这里如果 k 是常值函数，我们就可以积分得 $n=-k\cdot r+v_0$ 了
即有曲面位置向量 r 和法向量 n 的关系了！ 常向量

故这里首先来考虑 k 是否为常值函数，方法就是求导

求导 (***) (on p.118) 式，有

$$n_{uv}=-k_v r_u-k r_{uv}$$

$$n_{vu}=-k_u r_v-k r_{vu}.$$

由于 $n_{uv}=n_{vu}$ 和 $r_{uv}=r_{vu}$，我们有 $k_u r_v=k_v r_u$

回忆我们考虑的正则曲面(比)有 $r_u\wedge r_v\neq 0$ 即 r_u, r_v 线性无关，故而

$$k_u=k_v=0.$$

从而 k 是常值函数（曲面连通）

进而如前所述，积分 (***) (on p.118) 式得

$$n=-kr+v_0$$

若 $k=0$，我们前面已讨论，曲面(比)必为平面(的一部分)

若 $k\neq 0$，我们有 $r=-\frac{n}{k}+\frac{v_0}{k}$ 或 $r-\frac{v_0}{k}=-\frac{n}{k}$

因而有

$$\Big|r-\underbrace{\frac{v_0}{k}}_{\text{球心}}\Big|^2=\Big|-\frac{n}{k}\Big|^2=\underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\text{半径}^2}.$$

这也就是说 Π 曲面为球面(的一部分). □

关于一般地，第一基本形式和第二基本形式能否决定曲面本身的问题我们留待下一章继续讨论。

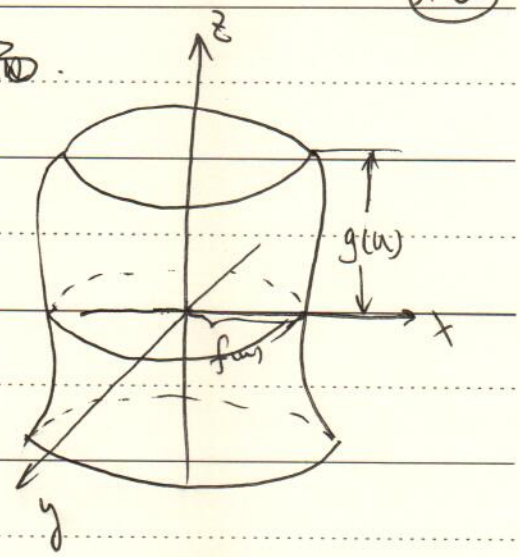
§11. 旋转曲面. (Surfaces of revolution)

我们在本章结束来讨论一些特殊曲面. 这节来讨论旋转曲面.

给定 xz 平面上 ~~[illegible]~~ 的正则曲线

$$(f(u), g(u))$$

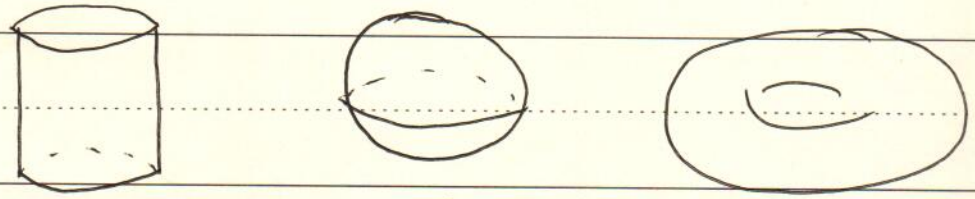
绕z轴旋转得到的曲面称为旋转面.



$$r(u,v)=(f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$$

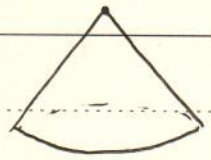
$$f>0$$

例子:



圆柱面　　球面　　环面

注意,要使所考虑的旋转面正则,如果 $(f(u),g(u))$ 和z轴相交,那么那个地方必须成直角. 否则,例如可成锥面就有一个奇点了.



