我们不妨设 $a=\frac{1}{c}$. 这可通过把参数 u 变为 $u+u_0$ 得到.(因这时

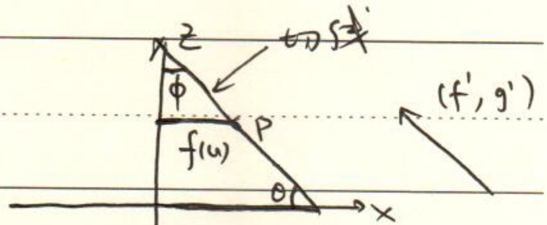
$$ae^{cu} = \frac{1}{c}\cdot \underbrace{ac}_{e^{\log ac}}\, e^{cu} = \frac{1}{c}e^{c(u+\underbrace{\frac{\log ac}{c}}_{u_0})}$$
)

我们有
$$\begin{cases} f(u)=\frac{1}{c}e^{cu} \\ g(u)=\pm\int_0^u\sqrt{1-e^{2ct}}\,dt. \end{cases}$$

易见我们须 $e^{2cu}\le 1$. 即曲面 $f(u)\le\frac{1}{c}$

这个曲面称为伪球面(pseudosphere)

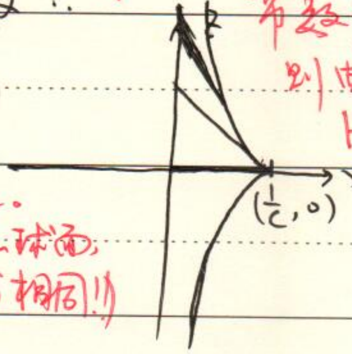
来考查它的母线 $(f(u), g(u))$



注意 $\frac{f(u)}{\sin\phi}=\frac{f(u)}{\cos\theta}$

$$\cos\theta = \frac{f'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} = \frac{e^{cu}}{1} = e^{cu}$$

$\Rightarrow \frac{f(u)}{\sin\phi}=\frac{f(u)}{e^{cu}}=\frac{1}{c}$ 为常数!! (即切线从曲线到z轴的长度为常数，记此常数为R，则曲面高斯曲率为 $-\frac{1}{R^2}$ Huygens在1693年



这条曲线称为曳物线(tractrix)

发现曲面的表面积及所围实体的体积均有限。实际上，表面积 $=4\pi R^2$，体积为 $\frac{2}{3}\pi R^3$ 与半径为R的球面相同!!)

一些另外的情形是 a, b 全不为0.
这种情况我们就不讨论了.

$\boxed{\text{具有零平均曲率的旋转曲面}}$: 极小曲面(I)

情形 平均曲率 $H=0$. 这类曲面称为极小曲面 (Minimal Surface)

原因是, $H=0$ 是给定边界曲面的面积泛函的临界点所要满足的方程.

特别地，给定边界的曲面中面积最小之曲面满足 $H=0$. 故我们称满足 $H=0$ 的曲面为极小曲面.

由前述公式，当 $g'\neq 0$ 我们看到

$$\begin{cases} H=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{g'}{f}-\dfrac{f''}{g'}\right\}=0 & (1)\\ (f')^2+(g')^2=1 & (2)\end{cases}$$

$(1)\Rightarrow\ ff''=(g')^2$，再由 (2) 得

$$ff''=1-(f')^2.$$

$$\Leftrightarrow\quad \underbrace{ff''+(f')^2}_{(ff')'}=1$$

故积分得 $\underbrace{ff'}_{\frac{1}{2}(f^2)'}=u+A$ . . 再积分得 $\frac{1}{2}f^2=\frac{1}{2}u^2+Au+\frac{B}{2}$

即 $f^2=u^2+2Au+B\ \left(=(u+A)^2+B-A^2\geq 0\ \text{要求}\ B-A^2\geq 0\right)$

故 $f=\sqrt{u^2+2Au+B}$

从而 $f'=\dfrac{u+A}{\sqrt{u^2+2Au+B}}\ \Rightarrow\ g'(u)^2=\dfrac{B-A^2}{u^2+2Au+B}$

若 $B-A^2=0$ 则 $g'(u)=0$ 这时 $g(u)=C$ 常数.

