

上次课有同学问到第一基本形式中 du, dv 该如何理解.

我们上次提到第一基本形式所对应的矩阵 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 在坐标变换下会变化, 但 I 整体不会变化. 实际上 I 可看作矩阵 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 所对应的 ~~线性映射~~ ^{泛函} 在线性代数中我们知道 ~~线性映射~~ ^{泛函} 是不依赖于基选取的, 但其矩阵表示依赖于基选取.
 $\Rightarrow$ VR 型

考虑 $I = E du du + 2F du dv + G dv dv$ 在 $P \in M$ 点 $r = r(u, v)$

可看作 $I: \cancel{VR} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 双线性映射
 $(V_1, V_2) \mapsto I(V_1, V_2)$

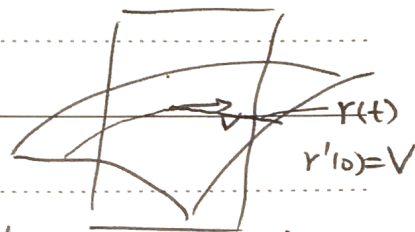
上面我们实际上将 M 在 P 点的切平面等同于 $\mathbb{R}^2$. 我们知道它由 r_u, r_v 张成. 故 $\exists \lambda_i, \mu_i, i=1, 2$ 使

$$V_i = \lambda_i r_u + \mu_i r_v, \quad i=1, 2$$

$$\text{则 } I(V_1, V_2) := (\lambda_1, \mu_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} (= \langle V_1, V_2 \rangle)$$

有修正微分形式的同学可以理解上述定义是自然的. 因为 du 可以看作是切平面 $\mathbb{R}^2 = \text{span}\{r_u, r_v\}$ 上的线性泛函.

$$du(V) = \cancel{du(\lambda_1 r_u + \mu_1 r_v)} \\ := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(r(t))$$



当然需要说明这不依赖于曲线 $r(t)$ 的选取.

$$\text{从而 } du(r_u) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} u(r(u, 0)) \quad (\text{即 } P = (0, 0)) \\ = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} u = 1$$

$$du(r_v) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} u(r(0, u)) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} 0 = 0$$

$$\text{同理 } dv(r_u) = 0, \quad dv(r_v) = 1$$

从而可看如下表:

补②

$$I(V_1, V_2) = E du(V_1) du(V_2) + 2F(du(V_1) du(V_2) + du(V_1) du(V_2)) + G du(V_1) du(V_2)$$

注意到 $du(V_1) = du(\lambda_1 r_u + \mu_1 r_v) = \lambda_1$

我们有 $I(V_1, V_2) = E \lambda_1 \lambda_2 + F(\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) + G \mu_1 \mu_2$

$$= (\lambda_1 \lambda_2) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

当然从上述讨论, 我们看到第一卷形式的定义中, 我们看不到②处的映射形式, 也即其定义有其模糊之处. 但是在我们的接下来的讨论中, 只会用到

$$I(V, V) = E du(V) du(V) + 2F du(V) du(V) + G du(V) du(V)$$

$$= \lambda^2 E + 2\lambda \mu F + \mu^2 G$$

$$= (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

where $V = \lambda r_u + \mu r_v$.

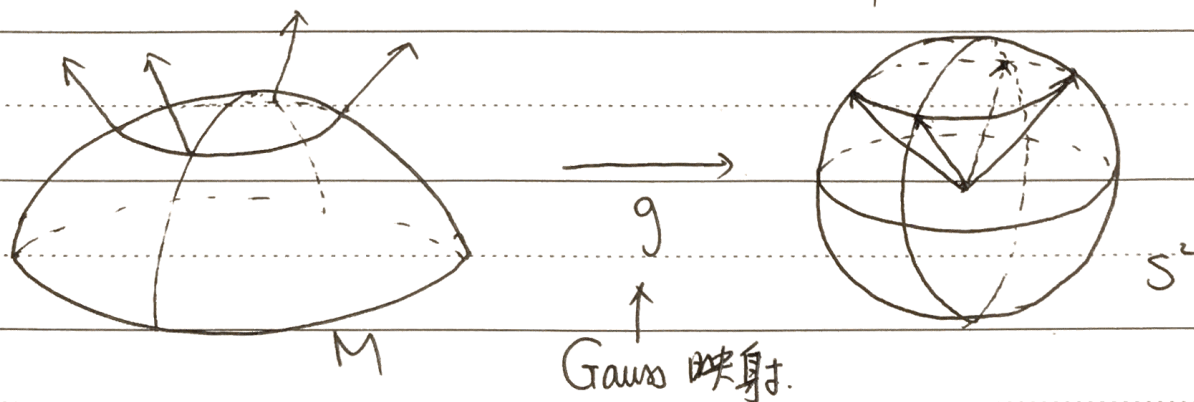
故在 I 的定义中我们不去区分 $du dv$ 和 $dv du$.