由直接计算我们有

$$r_u=(f'(u)\cos v,\ f'(u)\sin v,\ g'(u))$$

$$r_v=(-f(u)\sin v,\ f(u)\cos v,\ 0)$$

第一基本形式: $E=\langle r_u,r_u\rangle=(f')^2+(g')^2$

$$F=\langle r_u,r_v\rangle=-ff'\sin v\cos v+ff'\sin v\cos v+0=0$$

$$G=\langle r_v,r_v\rangle=f^2.$$

又 $r_u\wedge r_v=(-fg'\cos v,\ -fg'\sin v,\ ff')$.

$$\Rightarrow n=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}=\frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}(-g'\cos v,\ -g'\sin v,\ f')$$

而 $r_{uu} = (f''(u)\cos v,\ f''(u)\sin v,\ g''(u))$

$r_{uv} = (-f'(u)\sin v,\ f'(u)\cos v,\ 0)$

$r_{vv} = (-f(u)\cos v,\ -f(u)\sin v,\ 0)$

故而 $L = \langle r_{uu}, n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\left(-f''g'\cos^2 v - f''g'\sin^2 v + f'g''\right)$

$$= \frac{f'g'' - f''g'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$$

$$M = \langle r_{uv}, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\left(g'f'\sin v\cos v - f'g'\sin v\cos v\right)$$

$$= 0$$

$$N = \langle r_{vv}, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\left(+fg'\cos^2 v + fg'\sin^2 v + 0\right)$$

$$= \frac{fg'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$$

回忆 Weingarten 变换公式的矩阵表示

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\begin{pmatrix} f'g''-f''g' & 0 \\ 0 & fg' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (f')^2+(g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\begin{pmatrix} \dfrac{f'g''-f''g'}{(f')^2+(g')^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{g'}{f} \end{pmatrix}$$

从而我们有两个主曲率为

$$k_1 = \frac{f'g'' - f''g'}{\left((f')^2+(g')^2\right)^{3/2}}, \quad k_2 = \frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$$

高斯曲率为 $K = k_1 k_2 = \dfrac{(f'g''-f''g')g'}{\left((f')^2+(g')^2\right)^2 \cdot f}$

平均曲率 $H = \dfrac{1}{2}\left\{ \dfrac{f'g''-g''f'}{\left((f')^2+(g')^2\right)^{3/2}} + \dfrac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \right\}$

如果我们选 u 为 xz 平面上曲线 $(f(u), g(u))$ 的弧长参数，即

$$(f')^2+(g')^2 = 1. \qquad (*)$$

我们有：$K = \dfrac{(f'g''-f''g')g'}{f}$.

实际上，对 $(*)$ 求导，有 $f'f''+g'g''=0$

即 $(f'g''-f''g')g' = f'g''g' - f''g'g'$

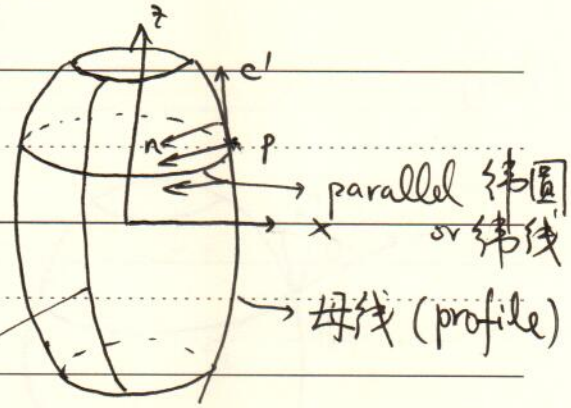
$$= -f'f''f' - f''g'g'$$

$$= -f'f'f'' - f''(1-f'f')$$

$$= -f''$$

$$\Rightarrow \boxed{K = -\frac{f''}{f}, \quad k_1 = -\frac{f''}{g'}, \quad k_2 = \frac{g'}{f} \qquad H = \frac{1}{2}\left\{\frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'}\right\}}$$

上述计算的一个直接地、几何地看法



记 x-z 平面上的曲线为 $c(u)=(f(u),g(u))$

在 p 点处注意切向 $c'(u)$ 在 E^3 中坐标为

$$c'(u)=(f'(u),0,g'(u))$$
$$=(f'(u)\cos v,\ f'(u)\sin v,\ g'(u))\Big|_{v=0}$$
$$=r_u(p)$$

不难看出 $r_v(p)=(-f(u)\sin v,\ f(u)\cos v,\ 0)\Big|_{v=0}=(0,f(u),0)$

特别地 $r_v(p)$ 垂直于 x-z 平面，

故而 p 点处单位切向量 $n=\dfrac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}$ 落在 x-z 平面上.

