子 $(\frac{\partial}{\partial x}\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\vec j)$; $\nabla\vec B$ 是矢量 $\vec B$ 的二维梯度, 可用 2×3 矩阵表示; $\delta(\ )$ 表示波场变化前后相应参量的变化值。

上式的推导过程中我们考虑到波场变化很小, 且假定观察系统不能分辨漫射面的细节, 即认为 $\langle D(\vec r), < D^*(\vec r')\rangle = \delta(\vec r' - \vec r - d\vec u)$, 为狄拉克函数。如令:

$$\theta = [k\nabla\vec u\cdot\vec K\cdot\vec r + \delta(k\vec K)]\cdot[\delta(\frac{k}{f} + \frac{k}{f}\nabla\cdot\vec u]\frac{|\vec r|^2}{2} \tag{8}$$

(7) 式可改写为:

$$|R_{eA}(P, P')|^2 = \frac{1}{\lambda\lambda'\rho_P\rho_P'\rho_S\rho_S'}\left|\int_\Gamma e^{-j\theta}d\vec r^2\right| \tag{9}$$

积分号前面的因子对极值分布影响很小, 可忽略。根据熟知的不等式:

$$\left|\int_\Gamma e^{-j\theta}d\vec r^2\right| \leqslant \int_\Gamma |e^{-j\theta}|d\vec r^2 = \int_\Gamma d\vec r^2 \tag{10}$$

当且仅当 $\theta = 0$ 时, 上式才取等号。考虑到变形及 Γ 的任意性, 欲使 $|R_{eA}|^2$ (从而 R_{cA}) 达到极值, 必须

$$k\cdot\delta\vec K_t + k\nabla\vec u\cdot\vec K + \delta k\cdot\vec K_t = 0 \tag{11}$$

$$k\delta(\frac{1}{f}) + \frac{k}{f}\nabla\cdot\vec u + \frac{1}{f}\delta k = 0 \tag{12}$$

上二式即波场运动规律的二个基本控制方程, 方程 (11) 中我们以足标 t 代表矢量在漫射面元平均平面内的分量 (称面内分量, 下同)。(11) 和 (12) 中方程的三项分别表示试件的位移、

位移导数及波长变化对波场运动的影响。

3 反射衍射波场运动的一般表达式

3.1 几个基本关系式

(1) 由图 2 知:

$$\vec{U}-\vec{u}=\delta\rho_P\vec{k}_P+\rho_P\delta\vec{k}_P \tag{13}$$

从中可看出散斑的相对位移 $\vec{U}'=\vec{U}-\vec{u}$ 可分成沿观察方向的视向位移 $\vec{U}'_V=\delta\rho_P\vec{k}_P$ 和垂直于观察方向的表观位移 $\vec{U}'_a=\rho_P\delta\vec{k}_P$。由图 2 还可知:

$$\rho_S\vec{k}_S-\vec{u}=(\rho_S+\delta\rho_S)(\vec{k}_S+\delta\vec{k}_S) \tag{14}$$

又

$$\because\ \vec{k}_S\cdot\delta\vec{k}_S=0 \tag{15}$$

$$\therefore\ \delta\rho_S=-\vec{k}_S\cdot\vec{u} \tag{16}$$

类似地由 (13) 式有

$$\delta\rho_P=\vec{k}_S\cdot(\vec{U}-\vec{u}) \tag{17}$$

(2) 由 (13)、(14) 及 (17) 式有

$$\delta\rho_S=-\frac{1}{\vec{\rho}_S}[\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{k}_S)\cdot\vec{k}_S] \tag{18}$$

及

$$\delta\vec{\rho}_P=\frac{1}{\rho_P}\{\vec{U}-\vec{u}-[(\vec{U}-\vec{u})\cdot\vec{k}_P]\cdot\vec{k}_P\} \tag{19}$$

(3) 由计算可得:

$$\nabla\left(\frac{\vec{u}}{f}\right)=\frac{\nabla\cdot\vec{u}}{f}+\left(\frac{\vec{k}_P}{\rho_P^2}+\frac{\vec{k}_S}{\rho_P{}^2}\right)\cdot\vec{u} \tag{20}$$

3.2 波场视向位移

基本方程 (12) 可改写成:

$$-k\left(\frac{\delta\rho S}{\rho_S^2}+\frac{\delta\rho_P}{\rho_P^2}\right)+\frac{1}{f}\delta k+\frac{k}{f}\nabla\cdot\vec{u}=0 \tag{2}$$

整理上式, 代入相关关系式得波场相对视向位移为:

$$\vec{U}'_V=\left[\rho_P(1+\beta)\left(\nabla\cdot\vec{u}+\frac{\delta k}{k}\right)+\beta^2\vec{u}\cdot\vec{k}_S\right]\vec{k}_P \tag{22}$$

式中 $\beta=\rho_P/\rho_S$。综上散斑总视向位移为:

$$\vec{U}_V=\rho_P^2\left[\nabla\cdot\left(\frac{\vec{u}}{f}\right)+\frac{\delta k}{kf}\right]\vec{k}_P \tag{23}$$

3.3 波场表现位移 $\vec{U}_a$

由基本方程 (11) 有:

$$(\delta\vec{k}_P)_t=-(\delta\vec{k}_S)_t-\frac{\delta k}{k}\vec{K}_t-\nabla_{\vec{u}}\cdot\vec{k}=\frac{1}{\rho_S}[\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{k}_S)\vec{k}_S]_t-\frac{\delta\kappa}{\kappa}\vec{K}_t-\nabla\vec{u}\cdot\vec{K} \tag{24}$$

