

微分几何 2017 秋季学期

(0) 课程信息

刘世平

Email: spliu@ustc.edu.cn Office: 1611

课程主页: staff.ustc.edu.cn/~spliu/Teaching.html

课程成绩: 平时作业、期中考试、期末考试

参考书: ① 彭家贵、陈卿 微分几何

② 沈-兵 整体微分几何初步

③ Manfredo P. Do Carmo, Differential Geometry of curves & surfaces.

④ Michael Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 2, Chap. 1-3.

助教: 王首达 2014 级少年班学院

wstda@mail.ustc.edu.cn

刘弘毅 2014 级数学科学学院

lhyl95@mail.ustc.edu.cn

作业每周交一次 (周四课后交)

习题课每周一次 (从教学第 2 周开始)

我们要讨论一门什么样的学问?

微分几何: 始于微积分在几何的应用

②

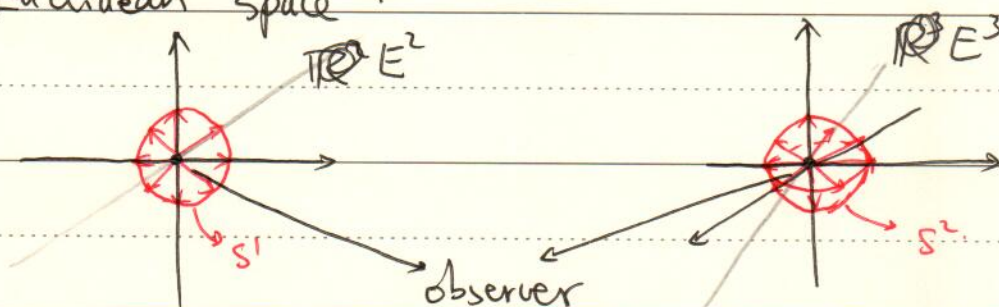
几何的观念最初源于人们对自然空间的直观感受和经验。

► Euclid's Elements. (公元前300年左右)

↑
古希腊数学家

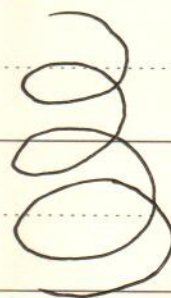
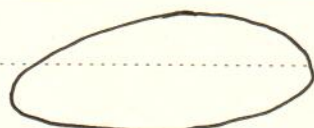
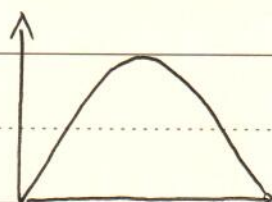
- 直观几何条理化结构
- 公理化的数学研究方法

Euclidean space:



various directions and straight lines

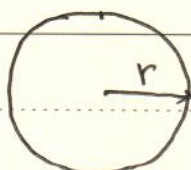
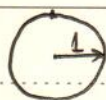
物体的运动轨迹 → 曲线 curves



► 曲线的形状? how "curved" it is?

曲率, curvature at each point.

圆:



局部来看, 圆半径 r 越大, 弯曲程度越 "小".

任意平面曲线逐点处与相切圆做比较来度量弯曲程度.

事实上，^{平面}“曲线的形状由其每点处的曲率唯一确定”！

“(空间)曲线的形状由其每点处的曲率和挠率唯一确定”！！

人们最早意识到这一点是在 1847 年，是由所谓的

Serret - Frenet formulas

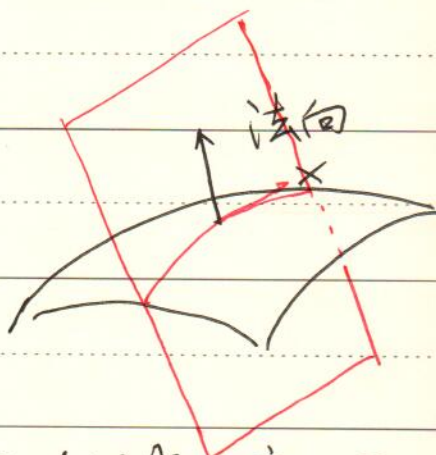
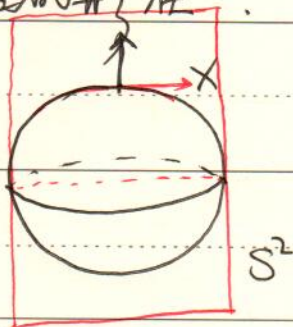
给出的。这个公式是独立地由两位法国数学家

