命题 8.2：对曲面M的任意单位切向量V，曲面沿V的法曲率可表为 $k_n(V)=\mathrm{II}(V,V)=\langle W(V),V\rangle$.

证明：设参数化为 $r=r(u,v)$，$V=\lambda r_u+\mu r_v$.

则
$$\begin{aligned}\langle W(V),V\rangle &= -\langle \lambda n_u+\mu n_v,\ \lambda r_u+\mu r_v\rangle\\ &= -\langle n_u,r_u\rangle\lambda^2-\cancel{2}(\langle n_u,r_v\rangle+\langle n_v,r_u\rangle)\lambda\mu\\ &\quad -\mu^2\langle r_v,n_v\rangle\\ &=\lambda^2 L+2\lambda\mu M+\mu^2 N\\ &=\mathrm{II}(V,V)=k_n(V).\end{aligned}$$
□

定理 8.3. Weingarten变换是曲面切平面到自身的自共轭变换，即 $\forall\ V,W\in T_pM$，有

$$\langle W(V),W\rangle=\langle V,W(W)\rangle.$$

证明：设 $V=\lambda r_u+\mu r_v$，$W=\xi r_u+\eta r_v$ 为P点处两个切向量，则

$$\begin{aligned}\langle W(V),W\rangle &= \langle -\lambda n_u-\mu n_v,\ \xi r_u+\eta r_v\rangle\\ &= -\lambda\xi\langle n_u,r_u\rangle-\lambda\eta\langle n_u,r_v\rangle-\mu\xi\langle n_v,r_u\rangle-\mu\eta\langle n_v,r_v\rangle.\end{aligned}$$

因为 $\langle r_u,n\rangle=0 \Rightarrow \langle r_{uv},n\rangle=-\langle r_u,n_v\rangle$

$$\|$$

$\langle r_v,n\rangle=0 \Rightarrow \langle r_{vu},n\rangle=-\langle r_v,n_u\rangle$

即 $\langle r_u,n_v\rangle=\langle r_v,n_u\rangle$

故
$$\begin{aligned}\langle W(V),W\rangle &\cancel{=-\langle\lambda r_u,\xi n_u\rangle},\\ &=-\langle \lambda r_u+\mu r_v,\ \xi n_u+\eta n_v\rangle\\ &=\langle V,W(W)\rangle.\end{aligned}$$
□

Julius Weingarten (1836–1910) a German mathematician. He received his doctorate in 1864 from Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg.

J. Weingarten (1861). "Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen". Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. 59: 382–393.

由于Weingarten变换是一个自共轭变换，由线性代数理论知，它的两个特征值是实数. 给定一点P处，设k是Weingarten变换 $W: T_pM \to T_pM$ 的一个特征值，设V是相应单位特征向量.

则 $\langle W(V), V\rangle = \langle kV, V\rangle = k\langle V, V\rangle = k$

$= k_n(V)$

即特征值k是曲面沿相应特征向量方向的法曲率！(normal curvature)

我们称Weingarten变换在P点的两个特征值为曲面在P点的主曲率 (principle curvature)
特征值对应的两个特征方向称为曲面在P点的主方向.

- 当两个特征值不等时，相应两个主方向完全确定且相互正交
- 当两个特征值相等时，主方向不能唯一确定. 该点处任一方向均为主方向.

自然的问题：这里的主曲率是否就是先前讨论的一点处法曲率的极值？

Yes!

给定曲面 M 上一点 $P\in M$. 取 e_1, e_2 为曲面 M 在 P 点的主方向，则 $\{e_1, e_2\}$ 构成 T_pM 的单位正交基

依定义，我们有 $W(e_i) = k_i e_i,\ i=1,2.$

这时，对任意的单位切向量 $V\in T_pM$，若记 V 与 e_1 夹角为 θ，则可写 $V = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$

从而可计算 $k_n(V) = \langle W(V), V\rangle$

$$= \langle \cos\theta\cdot k_1 e_1 + \sin\theta\cdot k_2 e_2,\ \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2\rangle$$

$$= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

故 k_1, k_2 确为法曲率的两个极值

这就用 Weingarten 变换的语言，~~重~~新证明了 Euler 定理

由前述的讨论，我们知道高斯曲率 $K(P) = k_1 k_2$

把 $H = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$ 称为曲面在 P 点处的平均曲率.

