$q-1$ 变为 q 时，每一 N_k^j 的秩都必减少 1. 因此 $q \leqslant e_k (k = 1, \cdots, m)$. 即 $\tilde{J}$ 中 Jordan 块的最小阶数不小于 q. 但它又不会大于 q，因那样 $\tilde{J}$ 的所有 Jordan 块全是 $q+1$ 阶的，m 个 Jordan 块的总阶数为 $m(q+1) = mq + m > mq + r = n$. 矛盾.

这证明了 $\tilde{J}$ 中 Jordan 块有且只有 $q+1$ 阶的与 q 阶的两种. 设 $q+1$ 阶的有 x 个，则 q 阶的有 $m-x$ 个.

$$n = (q+1)x + q(m-x) = qm + x, \quad 0 < x < m.$$

对照(*)式知 $x = r$. 再据命题1，这时

$$\tilde{J} = \mathrm{diag}\,(\underbrace{f(a)I^{(q)} + N^{(q)}, \cdots, f(a)I^{(q)} + N^{(q)}}_{m-r\text{个}},$$

$$\underbrace{f(a)I^{(q+1)} + N^{(q+1)}, \cdots, f(a)I^{(q+1)} + N^{(q+1)}}_{r\text{个}})$$

定理证完.

参　考　资　料

[1] 许以超，代数学引论，上海科学技术出版社，1966.
[2] Гантмахер, Ф.Р., 柯召译，矩阵论，高等教育出版社，1955.
[3] Мальцев, А.И., 柯召译，线性代数基础，高等教育出版社，1959.
[4] 李乔，矩阵论八讲，上海科学技术出版社，1988.

全微分方程的积分因子的存在性

陈　维　桓

（北京大学，北京100871）

摘要　本文给出两个变量的全微分方程积分因子存在性的初等的直接证明，弥补了教科书中的不足.

设 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 是定义在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内的两个连续可微函数. 考虑全微分方程

$$f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0. \tag{1}$$

如果在 D 内存在函数 $\lambda(x,y)$，$h(x,y)$，使得

$$\lambda(x,y)[f(x,y)dx + g(x,y)dy] = dh(x,y), \tag{2}$$

则称函数 $\lambda(x,y)$ 为全微分方程(1)的积分因子，而称

$$h(x,y) = \text{const}.$$

为(1)的第一积分. 在普通的常微分方程教科书中常常只讨论某些特殊类型的全微分方程的积分因子的求法（如 [1]，p.21），或把全微分方程的积分因子的存在性化为一阶偏微分方程的求解问题，没有给出初等而直接的存在性证明. 根据 Pfaff 方程组的 Frobenius 定理，(1)的积分因子的存在性是显而易见的. 在曲面论中，(1) 的积分因子的存在性起很重要的作用（如见 [2]，p.79），所以提供一个初等而直接的证明有助于弥补现行教科书中的不足. 这篇注记就是要提供这样一个证明.

定理. 考虑全微分方程(1). 对于任意一点 $(x_0,y_0)\in D$，必有 (x_0,y_0) 的一个邻域 $U\subset D$，以及定义在U上的函数 $\lambda(x,y),h(x,y)$ 使(2)式成立,即在 (x_0,y_0) 的某个邻域内,方程(1)的积分因子是存在的.

证. 设 $(x_0,y_0)\in D$，不妨设 $g(x_0,\ y_0)\neq 0$，于是在 (x_0,y_0) 的邻域内可以考虑常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f(x,y)}{g(x,y)}. \tag{3}$$

根据常微分方程理论([1],p.35,p.50),必有 x_0 的邻域 I 及 y_0 的邻域 J，使得 $I\times J\subset D$，并且对于任意的 $y_1\in J$，方程(3)有唯一解

$$y=y(x,\ y_1),\quad x\in I \tag{4}$$

满足初条件

$$y(x_0,y_1)=y_1, \tag{5}$$

而且函数 $y(x,y_1)$ 对于 x，y_1 是可微地依赖的. 由(5)可知 $\left.\dfrac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}\right|_{x=x_0}=1$，故有 x_0 的邻域 $I'\subset I$，使得

$$\frac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}\neq 0,\ \forall(x,\ y_1)\in I'\times J. \tag{6}$$

于是根据反函数定理,存在函数

$$y_1=h(x,y),\ (x,y)\in I_1\times J_1\subset I\times J \tag{7}$$

满足恒等式

$$y\equiv y(x,h(x,y)). \tag{8}$$

对(4)式求微分得到

$$\begin{aligned}dy&=\frac{\partial y(x,y_1)}{\partial x}dx+\frac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}dy_1\\&=-\frac{f(x,y(x,y_1))}{g(x,y(x,\ y_1))}dx+\frac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}dy_1,\end{aligned}$$

