上次课有同学问为什么自共轭变换的两个特征值不相等时两个特征向量相互垂直？

设 $\mathcal{W}$ 为一个自共轭变换，特征值为 k_1, k_2, $k_1 \neq k_2$. 其特征向量为 v_1, v_2, i.e. $\mathcal{W}(v_1)=k_1 v_1$, $\mathcal{W}(v_2)=k_2 v_2$.

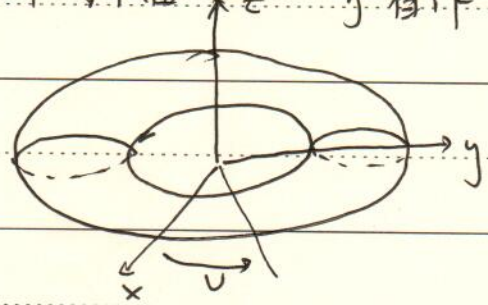
则有 $k_1\langle v_1, v_2\rangle = \langle k_1 v_1, v_2\rangle = \langle \mathcal{W}(v_1), v_2\rangle$

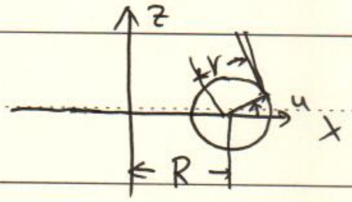
$= \langle v_1, \mathcal{W}(v_2)\rangle = \langle v_1, k_2 v_2\rangle = k_2\langle v_1, v_2\rangle$

从而 $k_1 \neq k_2$ 意味着 $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

前面的讨论已经揭示了研究(抽象)曲面内蕴几何的可能性.
下面,我们讨论一个抽象曲面的例子. flat torus.

回忆下环面 i.e. 可看作 x-z 平面上一个圆绕 z 轴旋转而成





$$r(u,v) = \big((R+r\cos u)\cos v,\ (R+r\cos u)\sin v,\ r\sin u\big)$$

$$0<u<2\pi,\quad 0<v<2\pi.$$

易见 $r_u = (-r\sin u\cos v,\ -r\sin u\sin v,\ r\cos u)$

$r_v = \cancel{(-r\cos u\sin v,}\ (-(R+r\cos u)\sin v,\ (R+r\cos u)\cos v,\ 0)$

从而 $E = \langle r_u, r_u\rangle = r^2\sin^2 u\cos^2 v + r^2\sin^2 u\sin^2 v + r^2\cos^2 u = r^2$

$F = \langle r_u, r_v\rangle = (R+r\cos u)\,r\sin u\sin v\cos v - (R+r\cos u)\,r\sin u\sin v\cos v$

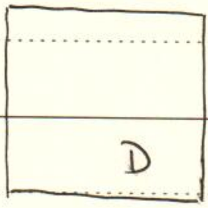
$= 0$

$G = \langle r_v, r_v\rangle = (R+r\cos u)^2$

第一基本形式 $I = r^2\,du\,du + (R+r\cos u)^2\,dv\,dv$

作业：计算其高斯曲率和平均曲率.

我们也可以考虑一个"抽象"的环面. 我们就在 E^2 中的区域
$D=\{(u,v) \mid 0<u<2\pi,\ 0<v<2\pi\}$ 上附一个第一基本形式



$$I = du\,du + dv\,dv.$$

我们有知道这样的环面高斯曲率为0. 称为平坦环面(flat torus). 它与平面局部等距的.

实际上, 不存在 C^2 的 flat torus 到 E^3 的嵌入。但存在 C^1 的 flat torus 到 E^3 的嵌入。(Nash – Kuiper theorem)

Nash, "C^1-isometric imbeddings", Annals of Mathematics, 60(3). 1954 383–396.
Kuiper, "On C^1-isometric imbeddings I", Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 58, 1955 545–556.

直到 2012 四月这样的 C^1 嵌入的构造才被找到!!
(Borrelli, Jabrane, Lazarus, Thibert, "Flat tori in three dimensional space and convex integration", Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS), April 2012.)

