综上，我们可选到曲面的参数化 $(u,v)\mapsto(u,v,f(u,v))$.
(我们不妨再起用原来的记号) 使得

$$\begin{cases} f(0,0)=0\\ f_u(0,0)=0,\quad f_v(0,0)=0\\ f_{uv}(0,0)=0\end{cases}$$

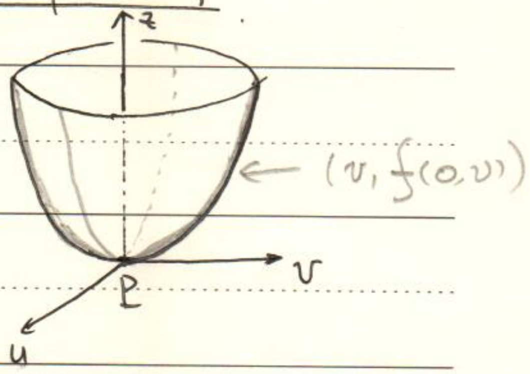
从而高斯曲率为

$$\boxed{\begin{aligned} K(0,0,0) &= K(0,0,f(0,0))\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)\end{aligned}}$$

这样高斯曲率在这种参数化选取下，在P点，简化为两项的乘积！

$$\boxed{\text{这两项}\quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)\quad \text{是什么？}}$$

易见用 v-z 平面截曲面，得曲线
$(v, f(0,v))$



回忆第二章，平面曲线 $r(t)=(x(t),y(t))$
的曲率

$$K(t) = \frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (☆☆)$$

应用到这里，我们看曲线 $(v, f(0,v))$ 在 $v=0$ (即P点) 处的曲率为

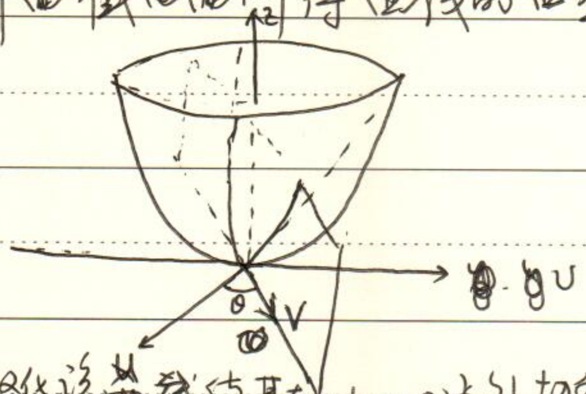
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0)\ !!$$

类似地 u-z 平面截曲面得曲线 $(u, f(u,0))$，其 $u=0$ (即P点) 处曲率为
$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0)$!!

也就是说高斯曲率是上述两条截曲线的曲率的乘积！

这样高斯就把他的曲率和早前 Euler (1760年) 关于曲面曲率的研究联系了起来！

我们早前提到过，Euler 关于曲面在一点处弯曲程度的研究是考察过该点处法线的平面截曲面所得曲线的曲率.



任给曲面在 $(0,0,0)$ 点处的一个单位切向量 V，它和该点处法向量 n 张成一个平面截曲面得一条曲线。参数化该曲线使其在 $(0,0,0)$ 点处切向量为 V. 我们知道，要谈论该曲线的(带符号)曲率，我们需确定该平面的一个定向。这里我们采用 $\{(0,0,0);\ V, n\}$ 给出的定向.

从而称截得曲线在 $(0,0,0)$ 处的曲率 $k_n(V)$ 为曲面在 $(0,0,0)$ 点处沿单位切向量 V 的<u>法曲率</u>

可见 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0) = k_n(\underset{e_1}{\underbrace{(1,0,0)}})$，$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0) = k_n(\underset{e_2}{\underbrace{(0,1,0)}})$

<u>注记</u>. 大家注意，切向量 $-V$ 和 n 张成同一平面. 从而我们得到的曲线参数化时等于由 V, n 所得曲线参数化的反向参数化. 但同时，平面的定向选取由 $\{(0,0,0);\ V,n\}$ 变为 $\{(0,0,0);\ -V,n\}$ 故

$$k_n(V) = k_n(-V).$$

一般地，对任一单位切向量 V，有 θ 使得

$$V = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2 .$$

V, n 平面截得曲线为

$r(t) = (t,\ f(t\cos\theta, t\sin\theta))$

(验证: $r'(0) = (1, \frac{\partial f}{\partial u}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial v}\sin\theta)\Big|_{t=0} = (1, 0)$ 为单位向量 v)

$$\text{故 } k_n(V) = \frac{d^2}{dt^2} f(t\cos\theta, t\sin\theta)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial v}\sin\theta\right)\Big|_{t=0}$$