在这种定义下, 我们看到曲线弧长可表示为

$$s = \int_a^c |r'(t)| dt = \int_a^c \sqrt{I(r'(t), r'(t))} dt.$$

§5 高斯曲率：精确定义

现在我们已经准备好再次回到高斯曲率的讨论。



回忆 §3 的讨论和 §4 的曲面面积的定义，~~在~~ P 点处高斯曲率可记为

$$K(P) = \lim_{A \rightarrow P} \pm \frac{\iint_A |n_u \wedge n_v| du dv}{\iint_A |r_u \wedge r_v| du dv}$$

由高斯映射是否保持 P 点附近定向而定。

当然我们提到过这个定义中极限之良定性存在问题。我们在这里不去关心极限的具体性质，而直接定义 Gaussian curvature 如下：

定义 5.1 设 M 为一正则曲面 (片)。设 M 有参数表示 $r = r(u, v)$ 。

任一点 $P \in M$ 处的高斯曲率 $K(P)$ 定义为

$$K(P) := \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$$

这里 $n := \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}$ 为 P 点处单位法向量。

注记：(i) 注意 $n_u \wedge n_v$ 和 $r_u \wedge r_v$ 为 E^3 中两个向量， $\frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$

有^{意义}是因为这两个向量平行。(因为 $n_u \wedge n_v$ 为曲面经高斯映射后在球面 S^2 上像集的法向量, 故与其在球面上同一位置向量相同, 故而与 $r_u \wedge r_v$ 平行)。所以 $K(P)$ 定义为满足

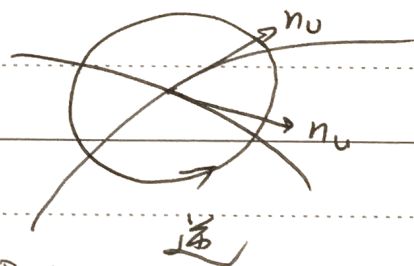
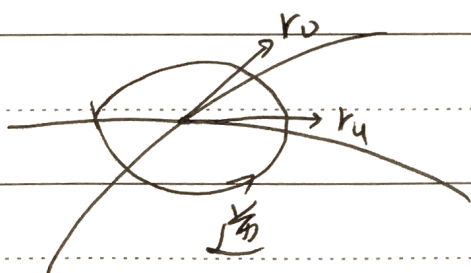
$$n_u \wedge n_v \stackrel{(\text{P})}{=} K(P) r_u \wedge r_v$$

注意这里 $n_u \wedge n_v, r_u \wedge r_v$ 取值在 ~~球面~~ 流形 $r(u,v)=P$ 的 (u,v) 外。习惯上 $r_u \wedge r_v$ 看作起点在 P 点, 而 $n_u \wedge n_v$ 看作起点在 $g(P)$ 点。但作为向量时, 我们仍不考虑起点的区别 (即我们所说的向量为等价类)。

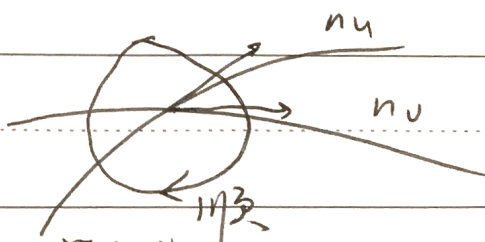
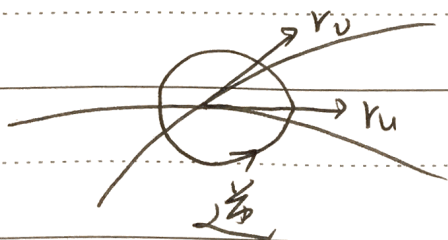
(ii) 当然这个定义 ~~也~~ 为带符号的“面积元”的比。不~~与~~流形注意到 $|K(P)| = \frac{|n_u \wedge n_v|}{|r_u \wedge r_v|} = \frac{n_u, n_v \text{ 张成平行四边形面积}}{r_u, r_v \text{ 张成平行四边形面积}}$