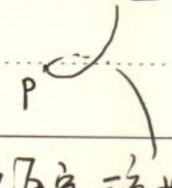
我们把内蕴几何的讨论且放下不表。曲面的"外蕴"几何当然也很重要. 研究外蕴几何我们由第二章曲线几何的研究可供借鉴。

§10 曲面的局部外蕴几何：椭圆点、双曲点、抛物点、平点

我们以曲线几何的研究为借鉴。（注意曲线的内蕴几何平凡）回忆第二章的讨论有以下三个要点：

i) 取弧长参数时，曲线 $c(s)$ 满足 $|\dot{c}(s)|=1$，且此时曲率 κ，挠率 τ 有较简洁的计算公式.

ii) 曲线在一点处的曲率 κ，挠率 τ 给出了该点处的近似曲线



(iii) 由曲线每点处的曲率、挠率唯一确定该曲线（不区别 E^3 中的刚体运动）（曲线论基本定理）

对曲面，我们自然地问相应的问题。容易看到曲线的 $c(t)$ 的切向量长度函数 $t \mapsto |c'(t)|$ 相对于曲面的第一基本形式. 对曲线情形，我们有一个方便的参数选取：弧长参数，使切向量长度始终为1. 但对曲面的第一基本形式而言，我们并没有这样类似地方便的参数选取。故而在曲面外蕴几何讨论中，第一基本形式始终发挥作用.

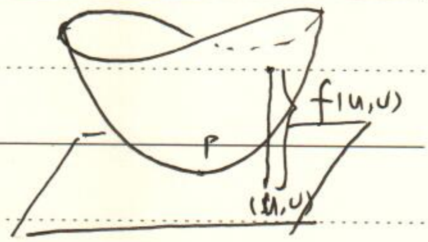
曲线在一点处的外蕴几何由 κ, τ 描述。故而自然地，对曲面而言，相对应的是其第二基本形式. 这将是我们这节要着力讨论的内容.

相应于 (iii)，且基于上面观察到的对应，一个自然的问题是：在相差 E^3 中一个刚体运动的意义下，每点处的第一基本形式和第二基本形式是否唯一确定曲面？这相当于曲面论的基本定理。回忆曲线论情形是通过研究 Frenet 标架的运动方程证明的。我们将看到，在曲面上也可研究标架的运动方程并证明曲面论基本定理。这就是所谓活动标架法。将是第四章要讨论的内容.

在这一节中，我们就对相应于(iii)的曲面几何之研究作详细讨论。

回忆§7中我们解释了曲面的第二基本形式的系数矩阵 $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ 是高度函数的Hessian阵.

$$f(u,v) = \langle r(u,v) - \underset{= p}{r(u_0,v_0)},\ n(u_0,v_0) \rangle$$



不妨设 $p=(0,0,0)\in E^3$，且 u-v 平面是曲面在p点的切平面. 从而~~曲面在p点局部~~ $f(u,v)$ 即是点 $r(u,v)\in E^3$ 到切平面的距离，~~$p=r(u$~~ $(u_0,v_0)=(0,0)$，$f(0,0)=0$.

故而曲面在p点局部可表为 $r(u,v)=(u,v,f(u,v))$.

~~回忆 $f_{u}(0,$~~ 观察到这个参数表示满足

$$f_u(0,0) = \langle r_u(0,0), n(0,0)\rangle = 0$$

$$f_v(0,0) = \langle r_v(0,0), n(0,0)\rangle = 0$$

从而我们有 $\left.\begin{aligned} r_u &= (1,0,f_u(0,0)) = (1,0,0) \\ r_v &= (0,1,f_v(0,0)) = (0,1,0) \end{aligned}\right\}$ 相互正交

由Taylor展开得

$$f(u,v) = \overset{=0}{f(0,0)} + (\overset{=0}{f_u(0,0)u + f_v(0,0)v})$$
$$+ \frac{1}{2}\left(f_{uu}(0,0)\cdot u^2 + 2f_{uv}(0,0)uv + f_{vv}(0,0)v^2\right) + o(u^2+v^2)$$

因此我们得到曲面在点p的一个二阶近似曲面

$$\left(u, v, \frac{1}{2}\left(f_{uu}(0,0)\cdot u^2 + 2f_{uv}(0,0)uv + f_{vv}(0,0)v^2\right)\right).$$