(recall (✡✡), p.84)

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\sin^2\theta\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \cos^2\theta\, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0) + \sin^2\theta\, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0).$$

也即我们有所有的法曲率 k_n 取值均在 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,0) = k_n(e_1)$ 和 ~~定理 5.1 (Euler)~~ $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,0) = k_n(e_2)$ 之间.

换言之, $k_n(e_1)$, $k_n(e_2)$ 给出法曲率的最大、最小值.

定理 5.1 (Euler) 如果 $k_n(V)$, $V \in T_pM$ 不全相等, 则存在唯一方向由单位向量 V_1 表示, 使 k_n 在 (V_1) 处 达最大值 $k_1 = k_n(V_1)$ (注意 $k_n(V_1) = k_n(-V_1)$, 我们所说方向可由 V_1 或 $-V_1$ 表示), 和唯一方向, 由单位向量 V_2 表示, 使在 V_2 处 k_n 达最小值 $k_2 = k_n(V_2)$. 这两个方向相互垂直。如果单位向量 V 和 V_1 成角为 θ, 我们有

$$k_n(V) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta.$$

证明: 前述讨论已给出. □

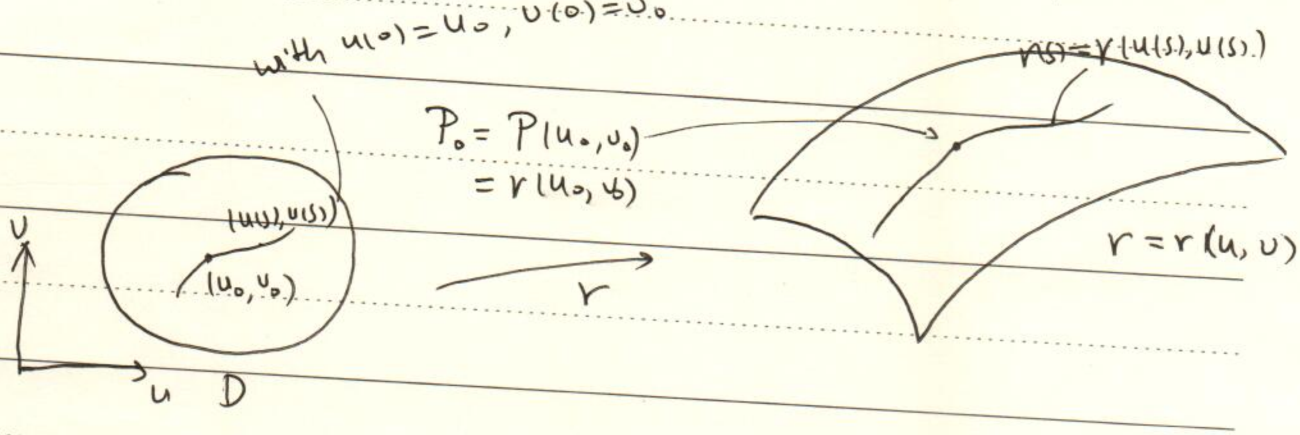
(上述讨论是在一个特殊的参数化下得到的, 法曲率对参数变换保持的依赖关系见下节)

故而我们看到 高斯曲率在一点 P 处的值就是该点处法曲率最大值和最小值的乘积!!

当然上述Euler定理的证明是采用了高斯的证明论证。高斯在他的文章里非常简洁的证明说，他的结论包含了几乎所有由著名的Euler所得的关于曲面的曲率的结果。当然，也把高斯曲率与Euler的研究联系了起来。

§6. 法曲率和第二基本形式

下面我们从另外一个角度来考查曲面在一点处的法曲率。我们来考查曲面上过该点任一曲线的曲率，而不只是法平面截得的曲线。



设 s 为曲线 $r(s) = r(u(s), v(s))$ 的弧长参数，则有

单位切向量 $\dot{r}(0) = \left.\dfrac{dr}{ds}\right|_{s=0} = \left.\left(r_u \dfrac{du}{ds} + r_v \dfrac{dv}{ds}\right)\right|_{s=0}$