其符号取决于 $n_u \wedge n_v$ 和 $r_u \wedge r_v$ 是否同向。

这正是我们已讨论的由高斯映射是否保持定向所决定的符号。

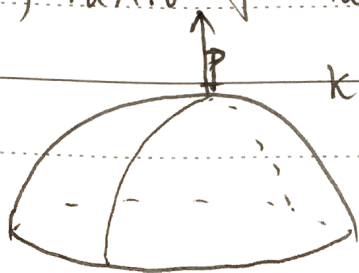


则 $r_u \wedge r_v$ 和 $n_u \wedge n_v$ 同向, 符号为正。

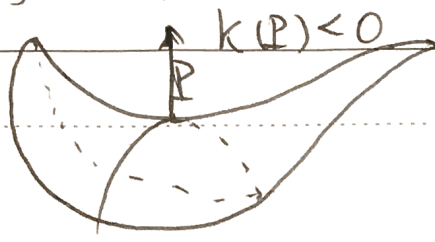


则 $r_u \wedge r_v$ 和 $n_u \wedge n_v$ 反向, 符号为负。

图 4.2

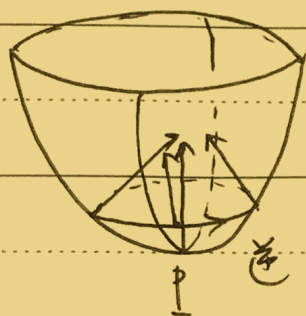
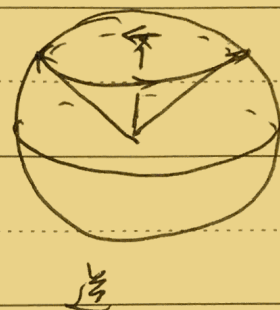


$K(P) > 0$



$K(P) < 0$

问

 $K(P)$ 符号?

实际上仍有 $K(P) > 0$. 这仅是将上面左图中曲面的参数 (u, v) 变为 (v, u) 的结果.

(iii) 一般地, 我们有: K 不依赖于参数的选取. 这是因为对 (容许) 参数变换 $(u, v) = \sigma(\bar{u}, \bar{v})$, 成立

$$r_{\bar{u}} \wedge r_{\bar{v}} = \left(r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \right) \wedge \left(r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \right)$$

$$= r_u \wedge r_v \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} - \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right)$$

$$= r_u \wedge r_v \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix}$$

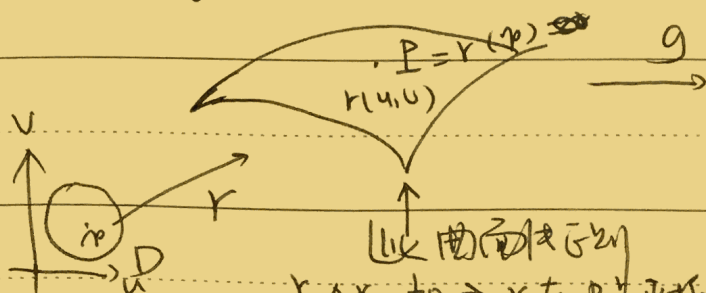
$$= r_u \wedge r_v \det J.$$

类似地有 $n_{\bar{u}} \wedge n_{\bar{v}} = n_u \wedge n_v \det J$.

故 $\frac{n_{\bar{u}} \wedge n_{\bar{v}}}{r_{\bar{u}} \wedge r_{\bar{v}}} = \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v}$

在 P 点局部

(iv) 如果高斯映射不是 $\odot$ 1-1 的, 由 §1 的讨论知曲面 $n(u, v)$ 在 $\odot g(P)$



$r_u \wedge r_v \neq 0 \Rightarrow r$ 在 P 点附近 1-1

故 g 在 P 点附近不是 1-1 的, 说明曲面 $n(u, v)$ 的参数化不满足 $n_u \wedge n_v \neq 0$.

也即 $n_u \wedge n_v = 0$. 此时, 根据定义 $K(P) = 0$

高斯曲面有沿有更加显式的计算公式呢? 比如在一些比较“好”的参数表示下?