这是一个二次曲面！ $= \left(u, v, \frac{1}{2}(Lu^2+2Muv+Nv^2)\right)$

另一方面，我们知道p点处曲面有两个~~正交~~单位正交主方向，记为 e_1, e_2. 经过旋转可重新参数化曲面 $r=r(\bar{u},\bar{v})$，使

$$r_{\bar{u}}(0,0)=e_1,\quad r_{\bar{v}}(0,0)=e_2$$

~~有答便是~~ 从而我们有

在P点处：$L=\langle r_{\bar u\bar u}, n\rangle = -\langle r_{\bar u}, n_{\bar u}\rangle = \langle r_{\bar u}, -n_{\bar u}\rangle$
$= \langle e_1, \mathcal{W}(e_1)\rangle = k_1$

$M=\langle r_{\bar u\bar v}, n\rangle = -\langle r_{\bar v}, n_{\bar u}\rangle = \langle r_{\bar v}, -n_{\bar u}\rangle$
$= \langle e_2, \mathcal{W}(e_1)\rangle = k_1\langle e_2, e_1\rangle = 0$

$N=\langle r_{\bar v\bar v}, n\rangle = -\langle r_{\bar v}, n_{\bar v}\rangle = \langle r_{\bar v}, -n_{\bar v}\rangle$
$= \langle e_2, \mathcal{W}(e_2)\rangle = k_2$

从而P点处的二阶近似曲面可参数化为

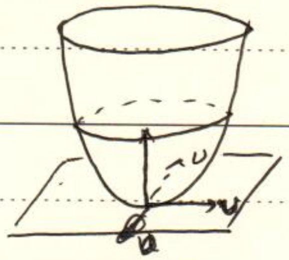
$(\bar u, \bar v, \frac{1}{2}(k_1\bar u^2 + k_2\bar v^2))$， k_1, k_2为曲面在P点处的主曲率

这个二次曲面的形状我们在例6.4中讨论过了。我们从那里的讨论知道，这个近似曲面的形状依赖于k_1k_2的符号.

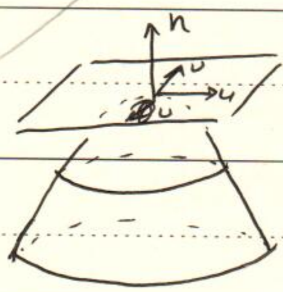
注意到 $k_1k_2 = \det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}$ 是不依赖于参数变换 ~~而后者是~~ 和E^3的合同变换的！依照 $\det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix}$的符号，P点的局部形状可被划分为如下四类：

(1) 椭圆点 (elliptic point)：$\det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix} = LN-M^2 > 0$

这时该点处的二阶近似曲面是一个椭圆抛物面 (elliptic paraboloid)



$k_1>0, k_2>0$



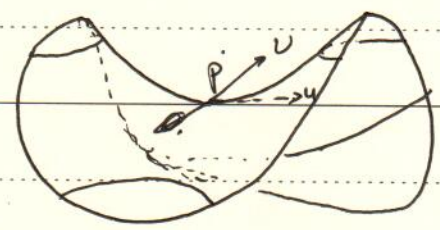
$k_1<0, k_2<0$

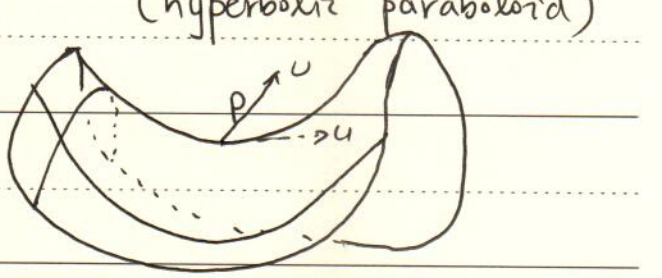
解释：平行于切平面 u-v 平面的平面截曲面得相似的椭圆曲线. 平行于其它坐标平面的平面截曲面得到抛物线 (parabola)

(2) 双曲点 (hyperbolic point)：$\det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N\end{pmatrix} = LN-M^2 < 0$.