曲率向量 $$\ddot{r}(0) = \left.\frac{d^2r}{ds^2}\right|_{s=0} = \left(r_u \frac{d^2u}{ds^2} + r_v \frac{d^2v}{ds^2} + r_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2r_{uv}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + r_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right)\Bigg|_{s=0}$$

可以看出，$\ddot{r}(0)$ 一般不再落在曲面在 P_0 点的切平面内（由 r_u, r_v 张成）。

如果曲线 $r(s)$ 为 P_0 点处一切向量和该点处法向量张成的平面

截曲面所得曲线. 我们有 $\ddot{r}(0)=\frac{d^2r}{ds^2}\Big|_{s=0}$ 与 n 共线. 且同向时, 曲线曲率为正, 反向时为负。

在一般情形, 我们考虑

$$k_n := \langle \frac{d^2r}{ds^2}, n \rangle$$

则特别当 $r(s)$ 为上述截曲线时, k_n 与上节讨论的法曲率概念吻合.

一般地, 计算

$$k_n := \langle r_{uu}, n\rangle \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\langle r_{uv}, n\rangle \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \langle r_{vv}, n\rangle\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

因此 k_n 只和 $\langle r_{uu},n\rangle$, $\langle r_{uv},n\rangle$, $\langle r_{vv},n\rangle$ 以及 $\frac{du}{ds}\Big|_{s=0}$, $\frac{dv}{ds}\Big|_{s=0}$ 有关。注意 $\left(\frac{du}{ds}\Big|_{s=0}, \frac{dv}{ds}\Big|_{s=0}\right)$ 是区域 D 在 $\{u,v\}$ 标架下 曲线 $(u(s),v(s))$ 切向量的坐标, 也是 P_0 点处 曲线 $r(s)$ 的切向量在 $\{r_u, r_v\}$ 标架下的坐标, 这是因为

$$r_u \frac{du}{ds}\Big|_{s=0} + r_v\frac{dv}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}r(s)\Big|_{s=0}$$

(s 弧长参数 $\Rightarrow$ $\dot{r}(0)$ 是单位切向量)

故 k_n 只依赖于 $\underbrace{\langle r_{uu},n\rangle, \langle r_{uv},n\rangle, \langle r_{vv},n\rangle}_{\text{由曲面给定}}$ 和 P_0 点处一个切向量 $\dot{r}(0)$

特别地, k_n 不依赖于曲线 $r(s)$ 的选取, 而由曲面和切向量 $\dot{r}(0)$ 确定

因此, 上述 k_n 即上节讨论的曲率 $k_n(\dot{r}(0))$.

可以看出, $k_n(\dot{r}(0))$, $\dot{r}(0)=\left(\frac{du}{ds}\right)\Big|_{s=0} r_u + \frac{dv}{ds}\Big|_{s=0} r_v$ 是关于单位切向量 $\dot{r}(0)$ 的二次型. 即对任一单位切向量

$$v = \lambda\, r_u(u_0,v_0) + \mu\, r_v(u_0,v_0)$$

我们有法曲率 $k_n(v) = \underset{L}{\langle r_{uu},n\rangle}\lambda^2 + 2\underset{M}{\langle r_{uv},n\rangle}\lambda\mu + \underset{N}{\langle r_{vv},n\rangle}\mu^2$

一般地，对P_0点处一非零切向量 $W=\xi r_u+\eta r_v$，我们可单位化W得

$$\frac{W}{|W|}=\frac{\xi}{|W|}r_u+\frac{\eta}{|W|}r_v$$

从而 $k_n\left(\frac{W}{|W|}\right)=\frac{1}{|W|^2}\left(L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2\right)$

且 $|W|^2=\mathrm{I}(W,W)=E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2$

故我们称曲面在P_0点处沿非零向量$W=\xi r_u+\eta r_v$的法曲率

为 $k_n(W):=k_n\left(\frac{W}{|W|}\right)=\frac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{\underbrace{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}_{\mathrm{I}(W,W)}}$

(特别地，我们又得到 $k_n(-W)=k_n(W)$)

我们可记 $\mathrm{II}(W,W):=L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2$，并称

$$\mathrm{II}=\langle r_{uu},n\rangle dudu+2\langle r_{uv},n\rangle dudv+\langle r_{vv},n\rangle dvdv$$