- Serret, in 1851

- Frenet, in his thesis of 1847, an abstract of which appeared in 1852

发现的。Frenet 还研究天文和气象。

► 曲面的形状？

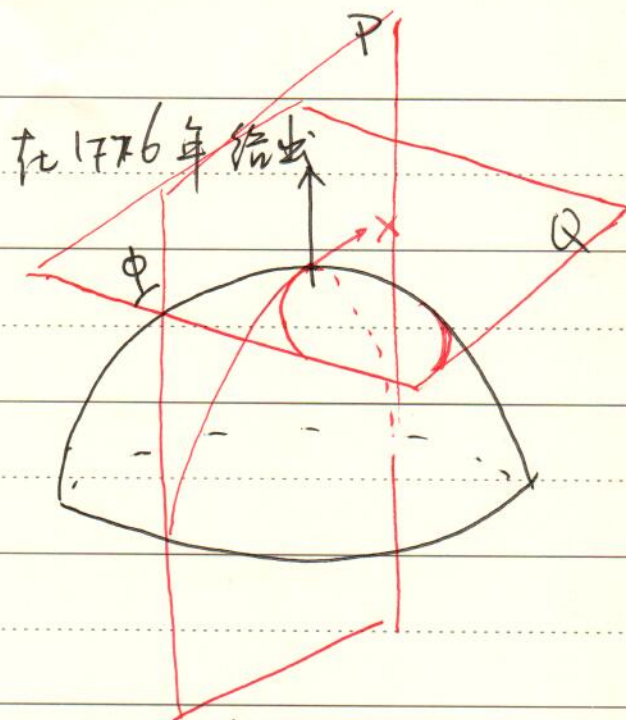


自然的想法是通过曲线之形状来研究曲面的形状

在一点处，取好法向，则每一个切向量 X 和法向 ~~一起~~ 给出一个平面，截曲面得一曲线。从而可记 K_X 为相应曲线在该点处曲率。

- Euler 1760 年发现：如果 K_X 不是对所有方向 X 全相等，则精确存在一个方向 X_1 ， K_{X_1} 达最大值，和一个方向 X_2 ， K_{X_2} 达最小值，任一 K_X 可由 K_{X_1} 、 K_{X_2} 以线性组合给出！！且两方向 X_1, X_2 相互垂直。

另一个关于曲面上曲线的主要结果，稍后由法国数学家 Meusnier



在1776年给出

设 P 为由 X 和法向张成平面
依前记号, κ_x 为 P 与曲面
相截所得曲线的曲率.

设 Q 为一包含 X 的平面. 则
其截曲面相截所得曲线
的曲率可由 κ_x 给出.
(为 $\kappa_x \frac{1}{\cos \phi}$).

直观: 当 $\phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 所得曲线的曲率越来越大!

- ▶ 上述“将曲面截成曲线”的研究方法并不令人满意。事实上, 它把曲面的“内蕴几何”和“外蕴几何”混在一起了!!

这一点直到1827年^才由伟大的 Gauss 理清!

- ▶ Karl Friedrich Gauss's paper in Latin of 1827:
Disquisitiones generales circa superficies curvas
(General Investigations of curved Surfaces)

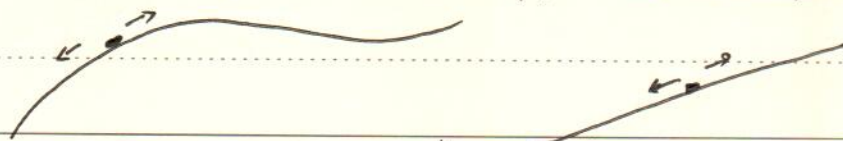
"The single most important work in the history of differential geometry ..."

可以说高斯的这篇论文就是我们这门课的主要内容.