回忆 平面的平均曲率 $H=0$，但柱面的平均曲率 $\neq 0$!!

高斯曲率的第二种计算公式

下面我们利用高斯曲率是 Weingarten 变换的两个特征值乘积这一事实来推导 Gauss 曲率的显示表达式

为此目的，我们先来求 Weingarten 变换在切平面的一组基下的矩阵表示.

我们就取坐标切向量构成的基 $\{r_u, r_v\}$.

$$W\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W(r_u) \\ W(r_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_u \\ -n_v \end{pmatrix}$$

设矩阵表示为 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则有：

$$\begin{pmatrix} -n_u \\ -n_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a r_u + b r_v \\ c r_u + d r_v \end{pmatrix} \qquad (*)$$

取 $-n_u$ 与 r_u 的内积有 $\quad L = aE + bF \quad (1)$

$-n_u$ 与 r_v 的内积有 $\quad M = aF + bG \quad (2)$

取 $-n_v$ 与 r_u 的内积有 $\quad M = cE + dF \quad (3)$

$-n_v$ 与 r_v 的内积有 $\quad N = cF + dG \quad (4)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

解 (1)+(2) 得

$$\left.\begin{aligned} LG &= aEG + bFG \\ MF &= aF^2 + bGF \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{LG - MF}{EG - F^2}$$

$$\left.\begin{aligned} LF &= aEF + bF^2 \\ ME &= aFE + bGE \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = \frac{LF - ME}{F^2 - GE} = \frac{ME - LF}{EG - F^2}$$

解 (3)+(4) 得

$$\left.\begin{aligned} MG &= cEG + dFG \\ NF &= cF^2 + dGF \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = \frac{MG - NF}{EG - F^2}$$

$$\left.\begin{aligned} MF &= cEF + dF^2 \\ NE &= cFE + dEG \end{aligned}\right\} \Rightarrow d = \frac{NE - MF}{EG - F^2}$$

或直接由 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{EG-F^2}$ 得到

故有

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} LG-MF & ME-LF \\ MG-NF & NE-MF \end{pmatrix}.$$

故而高斯曲率 $K(P) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的个特征值乘积

$$= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\Big((LG-MF)(NE-MF) - (MG-NF)(ME-LF)\Big)$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(LNGE + M^2F^2 - M^2GE - NLF^2\right)$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2}(EG-F^2)(LN-M^2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K(P) = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} \quad (\star\star)}$$

平均曲率 $H(P) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}.$$

注记 由 (※) (page 102)，我们有

$$n_u \wedge n_v = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} r_u \wedge r_v = k_1 k_2\, r_u \wedge r_v.$$

这就重新证明了高斯曲率是两个主曲率之乘积.
之前我们也是在一个特别之参数化基本下证明的.

§9. 高斯绝妙定理.

利用公式 $(\star\star)$，我们可以得下面的结论，这可能是初看起来，看"丑陋"的定理，但事实上，它将导出本课程之高潮：高斯绝妙定理 (Theorema Egregium 拉丁语)。因为，虽然 $(\star\star)$ 说 $K(P)$ 可以第一和第二基本形式计算得出，但下面之计算说明，只须第一基本形式就可以计算 $K(P)$ 了!!

~~由~~定理9.1. 设曲面M在P点附近有参数表示. $r = r(u,v)$.

则:

$$4(EG-F^2)^2K(P) = E\left(E_vG_v - 2F_uG_v + (G_u)^2\right)$$

$$+F\left(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u\right)$$

$$+G\left(E_uG_u - 2E_uF_v + (E_v)^2\right)$$

$$-2(EG-F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}).$$

Corollary (THEOREMA EGREGIUM) 曲面的高斯曲率K只与曲面的第一基本形式有关

证明. 我们从计算公式 $K(P) = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$ 开始, 目标是把 L, N, M 替掉. 由定义

$$L = \langle r_{uu}, n\rangle = \left\langle r_{uu}, \frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}\right\rangle$$

$$= \left\langle r_{uu}, \frac{r_u\wedge r_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\begin{pmatrix} - r_{uu} - \\ - r_u - \\ - r_v - \end{pmatrix}$$ (每个 r_{uu}, r_u, r_v 看作行向量)