为曲面的第二基本形式．(回忆这里 $n=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}$ 为单位法向量)

观察到，由n的定义，$\langle r_u,n\rangle=0$，$\langle r_v,n\rangle=0$

求导得：$\langle r_{uu},n\rangle+\langle r_u,n_u\rangle=0$，$\langle r_{uv},n\rangle+\langle r_u,n_v\rangle=0$

$\langle r_{vu},n\rangle+\langle r_v,n_u\rangle=0$，$\langle r_{vv},n\rangle+\langle r_v,n_v\rangle=0$

故而 $L=\langle r_{uu},n\rangle=-\langle r_u,n_u\rangle$

$M=\langle r_{uv},n\rangle=-\langle r_u,n_v\rangle=-\langle r_v,n_u\rangle$

$N=\langle r_{vv},n\rangle=-\langle r_v,n_v\rangle$

从而第二基本形式可写成

$$\begin{aligned}\mathrm{II}&=-\langle r_u,n_u\rangle dudu-(\langle r_u,n_v\rangle+\langle r_v,n_u\rangle)dudv-\langle r_v,n_v\rangle dvdv\\&=-\langle r_udu+r_vdv,\ n_udu+n_vdv\rangle\\&=-\langle dr,dn\rangle\end{aligned}$$

一个自然地问题是曲线在一点处沿一切向量的法曲率是否依赖于参数的选取?以及在 E^3 的合同变换下,法曲率是否变化?

由上述讨论,我们有

$$k_n(W) = \frac{\mathrm{II}(W, W)}{\mathrm{I}(W, W)}$$

故上面的问题归结为第二基本形式 II 如何变化. 我们可以做类似于第一基本形式时的计算讨论. 或直接从一阶微分式的不变性,得到

性质 6.1. 设 $r = r(u,v)$ 和 $r = r(\bar{u},\bar{v})$ 是曲面 M 的两个不同参数表示. 当变换 $(u,v) \to (\bar{u},\bar{v})$ 是同向参数变换时,第二基本形式不变 $(\mathrm{II}(u,v) = \mathrm{II}(\bar{u},\bar{v}))$;当变换 $(u,v) \to (\bar{u},\bar{v})$ 是反向参数变换时,第二基本形式变号 $(\mathrm{II}(u,v) = -\mathrm{II}(\bar{u},\bar{v}))$.

证明:由 $\mathrm{II}(u,v) = -\langle dr(u,v), dn(u,v)\rangle$.

当参数变换同向时,我们有 $n(u,v) = n(\bar{u},\bar{v})$. 利用一阶微分形式不变性,我们得到 $\mathrm{II}(u,v) = \mathrm{II}(\bar{u},\bar{v})$.

当参数变换反向时,我们有 $n(u,v) = -n(\bar{u},\bar{v})$,利用一阶微分形式不变性,我们得到 $\mathrm{II}(u,v) = -\mathrm{II}(\bar{u},\bar{v})$. □

性质 6.2 设 M 是一正则曲面(片), $r = r(u,v)$ 是其参数表示. 设 T 是 E^3 的一个合同变换,则曲面 $\tilde{M}$: $\tilde{r}(u,v) = T \circ r(u,v)$ 的第二基本形式 $\tilde{\mathrm{II}}$ 和 M 的第二基本形式 II 的关系如下:

- 当 T 是刚体运动时, $\tilde{\mathrm{II}}(u,v) = \mathrm{II}(u,v)$
- 当 T 是反向刚体运动时, $\tilde{\mathrm{II}}(u,v) = -\mathrm{II}(u,v)$.

证明：设 $T(P) = P\cdot T + P_0$，$\forall P \in E^3$.（正交阵）

由于 $\tilde{r}_u = r_u\cdot T$，$\tilde{r}_v = r_v\cdot T$. 得

$$\tilde{r}_u \wedge \tilde{r}_v = (r_u\cdot T)\wedge(r_v\cdot T) = \begin{cases} (r_u\wedge r_v)\cdot T, & \text{if } \det T = 1 \\ -(r_u\wedge r_v)\cdot T & \text{if } \det T = -1. \end{cases}$$

因而 $\tilde{n} = \mathrm{sgn}(\det T)\, n\cdot T$.