例如 $k_1>0$, $k_2<0$ 时，
这时曲面是函数 $f(u,v)=\frac{1}{2}(k_1u^2+k_2v^2)=\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{k_1}}\right)^2}-\frac{v^2}{\left(\sqrt{-\frac{2}{k_2}}\right)^2}$
的图像。

即此时该点处的二次近似曲面为一个双曲抛物面
(hyperbolic paraboloid)





用平行于切平面 uv平面的平面截得双曲线 (hyperbola)

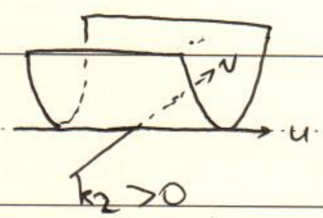
用平行于其它坐标平面的平面截得抛物线 (parabola)，注意开口方向不同.

特别地：用切平面 uv平面去截得 $\frac{1}{2}(k_1u^2+k_2v^2)=0$

$$\Rightarrow u^2=-\frac{k_2}{k_1}v^2 \Rightarrow u=\pm\sqrt{-\frac{k_2}{k_1}}\,v$$

即截得两条过原点 p 的直线!!

(3) 抛物点 (parabolic point) $\det\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}=0$ 但 L, M, N 不全为0.
这时候 $\begin{pmatrix}L&M\\M&N\end{pmatrix}$ 有一个0特征值，一个非零特征值
不妨设 $k_1=0$, $k_2\neq0$. 则该点处近似曲面是
$f(u,v)=\frac{1}{2}k_2v^2$
的图像



抛物柱面 (parabolic cylinder)

(※)

平行于切平面 (uv平面) 的平面截得两条平行线
平行于其它坐标平面的平面截得抛物线.

注记：可以想见，用平行于坐标平面的平面去截原曲面（而非近似曲面），截得的曲线可归类于上述情形，当平面在充分靠近P点处截时。（当然我们还有一种情况未讨论；我们这里不去讨论这个的平坦情况）

有一种直观我们可验证：

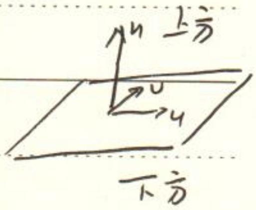
· 椭圆点附近，当对所有充分靠近的点均在P点切平面的一侧。
  由前述曲面是这样的点的图像：高度函数 $f(u,v)+o(u^2+v^2)$
  而 $f(u,v)=\frac{1}{2}(k_1u^2+k_2v^2)>0$

· 双曲点附近，对充分靠近的点会出现在P点切平面的两侧。

对抛物点，近似曲面在切平面的一侧，但原曲面充分靠近P点的点却可出现在切平面的两侧：例如

$$(u,v,\ u^3+v^2)$$

当 $\frac{|u|}{|v|}$ 很大时，$u<0$ 时，点可在 u-v 平面下方。



当然从另一个角度讲，P点附近任意小的邻域内，均存在点在切平面 u-v 平面的上方。

(4) 平点：$L=M=N=0$.　　(planar point)
这时近似曲面是 u-v 平面。

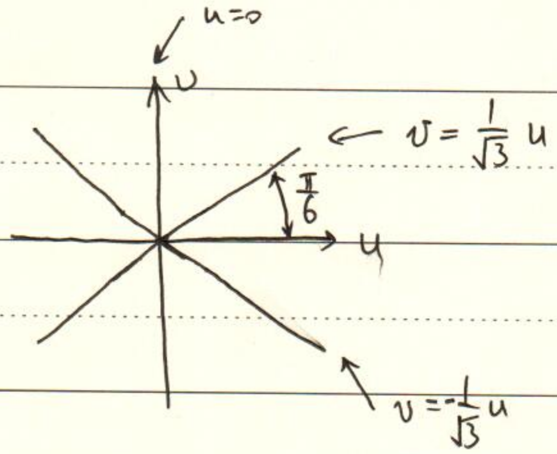
对这种点，原曲面的点可在切平面的两侧，且情况比抛物点更为复杂。我们这里讨论一个例子。