$f(u)=\pm(u+A)$

此时曲面为平面.

若 $B-A^2>0$. 我们可设 $B-A^2=a^2$, $a>0$.

那么通过参数变换，可设 $f(u)=\sqrt{u^2+a^2}$

此时 $g'(u)=\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{u^2+a^2}}=\pm\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}$

$$\Rightarrow\ g(u)=\pm\int_0^u\frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}}\,dt=\pm a\left(\operatorname{arc\,sinh}\frac{u}{a}\right)$$

~~即曲母线为~~

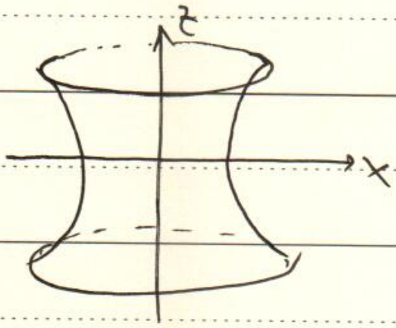
$$\Big(\underset{x}{\sqrt{u^2+a^2}},\ \underset{z}{\pm a\cdot\operatorname{arc\,sinh}\frac{u}{a}}\Big)\qquad x\text{-}z\ \text{平面}$$

我们得到 $\sinh\frac{z}{a} = \pm\frac{u}{a}$ $\quad \sinh^2\frac{z}{a} = \frac{u^2}{a^2}$

$$\cosh^2\frac{z}{a} = 1+\sinh^2\frac{z}{a} = \frac{a^2+u^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad a^2\cosh^2\frac{z}{a} = a^2+u^2$$

故有 $\boxed{x = a\cosh\frac{z}{a}}$



这恰是x-z平面的一条悬链线(Catenary)

它绕z轴所得之曲面称为悬链面
(Catenoid)

历史注记：Catenary一词来源于拉丁词 catēna，意为"链"(chain).

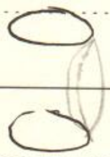
- Galileo 曾猜测固定两端之一条重链子其形状为抛物线(parabola).

- Jungius 于1669年否定了这一猜测。
- 在1690/91年，为回答 James Bernoulli 之挑战，Huygens, Leibniz 和 John Bernoulli 得到其所满足之方程.

注意 $x = a\cosh\frac{z}{a} = a\frac{e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}}{2} = \frac{a}{2}\left(1+\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2\frac{1}{2}+\cdots + 1-\frac{z}{a}+\left(\frac{z}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-\cdots\right)$

$$= \frac{a}{2}\left(2+\left(\frac{z}{a}\right)^2\right)+o(z^2)$$

在 $z=0$ 附近很接近于抛物线.



- Euler 在1744年证明给定两个平行之 circle，悬链面在以上两圆为边界之曲面中面积最小。

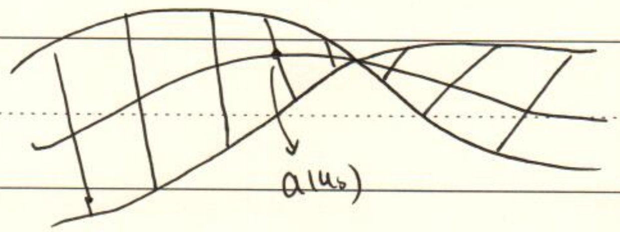
§12 直纹面 (Ruled Surfaces)

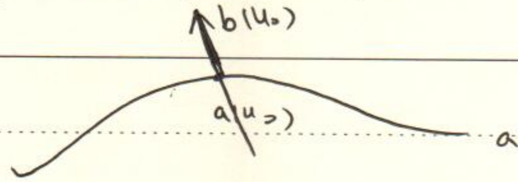
我们再来讨论另一类特别的曲面，其参数表示为

$$r(u,v) = a(u) + v\cdot b(u)$$

E^3 中向量加法　　数乘

$u \mapsto a(u)$ 给出空间中的一条曲线，在每一个点 $a(u_0)$ 处，





固定参数 $u=u_0$，我们得到一条直线 $a(u_0)+v\,b(u_0)$：该直线通过点 $a(u_0)$，方向由 $b(u_0)$ 给出。注意这个方向 $b(u)$ 随 u 变化而变化。