- ▶ “内蕴”与“外蕴”

- 注意到所有曲线的“内蕴几何”都是一样的：

假如你生活在一维空间，你感受不到空间的弯曲

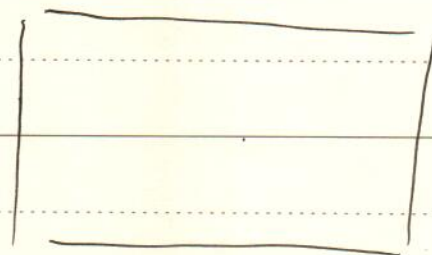
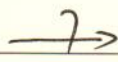
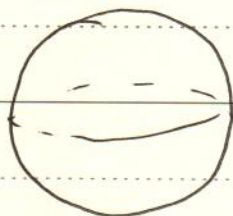


不同的曲线只能由它们在大空间中的不同嵌入方式来区分

我们可以把一条曲线映射到另一条曲线

“自然”地 $\rightarrow$ 不用拉长或挤压

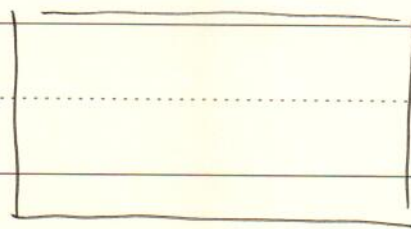
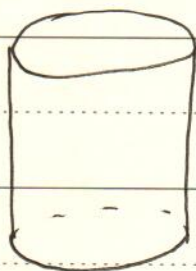
- 曲面有其自己的“内蕴几何”：



你不能把一片曲面，不经拉伸和压缩地映射到另一个曲面！！

例子：地图

- 另一方面：同一曲面可以以不同方式“放入” E^3 中：



高斯把这两类不同的几何区分开来：

- 曲面的内蕴几何：第一基本形式

外蕴几何：第二基本形式

- 高斯绝妙定理 Theorema Egregium

$\uparrow$ Latin word for “remarkable”

高斯发现存在一种“曲率测度” (curvature measure),

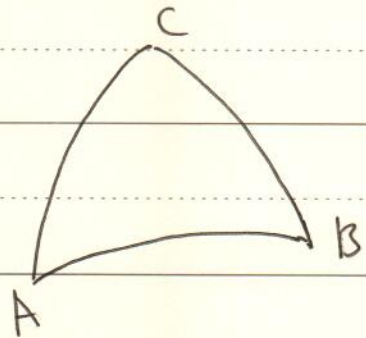
⑥

后来被称为高斯曲率 K ，只依赖于曲面的内蕴几何而不依赖于如何将其放入 E^3 !!

- 另一种 curvature measure, 平均曲率, 描述了曲面的外蕴几何, 也即“如何放入 E^3 ”。

高斯在其文章最后, 证明之后被一般称为 Gauss-Bonnet formula 的重要公式. 考虑测地三角形, 则其 integral curvature

$$\int_{\triangle ABC} K dV = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$



特别的, 标准球面上测地三角形内角和为 π 加上三角形面积.

平面上

内角和为 π .

整体微分几何问题: $\int_S K dV$ 整个曲面的积分曲率是什么?

- Riemann 在 1854 年的著名演讲 "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" 将高斯关于曲面的内蕴几何推广到高维空间, 即所谓“黎曼几何”。

综述 微分几何是一门古老的学科

我们这门课的主要内容, 就是 Gauss 1827 年论文中所发现的学问!

为此目的, 我们还需要先作一些关于 空间、曲线 的几何准备。

(I)

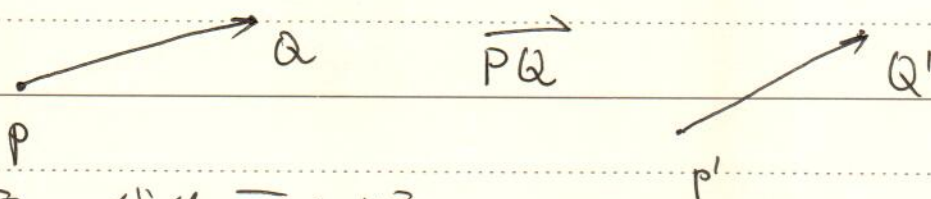
(II)

Aristotle (384-322 BC): Space is the collection of natural positions of objects. ⑦

(I) 欧氏空间: What is the structure of the space that you are living in?
(4) 经典的三维欧氏空间 E^3 :

点、线、面. 满足欧氏几何的公理假设

向量: 空间中既有长度又有方向的量
可以用有向线段来表示:



向量长度: 线段 PQ 的长度

方向: P 为起点 Q 为终点

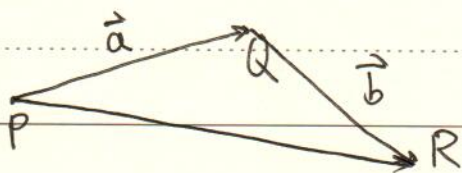
向量相等: 经平行移动 $P'Q'$, 当 P' 与 P 重合时, Q 与 Q' 也重合

可验证, 这是一个等价关系

故: 只考虑向量的长度和方向, 不考虑向量的起点

因此我们可以定义向量的各种运算.