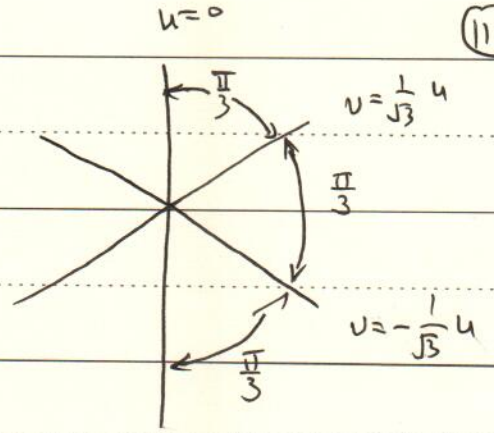
例 10.1 (monkey saddle)

函数 $f(u,v)=u^3-3uv^2$ 的图像

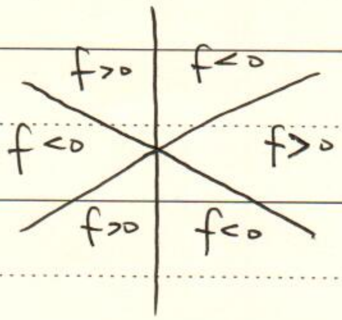
我们看 uv 平面截曲面 (u,v,u^3-3uv^2) 得 $u^3=3uv^2$.

这是三条直线 $u=0$, $u=\pm\sqrt{3}\,v$ (i.e. $v=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}u$)



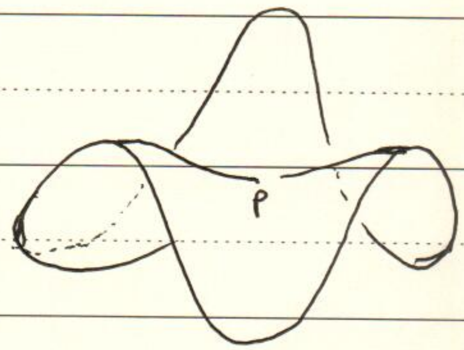


另外，我们观察到函数 $f(u,v)$ 在上述三条直线划分而得的六个区域内的符号分别为



$$f(u,v) = u(u+\sqrt{3}v)(u-\sqrt{3}v)$$

故曲面形如



容易看到 p 点处的二阶近似曲面就是 u-v 平面. p 点为平点.

monkey saddle 的名字：不是放在猴身上的鞍子（如马鞍面）
是猴子用的鞍子. 除了为两条腿的塌陷外，还要有第三个塌陷为了猴子尾巴.

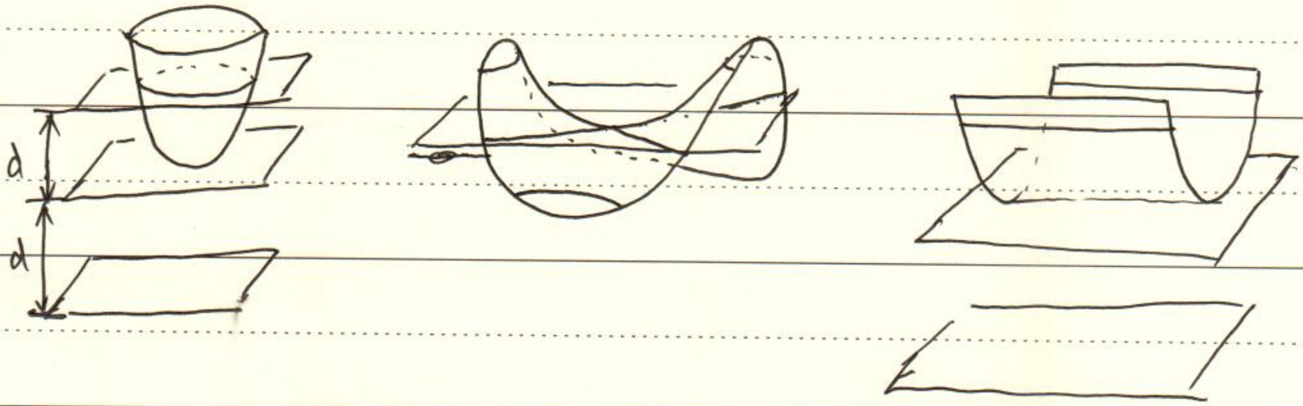
定义 10.1：曲面 M 在一点 p 处的二阶近似曲面

$$\left(u, v, \tfrac{1}{2}(k_1u^2 + k_2v^2)\right)$$

称为 p 点处的密切抛物面 (osculating paraboloid).