这类曲面是由单参数直线族构成的曲面，我们称之为直纹面 (ruled surface)。

注意，为保证这类曲面为正则曲面，我们要求 $r_u \wedge r_v \neq 0$ 即向量 $a'(u)+v\,b'(u)$ 和 $b(u)$ 要线性无关。一个特别的情形是若 $a'(u)$ 和 $b(u)$ 线性无关，则当 v 充分小时，总有 $a'(u)+v\,b'(u)$ 和 $b(u)$ 线性无关，即曲面正则。

观察到 $r_v = b(u)$，$r_{vv}=0$，得 $N=\langle r_{vv}, n\rangle = 0$

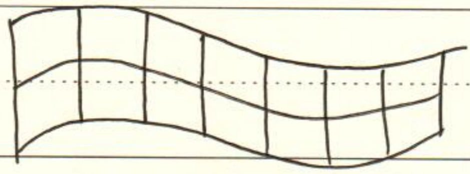
从而直纹面的高斯曲率为

$$K = \frac{-M^2}{EG-F^2}.$$

$\boxed{\text{例子}}$：先来考查几种特别的情形

① $b(u)=b_0$，$\forall u$ 即 $b(u)$ 不变时，

$$r(u,v) = a(u) + v\cdot b$$

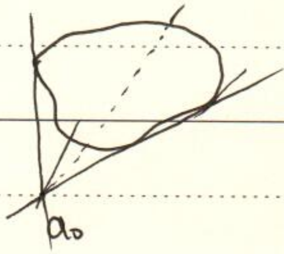


柱面 (generalized cylinder)

平面

这时当然要求 $a'(u)$ 和 b_0 线性无关

② $a(u) = a_0, \forall u$. 即曲线 $a(u)$ 为一个点.



锥面 (generalized cone)

$$r(u,v) = a_0 + v\, b(u)$$

这时要求 $v b'(u)$ 和 $b(u)$ 线性无关

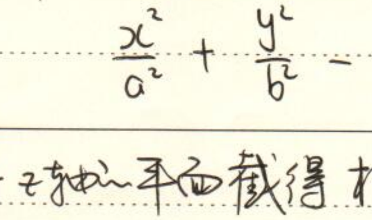
$\Rightarrow \underbrace{v \neq 0}_{\text{点}a_0\text{不在曲面上!!}}$ 且 $b'(u)$ 和 $b(u)$ 线性无关

③ $b(u) = a'(u), \forall u$ 即方向 $b(u)$ 为曲线 $a(u)$ 的切线方向

$$r(u,v) = a(u) + v \cdot a'(u)$$

这时曲面由曲线 $a(u)$ 的切线组成, 称为切线面 (tangent developable)。这时要求 $a'(u) + v\cdot a''(u)$ 和 $a'(u)$ 线性无关

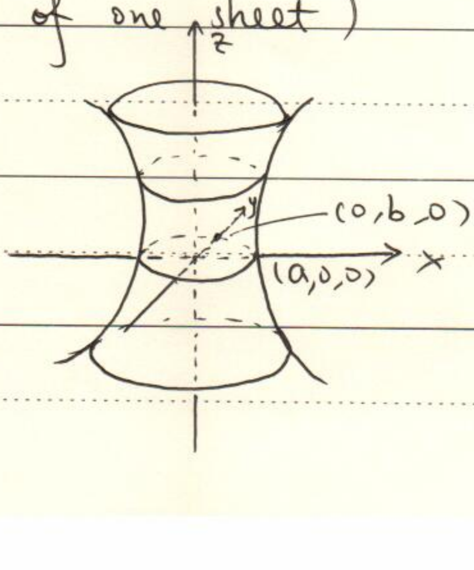
也即 $v \cdot a''(u)$ 和 $a'(u)$ 线性无关 $\Rightarrow \underbrace{v \neq 0}_{\text{曲线}a(u)\text{不在曲面内}}$ 且 $a''(u)$ 和 $a'(u)$ 线性无关



下面两个例子是直纹面可能有些意想不到!