另注意到 $d\tilde{r} = \tilde{r}_u\cdot du + \tilde{r}_v\, dv = (r_u du + r_v dv)\cdot T = dr\cdot T$.

我们有 $\tilde{\mathrm{II}} = -\langle d\tilde{r}, d\tilde{n}\rangle = -\mathrm{sgn}(\det T)\langle dr\cdot T, dn\cdot T\rangle$

$$= -\mathrm{sgn}(\det T)\langle dr, dn\rangle = -\mathrm{sgn}(\det T)\,\mathrm{II}. \ \square$$

故而，回到法曲率，我们有法曲率在同向参数变换和（同向）刚体运动下保持不变，在反向参数变换或反向刚体运动下反向.

事实. 注意到高斯曲率是两个法曲率乘积，故在参数变换和 E^3 合同变换下保持不变。

例子. 例 6.1（平面） $r(u,v) = (u, v, c)$，c 常数

有 $r_u = (1,0,0)$，$r_v = (0,1,0) \Rightarrow n = (0,0,1)$

从而 $\mathrm{II} = -\langle dn, dr\rangle = 0$.

从而平面沿任意方向的法曲率为 0.

例 6.2（柱面） $r(u,v) = (x(u), y(u), v)$

其中 $(x(u), y(u))$ 为平面曲线，u 为其弧长参数，i.e. $x_u^2+y_u^2=1$.

从而 $r_{uu} = (x_{uu}, y_{uu}, 0)$

$$r_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$r_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$n = \frac{(x_u, y_u, 0) \wedge (0, 0, 1)}{|(x_u, y_u, 0) \wedge (0, 0, 1)|} = (y_u, -x_u, 0)$$

从而 $M = N = 0$，$L = \langle r_{uu}, n \rangle = x_{uu} y_u - y_{uu} x_u$

故 $\mathrm{II} = -\underbrace{(-x_{uu} y_u + x_u y_{uu})}_{\text{是平面曲线 } (x(u), y(u)) \text{ 的曲率}} du\, du$

特别当 $(x(u), y(u)) = (a\cos\frac{u}{a}, a\sin\frac{u}{a})$ 为~~平面曲线~~半径为 a 的圆时，曲率为 $\frac{1}{a}$，$\mathrm{II} = -\frac{1}{a} du\, du$.

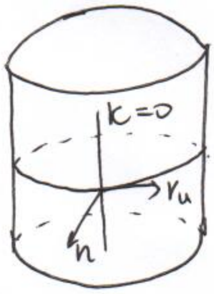
回忆柱面第一基本形式为 $\mathrm{I} = du\, du + dv\, dv$

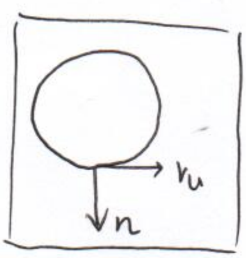
~~故对任意~~ 注意到 $r_u = (x_u, y_u, 0)$，$r_v = (0, 0, 1)$ 标准正交.

任一单位切向量 w 可写成 $w = \cos\theta\, r_u + \sin\theta\, r_v$.

(θ 为 w 与 r_u 的夹角)

法曲率 $k_n(w) = \dfrac{\mathrm{II}(w,w)}{\mathrm{I}(w,w)} = \dfrac{-\frac{1}{a}\cos^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = -\frac{1}{a}\cos^2\theta$





曲率 $-\frac{1}{a}$

高斯曲率为 $-\frac{1}{a} \cdot 0 = 0$.

例163 (球面) 半径 $a > 0$. 回忆球坐标下

$$r(\theta, \varphi) = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta) \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \varphi < 2\pi$$

第一基本形式 $\mathrm{I}(\theta, \varphi) = a^2(d\theta\, d\theta + \cos^2\theta\, d\varphi\, d\varphi)$

$$r_\theta = (-a\sin\theta\cos\varphi,\ -a\sin\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta)$$
$$r_\varphi = (-a\cos\theta\sin\varphi,\ a\cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$r_\theta \wedge r_\varphi = (-a^2\cos^2\theta\cos\varphi,\ -a^2\cos^2\theta\sin\varphi,\ -a^2\sin\theta\cos\theta)$$

$$|r_\theta \wedge r_\varphi|^2 = a^4\cos^2\theta$$

注意 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时 $\cos\theta > 0$，我们有

$$n = \frac{r_\theta \wedge r_\varphi}{|r_\theta \wedge r_\varphi|} = (-\cos\theta\cos\varphi,\ -\cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$$r_{\theta\theta} = (-a\cos\theta\cos\varphi,\ -a\cos\theta\sin\varphi,\ -a\sin\theta)$$
$$r_{\theta\varphi} = (a\sin\theta\sin\varphi,\ -a\sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$
$$r_{\varphi\varphi} = (-a\cos\theta\cos\varphi,\ -a\cos\theta\sin\varphi,\ 0)$$