又因为 n 垂直于 c' 故 n 即为平面曲线 $c(u)$ 在 p 点处的法向.

对曲线 c ~~在p点所插~~ 上所有点的法向均在 x-z 平面内，故

n_u 仍落在 x-z 平面内

又因为 n_u 还落在 p 点处的切平面内. $\Big\}\Rightarrow n_u$ 是 $\underset{r_u}{\overset{\shortparallel}{c'}}$ 的一个数乘!

也就是说 c' 是 Weigarten 变换 W 的一个特值向量

即 $W(c')=-n_u=-n'=\kappa\cdot c'$ → Serret-Frenet 公式

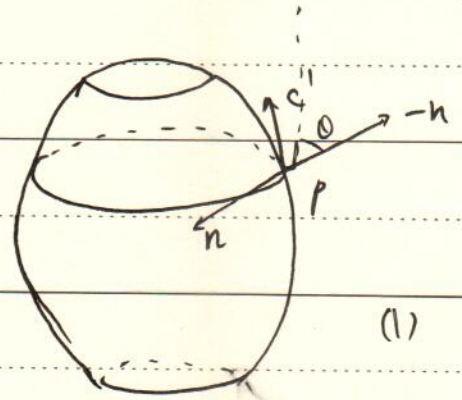
↑ 看作曲线 $c(u)$ 的法向

即曲线 $c(u)$ 的曲率 κ 即为沿 c' 方向曲面的法曲率. 且我们知道 c' 是主方向! 且曲线 c 的曲率 κ 就是 p 点 ~~处沿 c' 方向的~~ 的一个主曲率，c' 表示了一个主方向.

注意曲线 $c(u)=(f(u),g(u))$ 的曲率为 $\dfrac{f'g''-f''g'}{((f')^2+(g')^2)^{3/2}}$. 这与 12 页

同样地道理，在球面上，纬圆 ~~的~~ 在高斯映射下的像是如 (2)

主曲率k_1公式的会.



(1)

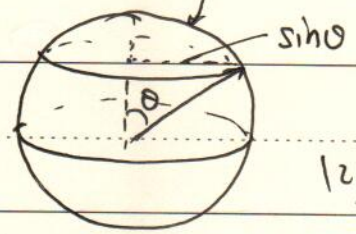
再来看过p点的纬圆. 可看到外法向与z轴成定角θ

(严格地说明可由

$$n=\frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}(-g'\cos u,\ -g'\sin u,\ f')$$

得 $\langle -n,(0,0,1)\rangle = -\frac{f'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$ 在纬圆上为常数)

g



(2)

N映射: $r(u,v)\mapsto -n(u,v)$ 将曲面上纬圆映到S^2上如右所示的纬线圈.

故 $-n(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 满足 $z(u,v)=\cos\theta$

故 $-n_u$ 的第三坐标分量恒为零. 即 $-n_u$ 落在纬线圈所在在平面内. 又知 $-n_u$ 是曲面在p点处的切向量, 故 $-n_u$ 只能是纬圆在p点处切向的"数乘". 故纬圆的切向是沿点处另一定方向.

记纬圆为 $c_{parallel}$. 由法曲率定义 $k_n(c'_{parallel})>0$.

我们的参数化只绕z轴转一圈. 即 $0<v<2\pi$! 这时纬圆在所在平面的参数化为 $(f(u_0)\cos v,\ f(u_0)\sin v)$, 其切向量为

$$(-f(u_0)\sin v,\ f(u_0)\cos v)$$

具有长度 $f(u_0)$ = 纬圆半径

同样地道理, 在球面上, 纬圆在高斯映射下的像是如(2)所示的纬线圈 故 $-n_v$ 的长度为纬圆半径 $\sin\theta$.