易证明:

$$\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{k}_S)\vec{k}_S=-\rho_S\nabla\vec{k}_S\cdot\vec{u} \tag{25}$$

$$\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{k}_P)\vec{k}_S = -\rho_P \nabla \vec{k}_P \cdot \vec{u} \tag{26}$$

引入

$$\Phi = k\vec{K} \cdot \vec{u} \tag{27}$$

代表在试件发生位移前后 (波长不变) 波场中 P 点相位变化, 上式可改写为:

$$(\delta\vec{k}_P)_t = -\frac{1}{k}\nabla\Phi - \frac{1}{\rho_P}[\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{k}_P)\vec{k}_P] - \frac{\delta k}{k}\vec{K} \tag{28}$$

由此, 注意到上式右端第二项为试件平均表现位移的面内分量, 波场中 P 点表现位移的面内分量为

$$\vec{U}_{at} = -\frac{\rho_P}{k}(\nabla\Phi + \delta k\vec{K}_t) \tag{29}$$

又

$$\because (\delta\vec{k}_P)_t = \delta\vec{k}_P - (\delta\vec{k}_P \cdot \vec{n})\vec{n} \tag{30}$$

上式中 $\vec{n}$ 为漫射面平均法向单位矢量。将 (21) 式二端同乘 $\vec{k}_P$ 注意到, $\vec{k}_P \cdot \delta\vec{k}_P = 0$, 有

$$\delta\vec{k}_P \cdot \vec{n} = -\frac{1}{n_P}(\delta\vec{k}_P)t \cdot \vec{k}_P \tag{31}$$

上式中 np 为 $\vec{k}_P$ 沿 $\vec{n}$ 的投影。因此, 波场表现位移的法向分量为

$$\vec{U}_{an} = -\frac{1}{n_P}[(\vec{U}_{at} - \vec{u}_{at} \cdot \vec{k}_P)]\vec{n} \tag{32}$$

综上 (23)、(29)、(32) 式给出了波场运动的一般表达式, 即

$$\begin{cases} \vec{U}_V = \rho_P^2[\nabla \cdot (\frac{\vec{u}}{f}) + \frac{\delta k}{kf}]\vec{k}_p \\ \vec{U}_{at} = -\frac{\rho_P}{k}(\nabla\Phi + \delta k\vec{K}_t) \\ \vec{U}_{an} = -\frac{1}{n_P}[(\vec{U}_{at} - \vec{u}_{at}) \cdot \vec{k}_P]\vec{n} \end{cases} \tag{33}$$

3.4 几种特殊情况

(1) 法向观察: 这是最常见的。此时表现位移无法向分量。

$$\vec{U}_V = \rho_P^2[\nabla \cdot (\frac{\vec{u}}{f}) + \frac{\delta k}{kf}]\vec{K}_P \tag{34}$$

$$\vec{U}_{st} = -\frac{\rho_P}{k}(\nabla\Phi + \delta k\vec{K}_t) \tag{35}$$

(2) 波长不变, 法向观察

$$\vec{U}_V = \rho_P^2 \nabla \cdot (\frac{\vec{u}}{f})\vec{K}_P \tag{36}$$

$$\vec{U}_{st} = -\frac{\rho_P}{k}\nabla\Phi \tag{37}$$

(3) 无位移, 仅改变波长, 法向观察

$$\vec{U}_V = \rho_P^2\frac{\delta k}{kf}\vec{K}_P \tag{38}$$

$$\vec{U}_{st} = -\frac{\delta k}{k}\rho_P\vec{K}_t \tag{39}$$

4 结论与讨论

(1) 漫射面发生变化后，波场将发生表观及视向位移。它们分别决定于观察点处位相变化的梯度与无量纲角位移 $(\vec{u}/f)$ 的散度，见公式 (33)。

(2) 散斑照相全场分析得到的是位相变化的梯度 $\nabla\varphi$ 的等值线。

(3) 文献 [1]、[2] 在讨论时均略掉了公式 (2)、(3) 中的 $|\vec{r}|^2$ 项，这相当于假定观察点位于 Fraunhofer 衍射区。由此只能导出表观位移的表达式，显然，在很多场合波场的视向位移也是很重要的。

(4) 本文提供的波场运动的一般表达式，简单明了（特别是在几种常见的特殊情况下），物理意义清晰。例如，上述结论 (1)、(2) 从标量表达式中是不可能直接得出的，从公式中可直接得到波场位移的方向，这在很多实际问题（例如光测力学）中是很有意义的。

参 考 文 献

[1] Stetson K A. J. Opt. Soc. Am., 1976, 66 (11): 1267~1271

[2] Yamaguchi I. Opt. Acta, 1981, 28: 1359~1376

[3] Jacquot P *et al*. Appl. Opt., 1979, 18: 2022~2032

[4] 伍小平等. 物理学报, 1983, 32: 973~981

[5] Chiang F P *et al*. Proc. of SPIE, 1985, 556: 99~103

[6] 伍小平等. 力学学报, 1992, 24 (1): 40~47

Gerneral Formula on the Movement of Reflective Wave Field

Xu Boqin　Zhou Peng　He Shiping

(*University of Science ” Technology of China*)

Abstral　In this paper, a general vector formula, not dependent on the coordinate, is given. This formula describe how change the intensities in the wave field while the reflective surface is moved or deformed and the wave length of illuminate light is changed.

Key words　reflection, wave field, movement.