回忆 §1 的讨论, 正则曲面在一点局部均可参数化为

$$r = r(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad f \text{ 为光滑函数.}$$

从而我们仍有

$$\begin{cases} r_u = (1, 0, f_u) \\ r_v = (0, 1, f_v) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{第一基本形式 } I(u, v) &= (f_u^2 + 1) du du + 2f_u f_v du dv + (f_v^2 + 1) dv dv \\ &= (du \ dv) \begin{pmatrix} f_u^2 + 1 & f_u f_v \\ f_u f_v & f_v^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} r_u \wedge r_v &= (1, 0, f_u) \wedge (0, 1, f_v) \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} \\ &= (-f_u, -f_v, 1) \end{aligned}$$

由定义, 单位法向量

$$n(u, v) = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}} \quad (**)$$

不妨记向量

$$n_u = ((n_u)_1, (n_u)_2, (n_u)_3)$$

$$n_v = ((n_v)_1, (n_v)_2, (n_v)_3)$$

因为 $r_u \wedge r_v, n_u \wedge n_v$ 平行, 我们有

$$K(P) = \frac{n_u \wedge n_v}{r_u \wedge r_v} = \frac{(n_u \wedge n_v)_i}{(r_u \wedge r_v)_i}, i=1,2,3. \quad ()_i \text{ 表示该向量的第 } i \text{ 个坐标分量}$$

取 $i=3$, $(r_u \wedge r_v)_3 = 1$.

而 $(n_u \wedge n_v)_3 = \det \begin{pmatrix} (n_u)_1 & (n_u)_2 \\ (n_v)_1 & (n_v)_2 \end{pmatrix}$

下面, 我们来分别计算 $(n_u)_1, (n_u)_2, (n_v)_1, (n_v)_2$.

由 (**) 式我们计算

$$(n_u)_1 = \frac{-f_{uu}\sqrt{f_u^2+f_v^2+1} - (-f_u) \frac{1}{2\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}} \cdot (2f_v f_{uv} + 2f_u f_{vu})}{f_u^2+f_v^2+1}$$

$$= \frac{-f_{uu}(f_u^2+f_v^2+1) + f_u(f_v f_{uv} + f_u f_{vu})}{(f_u^2+f_v^2+1)^{3/2}}$$

$$= \frac{-f_{uu}(f_u^2+1) + f_u f_v f_{uv}}{(f_u^2+f_v^2+1)^{3/2}}$$

$$(n_u)_2 = \frac{-f_{uv}\sqrt{f_u^2+f_v^2+1} - (-f_v) \frac{1}{2\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}} \cdot (2f_u f_{uv} + 2f_v f_{vu})}{f_u^2+f_v^2+1}$$

$$= \frac{-f_{uv}(f_u^2+f_v^2+1) + f_v(f_u f_{uv} + f_v f_{vu})}{(f_u^2+f_v^2+1)^{3/2}}$$

$$= \frac{-f_{vu}(f_u^2+1) + f_v f_u f_{uv}}{(f_u^2+f_v^2+1)^{3/2}}$$

$$(n_v)_1 = \frac{-f_{uv}\sqrt{f_u^2+f_v^2+1} - (-f_u) \frac{1}{2\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}} \cdot (2f_u f_{uv} + 2f_v f_{vu})}{(f_u^2+f_v^2+1)}$$

$$= \frac{-f_{uv}(f_v^2+1) + f_u f_v f_{vu}}{(f_u^2+f_v^2+1)^{3/2}}$$

$$(n_u)_2 = \frac{-f_{uv}\sqrt{f_u^2+f_v^2+1} - (-f_u) \frac{1}{2\sqrt{f_u^2+f_v^2+1}} (2f_u f_{uv} + 2f_v f_{uv})}{f_u^2+f_v^2+1}$$

$$= \frac{-f_{uv}(f_u^2+1) + f_v f_u f_{uv}}{(f_u^2+f_v^2+1)^{3/2}}$$

$$\text{从而 } (n_u \wedge n_v)_3 = \det \begin{pmatrix} (n_u)_1 & (n_u)_2 \\ (n_v)_1 & (n_v)_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(f_u^2+f_v^2+1)^3} \left\{ [-f_{uv}(f_u^2+1) + f_u f_v f_{uv}] [-f_{uv}(f_v^2+1) + f_v f_u f_{uv}] \right. \\ \left. - [-f_{uv}(f_u^2+1) + f_u f_v f_{uv}] [-f_{uv}(f_v^2+1) + f_v f_u f_{uv}] \right\}$$