再结合法曲率符号判定，有该点处纬圆切向之法曲率（为个主曲率）为 Weingarten 变换之特征值：$\frac{\sin\theta}{f(u_0)}$

注意到 $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\langle n, (0,0,1)\rangle^2}$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\langle (g'\cos v, g'\sin v, -f'), (0,0,1)\rangle\right)^2}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{-f'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(g')^2}{(f')^2+(g')^2}} = \frac{g'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$$

（注意 g' 大于0在图(1)中假定 c 曲线切向方向时就确定了）.

故 $\frac{\sin\theta}{f} = \frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}$ 与前述第二基本形式吻合！

下面我们利用122页方框内公式考察一下具有常高斯曲率或常平均曲率的旋转面.

$\boxed{\text{具有常高斯曲率的旋转面}}$：回忆 $K = -\frac{f''}{f}$

情形1：$K=0$. 这时有 $-\frac{f''}{f}=0$.（注意 $f>0$）

即 $f''(u)=0$.

故解为 $f(u) = au+b$

同时由 $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1 \Rightarrow g'(u) = \pm\sqrt{1-(f'(u))^2} = \pm\sqrt{1-a^2}$

得 $g(u) = \pm\sqrt{1-a^2}\,u + C$

易见我们须有 $|a|\le 1$.

若 $a=0$，则母线为 $(b, \pm u + \underbrace{C}_{\text{只产生一个在 } x\text{-}z \text{ 平面上平移}})$

故曲面是圆柱面.

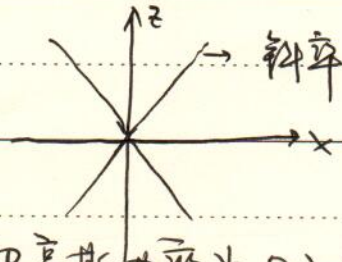
若 $a \neq 0$. 母线为 $(au+b, \pm\sqrt{1-a^2}\, u + C)$

· $|a|=1$. 则母线为 $(\pm u + b, C)$

故曲面是平面.

· $0<|a|<1$. 母线为 $(au+b, \pm\sqrt{1-a^2}\, u + C)$

$$= (au, \pm\sqrt{1-a^2}\, u) + \underbrace{(b, C)}_{\text{平移}}$$



斜率 $\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{|a|}$

故此时曲面为圆锥面.

也即高斯曲率为0的旋转面只有平面，圆柱面和圆锥面.

情形2. 高斯曲率为常数 $c^2>0$

解微分方程
$$\begin{cases} -\dfrac{f''}{f}(u) = c^2 & (1) \\ (f')^2 + (g')^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow$ $f''(u) + c^2 f(u) = 0$

我们知道这个常微分方程解为 $f(u) = A\cos cu + B\sin cu$

我们知道这个解也可写为

$$f(u) = a\cos(cu+b).$$

通过重新参数化，我们不妨设 $b=0$，则

$$f(u) = a\cos(cu)$$

$$g(u) = \pm\int_0^u \sqrt{1-f'(t)^2}\, dt = \pm\int_0^u \sqrt{1-a^2c^2\sin^2(ct)}\, dt.$$

当 $a=\frac{1}{c}$ 时，我们有 $f(u) = \frac{1}{c}\cos(cu)$，$g(u) = \pm\frac{1}{c}\sin(cu)$

这时，曲面为半径为 $\frac{1}{c}$ 的球面！

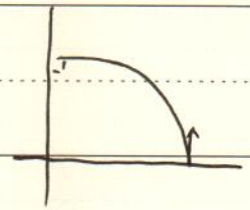
- 当 $a<\frac{1}{c}$ 时，$\sqrt{1-a^2c^2\sin^2(ct)}$ 始终为实数，故限制只由 $f(u)=a\cos(cu)>0$ 给出，这时可取 $0\le cu<2\pi$.

- 当 $a>\frac{1}{c}$ 时，为使 $\sqrt{1-a^2c^2\sin^2(ct)}$ 为实数，我们须要

$$0\le cu\le \arcsin\frac{1}{ac}.$$

易见 $g'(u)\big|_{u=\frac{1}{c}\arcsin\frac{1}{ac}}=0$.