1) 向量的加法



给定向量 $\vec{a}, \vec{b}$,
向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的和为
 $\vec{a} + \vec{b} := \vec{PR}$.

可验证: (a) 交换律 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(b) 结合律 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

2) 向量的数乘

向量 $\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{a}$ 仍为一向量, 其长度为 $\vec{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍. 方向为 $\begin{cases} \text{与 } \vec{a} \text{ 相同, 当 } \lambda > 0 \text{ 时} \\ \text{与 } \vec{a} \text{ 相反, 当 } \lambda < 0 \text{ 时} \end{cases}$. $\lambda = 0$ 时规定 $\lambda \vec{a}$ 为零向量.

可验证: (a) 结合律 $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$

(b) 分配律 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

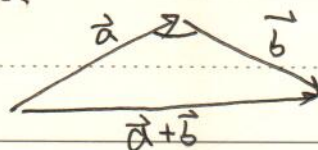
3) 向量的内积: $\vec{a}, \vec{b}$ 的内积是一个数, 记为 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

定义: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$

↑
向量长度

三角形余弦定理 $\Rightarrow$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) \quad (\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2)$$

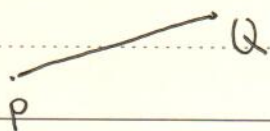


可验证 (a) 交换律 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

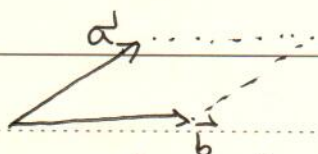
(b) 分配律 $\langle \vec{a}, \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \mu \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$

4) 向量的外积:

类比: 两个点 P, Q 给出一个向量 $\overrightarrow{PQ}$, 长度为线段 PQ 长度.



两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 可张成一个平行四边形



平面可以法向量来确定 (差一个方向)

两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的外积, $\vec{a} \wedge \vec{b}$, 是一个新的向量,

长度: $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 张成的平行四边形面积

方向: $\vec{a} \wedge \vec{b}$ 和 $\vec{a}, \vec{b}$ 均垂直, 且, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}$ 构成右手系.

具有性质: (a) 反交换律 $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

(b) 分配律 $\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda \vec{a} \wedge \vec{b} + \mu \vec{a} \wedge \vec{c}$

⑨

欧氏空间: ① homogeneous: space looks the same everywhere

② ~~isotropic~~ isotropic: space looks the same in every direction.

§(2) 向量全体构成一个三维欧氏向量空间.

代数结构 —— 抽象向量空间.

定义: 一个集合 V 称为实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 是指在 V 上定义了加法运算与数乘运算, 它们满足

$$(1) (xy)v = x(yv), \quad 1v = v$$

$$(2) x(v+w) = xv + xw, \quad (x+y)v = xv + yv.$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, w, v \in V.$$

基: 如果有一组 $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, 使得 V 中任何元都可以表示为它们的线性组合且唯一, 则称 V 是 n 维向量空间.
 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 称为 V 的一组基.

例: n 维数组空间

$$\mathbb{R}^n = \{v = (x^1, x^2, \dots, x^n) \mid x^i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n\}$$

加法、数乘: 相应的分量运算

任一 n 维向量空间 V 与 $\mathbb{R}^n$ 等同:

$$V \ni v = \sum_{i=1}^n x^i v_i \rightarrow (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

给定基 $v_1, v_2, \dots, v_n$

内积: 向量空间 V 上的内积 是一个双线性函数 $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

满足 (1) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(2) $\langle v, v \rangle \geq 0$, 且 $\langle v, v \rangle = 0$ 当且仅当 $v = 0$

$(V, \langle, \rangle)$: 定义了内积的有限维向量空间称为 欧氏向量空间.

↓ Euclidean structure

经 Schmidt 正交化, 可将 V 的一组基变为一组标准正交基 $e_1, \dots, e_n$ with

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

例子: n 维数组空间 $\mathbb{R}^n$ 上, 对 $v = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$
 $w = (y^1, y^2, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle v, w \rangle := x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n.$$

$(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$: 自然的一组标准正交基为

$$\{e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) : i = 1, 2, \dots, n\}$$

任一 n 维欧氏向量空间与 $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ 等同.