$$= \frac{1}{(f_u^2+f_v^2+1)^3} \left\{ f_{uv} f_{uv} (f_u^2 f_v^2 + f_u^2 + f_v^2 + 1) - f_{uv} (f_u^2+1) f_v f_u f_{uv} \right. \\ - f_{uv} (f_v^2+1) f_u f_v f_{uv} + f_u^2 f_v^2 f_{uv} \\ - f_{uv} (f_u^2 f_v^2 + f_u^2 + f_v^2 + 1) + f_{uv} (f_u^2+1) f_u f_v f_{uv} \\ \left. + f_{uv} (f_v^2+1) f_u f_v f_{uv} - f_u^2 f_v^2 f_{uv} f_{uv} \right\}$$

$$= \frac{1}{(f_u^2+f_v^2+1)^3} \left\{ (f_{uv} f_{uv} - f_{uv}^2) (f_u^2 + f_v^2 + 1) \right\}$$

$$= \frac{f_{uv} f_{uv} - f_{uv}^2}{(f_u^2+f_v^2+1)^2}$$

所以我们得到

$$K(u, v, f(u, v)) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right)^2}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 + 1 \right)^2} \quad (*)$$

这就是我们已提到的，高斯提出的由五个项组成的高斯曲率

的公式！

实际上，我们可以更加仔细地选取参数，使 $\textcircled{4}$ 具有更简洁的形式

首先我们不妨假定，所考虑的点为 $(u, v, f(u, v)) = (0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 0)$ 点

即 $f(0, 0) = 0$.

因此我们在此点处法向量为 $(1, 0, f_u(0, 0)) \wedge (0, 1, f_v(0, 0)) = (-f_u(0, 0), -f_v(0, 0), 1)$

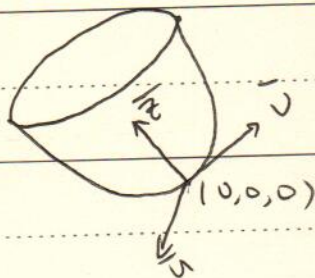
通过重新选取 E^3 中坐标

$\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{z}\}$ 使得

$\bar{u}\bar{v}$ 平面为曲面在 $(0, 0, 0)$

点处切平面 这时曲面

在该点处单位法向量为 $(0, 0, 1)$. (沿 $\bar{z}$ 方向)



设此时参数表示为 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}))$, 我们有

$$\bar{f}_{\bar{u}}(0, 0) = 0, \quad \bar{f}_{\bar{v}}(0, 0) = 0. \quad (\text{因 } (0, 0, 1) = (-\bar{f}_{\bar{u}}, -\bar{f}_{\bar{v}}, 1) \text{ 为法向量})$$

(这也可从 $\bar{z}\bar{v}$ 平面截得曲线与 $\bar{v}$ 轴方向相切看出).

综上, 存在曲面的参数化 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}))$, $\textcircled{4}$ 使

$$\bar{f}_{\bar{u}}(0, 0) = \bar{f}_{\bar{v}}(0, 0) = 0, \quad \bar{f}(0, 0) = 0.$$

$$\text{这样高斯曲率 } K(0, 0, 0) = \frac{\bar{f}_{\bar{u}\bar{u}} \bar{f}_{\bar{v}\bar{v}} - (\bar{f}_{\bar{u}\bar{v}})^2}{(\bar{f}_{\bar{u}}^2 + \bar{f}_{\bar{v}}^2 + 1)^2} (0, 0)$$

$$= (\bar{f}_{\bar{u}\bar{u}} \bar{f}_{\bar{v}\bar{v}} - (\bar{f}_{\bar{u}\bar{v}})^2) (0, 0).$$

82页中讨论的一个更一般的结果如下.

设曲面 M 参数化为 $r = r(u, v)$. 在 P 点处有单位正交切向量 e_1, e_2 . 则存在重新参数化 $(\bar{u}, \bar{v})$, 使

$$r_{\bar{u}}(P) = e_1, \quad r_{\bar{v}}(P) = e_2.$$

证明: 在切平面 $T_P M$ 中, $\{e_1, e_2\}$ 成为一组标准正交基, 故 $\exists \lambda_i, \mu_i$, $i=1, 2$

$$\text{使 } r_u = \lambda_1 e_1 + \mu_1 e_2$$

$$r_v = \lambda_2 e_1 + \mu_2 e_2$$

$$\text{即 } \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad \text{at } P.$$

常值矩阵.

注意 $r_u \wedge r_v \neq 0$ 意味着 r_u, r_v 不共线. 从而 $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ 可逆.