$g'(u)\big|_{u=0}=1$



$(f(u),g(u))$ 与 z 轴垂直交于 z 轴.

情形3. 高斯曲率为常数 $-c^2<0$.

解方程
$$\begin{cases}-\dfrac{f''(u)}{f(u)}=-c^2 \\ f'(u)^2+g'(u)^2=1\end{cases}\Rightarrow f''(u)-c^2f(u)=0$$

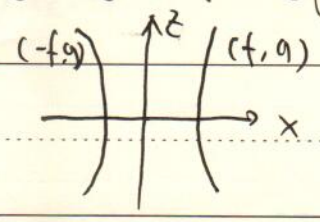
我们知道这个ODE的一般解为

$$f(u)=A\cosh cu+B\sinh cu.$$

我们知道这个解也可以写成

$$f(u)=ae^{cu}+be^{-cu}$$

- 若 a,b 有一个为0. 我们不妨设 $b=0$（否则，$u\mapsto -u$ 交换 a,b 位置）. 我们也不妨设 $a>0$.（$a\mapsto -a$ 只是考虑原图线的镜像，不改变旋转面本身）



这样，我们有

$$\begin{cases}f(u)=ae^{cu} \\ g(u)=\pm\displaystyle\int_0^u\sqrt{1-a^2c^2e^{2ct}}\,dt\end{cases}$$

我们不妨设 $a=\frac{1}{c}$. 这可通过把参数 u 变为 $u+u_0$ 得到 (因这时

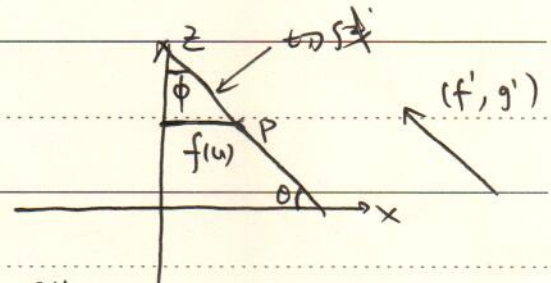
$$ae^{cu} = \frac{1}{c}\cdot \underbrace{ac}_{=e^{\log ac}} e^{cu} = \frac{1}{c} e^{c(u+\underbrace{\frac{\log ac}{c}}_{=u_0})}$$)

我们有
$$\begin{cases} f(u) = \frac{1}{c} e^{cu} \\ g(u) = \pm \int_0^u \sqrt{1-e^{2ct}}\, dt. \end{cases}$$

易见我们须 $e^{2cu} \le 1$. 故而 $f(u) \le \frac{1}{c}$

这个曲面称为伪球面 (pseudosphere)

来考查它的母线 $(f(u), g(u))$

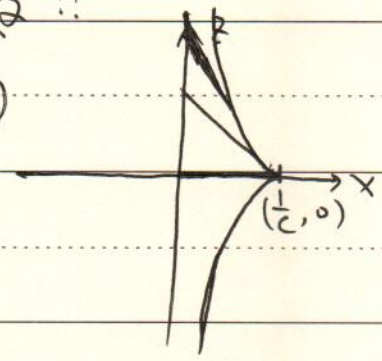


注意 $\frac{f(u)}{\sin\phi} = \frac{f(u)}{\cos\theta}$

$$\cos\theta = \frac{f'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} = \frac{e^{cu}}{1} = e^{cu}$$

$\Rightarrow \frac{f(u)}{\sin\phi} = \frac{f(u)}{e^{cu}} = \frac{1}{c}$ 为常数 !!

这条曲线称为曳物线 (tractrix)



- 当然另外的情形是 a, b 全不为0.
这种情况我们就不讨论了.

$\boxed{\text{具有零平均曲率的旋转曲面}}$: 极小曲面.

平均曲率 $H=0$. 这类曲面称为极小曲面. (Minimal Surface)

原因是, $H=0$ 是给定边界曲面的面积泛函的临界点所要满足的方程.