第二个等号是由于函数 $y(x,y_1)$ 满足方程(3). 所以

$$dy_1=\frac{1}{\dfrac{\partial y(x,y_1)}{\partial y_1}\cdot g(x,y(x,\ y_1))}\cdot[f(x,y(x,y_1))dx+g(x,y(x,y_1))dy].$$

用 $y_1=h(x,y)$ 代入,并且命

$$\lambda(x,y)=\frac{1}{\dfrac{\partial y}{\partial y_1}(x,h(x,y))\cdot g(x,y)},$$

则由于(7)式在 $I_1\times J_1\subset D$ 内成立

$$dh(x,y)=\lambda(x,y)[f(x,y)dx+g(x,y)dy],$$

即 $\lambda(x,y)$ 是方程(1)在 $I_1\times J_1$ 内的积分因子,证毕.

顺便指出,在变量个数多于 2 时,定理的结论一般是不成立的. 根据 Frobenius 定理可知(参看[3]，p.82),全微分方程组

(下转60页)

[9] Dietz. K, et al., Epidemiological model for sexually transmitted diseases, *J. Math. Biol.*, 26(1988), 1—25.

[10] Fredrickson, A. G., A mathematical theory of age structure in sexual population: random mating and monogamous marriage models, *Math. Biosci.*, 10(1971), 117—143.

[11] Harrison, M. J., The cubic growth of AIDS cases: General dependence on early infection rates and distribution of times to appearance of clinical symptoms, *J. Math. Biology*, 27(1989), 523—536.

[12] Hessol, N. A. et al., The natural history of human immunodeficiency virus infection in a cohort of homosexual and bisexual men: A 7-year prospective study, Presented at III International Conference on AIDS, Washington, 1. June. 1987.

[13] Hyman, J. M. et al., Using mathematical models to understand the AIDS epidemic, *Math. Biosci.*, 90(1988), 415—475.

[14] Hyman, J. M. et al., The effect of social mixing patterns on the spread of AIDS, *Math. Biosci.*, 90(1988), 190—219.

[15] Lang, T. M. A. et al., Persistent HIV antigenemia and decline of HIV core antibodies associated with transition to AIDS, *British, Med. J.*, 293(1986), 1459—1462.

[16] Lin, W. M. et al., Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates, *J. Math. Biol.*, 25(1987), 359—380.

[17] Londen, S. D., Integral equations of Volterra type, In: Mathematics of Biology. M. Iannelli (ed). Liguori Editori, Napoli(1981).

[18] Jacquez, J. et al., Modeling and the transmission of HIV (In preparation).

[19] Jing, Z. J., Qualitative analysis of a mathematical model of AIDS (将发表于"应用数学学报"英文版).

[20] Jostph, J. G. et al., *Two-year iongitudinal study of behavioral risk reduction in a cohort of homosexual* men, Presented at III International Conference on AIDS, Washington, 1, June, 1987.

[21] May, R. M. et al., Possible demographic consequences of HIV/AIDS epidemics. I. Assuming HIV infection always leads to AIDS, *Math. Biosci.*, 90(1988), 475—505.

[22] Nasell, I., Hybrid models of tropical infections, Lect. Notes. Biomath., 59(1985).

[23] Padian, N. et al., Male to female transmission of human immunodeficiency virus: current results, infectivity rates, and San Francisco population Seropreralence estimates, Presented at III International Conference on AIDS, Washington, June, 1987.

[24] Sattenspiel. L., Population structure and the spread of disease, *Human Biol.*, 59(1987), 411—438.

[25] Sattenspiel, L. et al., The spread and persistence of infections disease in structured populations, Proceeding of the 1987 CNLS Workshop on Nonlinearity in Medicine and Biology, *Math. Biosci.*, 90(1980).

[26] 美国医学会杂志中文版(JAMA),7(1988),6—8.

(上接73页)

$$\omega \equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x^1, \cdots, x^n)dx^i = 0$$

有积分因子的充分必要条件是 $d\omega \wedge \omega \equiv 0$. 在三个变量的情形,即方程

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

有积分因子的充分必要条件是

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \equiv 0.$$

参 考 资 料

[1] Л. Э. 艾利斯哥尔兹,微分方程,高等教育出版社,北京,1959.

[2] 苏步青、胡和生等,微分几何,人民教育出版社,北京,1979.

[3] 陈省身、陈维桓,微分几何讲义,北京大学出版社,北京,1983