所以有 $L = \langle r_{\theta\theta}, n\rangle = a\cos^2\theta\cos^2\varphi + a\cos^2\theta\sin^2\varphi + a\sin^2\theta$
$= a$

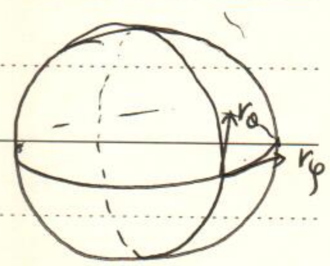
$M = \langle r_{\theta\varphi}, n\rangle = -a\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + a\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi$
$= 0$

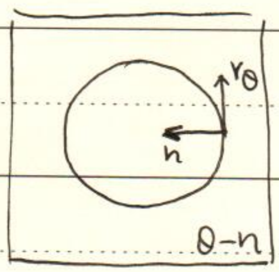
$N = \langle r_{\varphi\varphi}, n\rangle = a\cos^2\theta\cos^2\varphi + a\cos^2\theta\sin^2\varphi$
$= a\cos^2\theta$

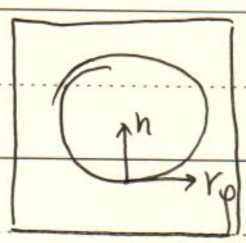
球面在球坐标参数下的第二基本形式

$$\mathrm{II} = a(d\theta d\theta + \cos^2\theta\, d\varphi d\varphi)$$

从而沿任何一个方向的法曲率为 $\frac{1}{a}$







高斯曲率为 $\frac{1}{a^2}$.

例6.4 二次曲面 $z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$

参数表示 $r(x,y)=(x,y,\frac{1}{2}(ax^2+by^2))$

故有 $r_x=(1,0,ax)$, $r_y=(0,1,by)$

因此 $E=\langle r_x,r_x\rangle=1+a^2x^2$, $G=\langle r_y,r_y\rangle=1+b^2y^2$

$F=abxy$.

第一基本形式 $\mathrm{I}=(1+a^2x^2)\,dxdx+2abxy\,dxdy+(1+b^2y^2)\,dydy$.

$$\left.\begin{aligned} r_x\wedge r_y &= (-ax,-by,1) \\ |r_x\wedge r_y|^2 &= a^2x^2+b^2y^2+1. \end{aligned}\right\} \Rightarrow n=\frac{r_x\wedge r_y}{|r_x\wedge r_y|}=\frac{(-ax,-by,1)}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}$$

进一步计算 $r_{xx}=(0,0,a)$, $r_{xy}=(0,0,0)$

$r_{yy}=(0,0,b)$

第二基本形式 $\mathrm{II}=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}(a\,dxdx+b\,dydy)$

曲面在一点P沿任一单位切向量 $V=\lambda r_x+\mu r_y$ 的法曲率为

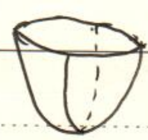
$$k_n(V)=\frac{\mathrm{II}(V,V)}{\mathrm{I}(V,V)}=\frac{a\lambda^2+b\mu^2}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}$$

特别地 $k_n(V)$ 的符号与 $a\lambda^2+b\mu^2$ 的符号相同

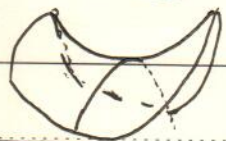
$ab>0$: k_n 均同时为正或为负

$ab<0$: $k_n(V)=0$ 有两个线性无关解

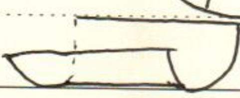
$ab=0$ (a,b不全为零) : $k_n(V)=0$ 有一个解



椭圆抛物面



双曲抛物面



抛物柱面.

注意 $\det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}=LN-M^2=ab$