类似地, $M = \langle r_{uv}, n\rangle = \left\langle r_{uv}, \dfrac{r_u\wedge r_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\begin{pmatrix} r_{uv} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix}$

$$N = \langle r_{vv}, n\rangle = \left\langle r_{vv}, \frac{r_u\wedge r_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\det\begin{pmatrix} r_{vv} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix}$$

因此 $K(P)(EG-F^2)^2 = (LN-M^2)(EG-F^2)$

$$= \det\begin{pmatrix} r_{uu} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} r_{vv} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} r_{uv} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} r_{uv} \\ r_u \\ d_v \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} - r_{uu} - \\ - r_u - \\ - r_v - \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ r_{vv}^t & r_u^t & r_v^t \\ | & | & | \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} r_{uv} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} r_{uv}^t & r_u^t & r_v^t \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} r_{uu} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix}\left(r_{vv}^t \ r_u^t \ r_v^t\right)\right) - \det\left(\begin{pmatrix} r_{uv} \\ r_u \\ r_v \end{pmatrix}\left(r_{uv}^t \ r_u^t \ r_v^t\right)\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle & \langle r_{uu}, r_u\rangle & \langle r_{uu}, r_v\rangle \\ \langle r_u, r_{vv}\rangle & E & F \\ \langle r_v, r_{vv}\rangle & F & G \end{pmatrix}$$

$$- \det\begin{pmatrix} \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle & \langle r_{uv}, r_u\rangle & \langle r_{uv}, r_v\rangle \\ \langle r_u, r_{uv}\rangle & E & F \\ \langle r_v, r_{uv}\rangle & F & G \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle - \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle & \overset{\frac{1}{2}E_u}{\langle r_{uu}, r_u\rangle} & \langle r_{uu}, r_v\rangle \\ \langle r_u, r_{vv}\rangle & E & F \\ \underset{\frac{1}{2}G_v}{\langle r_v, r_{vv}\rangle} & F & G \end{pmatrix}$$

$$- \det\begin{pmatrix} 0 & \overset{\frac{1}{2}E_v}{\langle r_{uv}, r_u\rangle} & \overset{\frac{1}{2}G_u}{\langle r_{uv}, r_v\rangle} \\ \langle r_u, r_{uv}\rangle & E & F \\ \langle r_v, r_{uv}\rangle & F & G \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{aligned} \langle r_{uu}, r_v\rangle &= \left(\langle r_u, r_v\rangle\right)_u - \langle r_u, r_{vu}\rangle \\ &= F_u - \frac{1}{2}E_v \\ \langle r_u, r_{vv}\rangle &= \left(\langle r_u, r_v\rangle\right)_v - \langle r_{uv}, r_v\rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u \end{aligned}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle - \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix}$$

$$- \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}$$

~~由~~ 故，只剩下 $\langle r_{uu}, r_{vv}\rangle - \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle$

$$\left(\langle r_{uu}, r_v\rangle\right)_v = \langle r_{uuv}, r_v\rangle + \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle \qquad (上)$$

$$= \left(F_u - \tfrac{1}{2}E_v\right)_v$$

$$= F_{uv} - \tfrac{1}{2}E_{vv}$$

$$\left(\langle r_{uv}, r_v\rangle\right)_u = \langle r_{uvu}, r_v\rangle + \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle \qquad (下)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}G_u\right)_u$$

$$(上) - (下) \Rightarrow -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} = \langle r_{uu}, r_{vv}\rangle - \langle r_{uv}, r_{uv}\rangle$$

从而
$$K(P)\,(EG-F^2)^2 = \det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{pmatrix}$$

$\square$

Gauss绝妙定理是微分几何学发展过程中里程碑意义的结果。Gauss的这个惊人发现，使研究抽象的具有第一基本形式的曲面成为可能。在平面区域D上，定义一个正定的对称二次微分式，记为ds^2，我们就可以研究这样一张抽象曲面的弯曲。

专门研究曲面上由其第一基本形式决定的几何学称为曲面的内蕴几何学 (intrinsic geometry)。后来，Riemann 1854发扬Gauss的思想，提出了高维内蕴几何学，可看作在高维空间区域上给定"正定对称的二次微分式"，然后研究其弯曲性质。也即现在所说 Riemannian geometry.