作参数变换 $(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) A$

$$\text{则: } \begin{pmatrix} r_{\bar{u}} \\ r_{\bar{v}} \end{pmatrix}(P) = \begin{pmatrix} r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ r_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + r_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$$

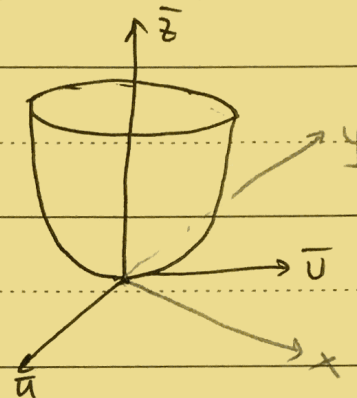
$$= A^{-1} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad \square$$

注意: 一般地, 上述 ^{重新参数化} 只能使 一点 处两个坐标曲线切向量标准正交. 在一个区域内 可 存在重新参数化使处处坐标曲线切向量正交, 但他不到处处都有正交.

下面我们仍设的, 我们可以选取参数化, 使 $\bar{f}_{\bar{u}\bar{v}}(0,0)$ 消失.

这次我们可以通过对 $\bar{u}\bar{v}$ -平面的旋转
得到. $\bar{u}\bar{v}$ -平面上旋转角度 θ 的变换 R_θ
对应矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



曲面可以重新参数化为 $(x, y, \bar{f} \circ R_\theta(x, y))$

其中 $f_\theta(x, y) := \bar{f} \circ R_\theta(x, y) = \bar{f}(x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$

注意: $(0,0,1)$ 仍为法向量, 故 $(f_\theta)_x(0,0) = (f_\theta)_y(0,0) = 0$.

$$(f_\theta)_y(x, y) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} \cdot (-\sin\theta) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}} \cos\theta$$

$$(f_\theta)_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u}^2} (-\sin\theta \cos\theta) + \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} (-\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$+ \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{v}^2} (\sin\theta \cos\theta)$$

$$\text{特别地 } (f_\theta)_{xy}(0,0) = \cos 2\theta \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}}(0,0) + \sin 2\theta \cdot \frac{\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{v}^2}(0,0) - \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u}^2}(0,0)}{2}$$

我们可选取角度 θ_0 使

$$\tan 2\theta_0 = \frac{2 \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}}(0,0)}{\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{v}^2}(0,0) - \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u}^2}(0,0)} \quad \text{如 } \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{v}^2}(0,0) \neq \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u}^2}(0,0)$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{如 } \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{v}^2}(0,0) = \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial \bar{u}^2}(0,0)$$

这样就有 $(f_{\theta_0})_{xy}(0,0) = 0$.

得上, 我们可选到曲面的参数化 $(u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))$.
(我们不妨再起用原来的记号) 使得

$$\begin{cases} f(0, 0) = 0 \\ f_u(0, 0) = 0, \quad f_v(0, 0) = 0 \\ f_{uv}(0, 0) = 0 \end{cases}$$

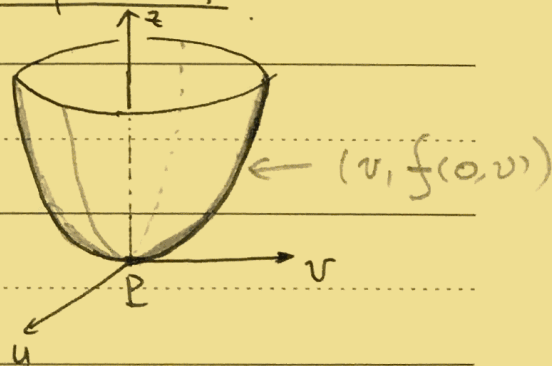
从而高斯曲率为

$$\begin{aligned} K(0, 0, 0) &= K(0, 0, f(0, 0)) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0, 0) \end{aligned}$$

这样高斯曲率在这种参数化选取下, 在 P 点, 简化为两项的乘积!

$$\left[\text{这两项 } \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0, 0) \text{ 是什么?} \right]$$

易见用 v - z 平面截曲面, 得曲线
 $(v, f(0, v))$



回忆第=章, 平面曲线 $r(t) = (x(t), y(t))$

的曲率

$$K(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\star \star)$$

应用到这里, 我们看曲线 $(v, f(0, v))$ 在 $v=0$ 处的曲率为
(即 P 点)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0, 0) !!$$

类似地 u - z 平面截曲面得曲线 $(u, f(u, 0))$, 其 $u=0$ 处曲率为
(即 P 点)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0, 0) !!$$