性质: 三维欧氏空间向量的全体构成一个三维欧氏向量空间.

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 我们可以定义元素间的外积:

记 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基为:

$$i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 1)$$

$v = (x^1, x^2, x^3)$ 和 $w = (y^1, y^2, y^3)$ 的外积定义为.

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \end{vmatrix} = (x^2 y^3 - x^3 y^2, -x^1 y^3 + x^3 y^1, x^1 y^2 - x^2 y^1) \in \mathbb{R}^3$$

外积运算满足^反交换律, 不满足结合律. $v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) \neq (v_1 \wedge v_2) \wedge v_3$!!

性质: 设 $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^3$, 则有

$$(1) v_1 \wedge (v_2 \wedge v_3) = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_1, v_2 \rangle v_3$$

(2) Lagrange 恒等式

$$\langle v_1 \wedge v_2, v_3 \wedge v_4 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_1, v_4 \rangle \langle v_2, v_3 \rangle$$

(3) 定义混合积 $(v_1, v_2, v_3) := \langle v_1, v_2 \wedge v_3 \rangle$

则有 $(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_3, v_1) = (v_3, v_1, v_2)$.

作业: 验证 (1) - (3).

§(3). E^3 和 $\mathbb{R}^3$ 等同: 坐标 coordinate

标架: 在 E^3 中取定一点 O 为原点, 以 O 为起始点, 取三个线性无关的向量 $\{v_1, v_2, v_3\}$. 则称 $\{O; v_1, v_2, v_3\}$ 为 E^3 以 O 为原点的一个一般标架.

当 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 为相互正交的^称单位向量时, $\{O; v_1, v_2, v_3\}$ 为 E^3 的一个正交标架

$\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 正交标架 $\Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3$.

坐标: 任意向量 a 关于 $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 有分解:

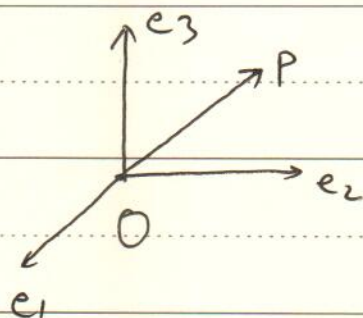
$$a = \sum_{i=1}^3 a^i e_i, \text{ with } a^i = \langle a, e_i \rangle, i=1, 2, 3$$

~~$a^i, i=1, 2, 3$~~ (a^1, a^2, a^3) 称为向量 a 的坐标

$\vec{OP}$ 坐标 (x^1, x^2, x^3)

(在基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下投影)

$$\text{即 } \vec{OP} = \sum_{i=1}^3 x^i e_i$$



在此意义下, 我们可称点 P 的坐标为数组 (x^1, x^2, x^3)

$\vec{OP}$ 称为 P 点的位置向量

• 取定标架后, $E^3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3$

点 $P \leftrightarrow (x^1, x^2, x^3)$

• 取定正交标架后, $E^3 \leftrightarrow$ 三维欧氏向量空间 $\mathbb{R}^3$

• 可验证 E^3 中向量的加法、数乘、^内积运算的坐标表示, 即为 $\mathbb{R}^3$ 中相应运算

Lagrange 恒等式 $\Rightarrow \langle v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle \langle v_2, v_2 \rangle - \langle v_1, v_2 \rangle^2$

$$= |v_1|^2 |v_2|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2$$

$$= |v_1|^2 |v_2|^2 \sin^2(\angle v_1, v_2)$$

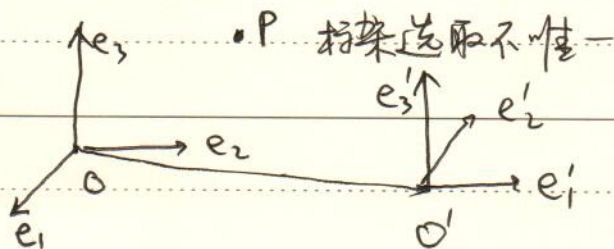
$$|v_1 \wedge v_2|^2 = (v_1, v_2 \text{ 张成的平行四边形面积})^2$$

$$(v_1, v_2, v_3) = \langle v_1, v_2 \wedge v_3 \rangle = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

$= v_1, v_2, v_3$ 张成的平行六面体的体积

有向 2017.08.05

§(4) 坐标变换



• P 标架选取不唯一

$\{O; e_1, e_2, e_3\}$

$\{O; e'_1, e'_2, e'_3\}$