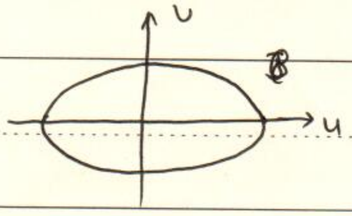
在研究曲线的近似曲线时，我们通过讨论其在各个坐标平面的投影

来理解曲线的形状。但是研究密切抛物面曲面在各坐标平面的投影没有意义。但我们可以讨论平行于此点切平面的平面截密切抛物面所得曲线在切平面的投影. 我们选距离切平面为d的平行平面(有两个)

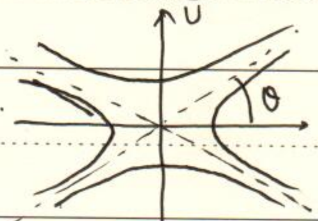


投影得曲线 $\{(u,v) : k_1u^2+k_2v^2=\pm 2d\}$.

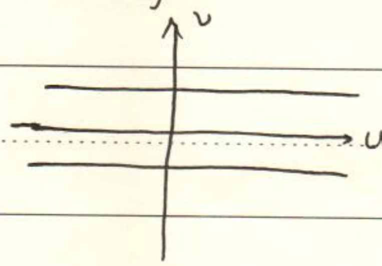
(1) 椭圆点, $k_1k_2>0$



(2) 双曲点 $k_1k_2<0$



(3) 抛物点 $k_1=0$, $k_2\neq 0$



(4) $k_1=k_2=0$

截得曲线为 ϕ.

注意上述参数选取下, u-轴. v-轴为主方向. 从情形(2)可以看到还有两个重要的方向: 称为渐近方向 (asymptotic directions)

回忆这两条直线由 $k_1u^2+k_2v^2=0$ 解得

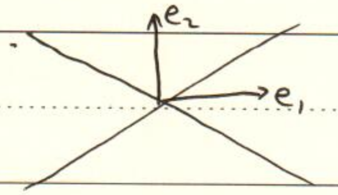
(此时 $k_1k_2<0$)

$$v=\pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}\,u. \quad 即 \tan\theta=\pm\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

由Euler定理, 沿渐近方向的法曲率为 $k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta$ $\Big\}\Rightarrow k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta=0$.

定义10.2、曲面在一点p处法曲率为0的方向称为曲面在该点的渐近方向

可以看到，在椭圆点处没有渐近方向. 在双曲点处有两个渐近方向



- 这两个渐近方向分切平面分四个区域
(而且每个区域被主方向等分)

- 且从前面计算可知，两个渐近方向相互垂直当且仅当

$$k_1 = -k_2$$

也即平均曲率 $H=0$!!

- 由欧拉定理易见，在相对的两个区域内，法曲率符号相同

~~在抛物点处有一个渐近~~

在抛物点处只有一个渐近方向：主曲率为0的主方向. 它分切平面为两个区域，在这两个区域内法曲率均不为0，且符号相同.

在平点处，任何切方向既是主方向又是渐近方向.

还有一个特殊重要的情形是两个主曲率相等的点 $p\in M$. 由Euler定理，这时沿任何方向的法曲率均相等，即该点处任何方向均为主方向. 这样的点称为曲面M的脐点.(umbilic)

给定任意非0向量 $W = \xi r_u + \eta r_v \in T_pM$

法曲率 $k_n(W) = k_n\left(\frac{W}{|W|}\right) = k_1 = k_2 = k$ 常数(与 ξ,η 无关)

由 $k_n(W) = \dfrac{II(W,W)}{I(W,W)} = \dfrac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2} = k.$

由于 ξ,η 任意，易得

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = k.$$

特别，$k\neq 0$ 时，p点称为圆点， $k=0$ 时，p点为前述的平点。