④ 单叶双曲面 (Elliptic hyperboloid of one sheet)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



垂直于z轴的平面截得椭圆

垂直于x轴或y轴的平面截得双曲线

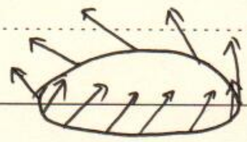
实际上它有两种直纹面之看法：

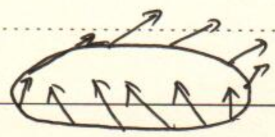
$$r(u,v) = (a(\cos u - v\sin u),\ b(\sin u + v\cos u),\ cv)$$
$$= (a\cos u,\ b\sin u,\ 0) + v(-a\sin u,\ b\cos u,\ c)$$

或
$$r(u,v) = (a(\cos u + v\sin u),\ b(\sin u - v\cos u),\ cv)$$
$$= (a\cos u,\ b\sin u,\ 0) + v(a\sin u,\ -b\cos u,\ c)$$

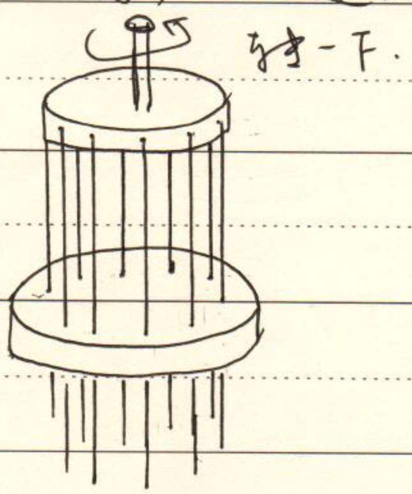
注意点 $(a\cos u, b\sin u, 0)$ 落在椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 上.

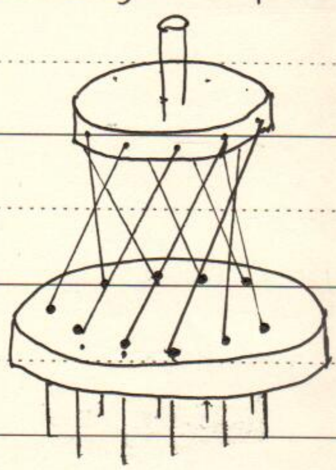
而方向 $(-a\sin u, b\cos u, c)$
$(a\sin u, -b\cos u, c)$ 均和 radius vector $(a\cos u, b\sin u, 0)$ 垂直





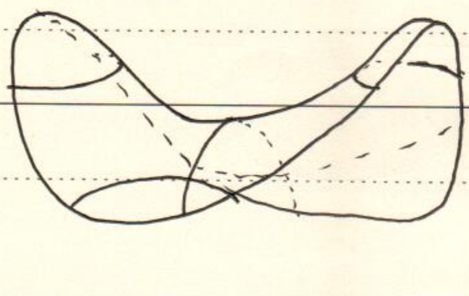
当 $a=b$ 时，此曲面是旋转面. 此时可如下来理解单叶双曲面.





⑤ 双曲抛物面 (Hyperbolic Paraboloid)

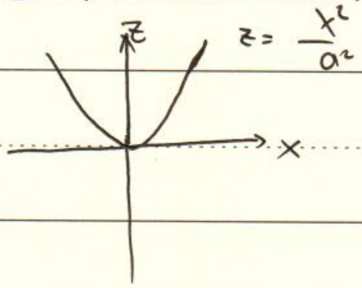
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

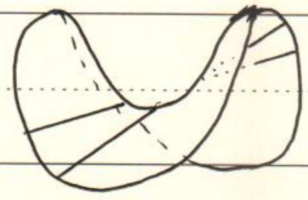


它也有两种直纹面之看法：

$$r(u,v) = (a(u+v),\ bv,\ u^2+2uv)$$
$$= (au,\ 0,\ u^2) + v(a,\ b,\ 2u)$$
或 $$r(u,v) = (a(u+v),\ -bv,\ u^2+2uv)$$
$$= (au,\ 0,\ u^2) + v(a,\ -b,\ 2u)$$

注意：点 $(au, 0, u^2)$ 即在抛物线 $\begin{cases} z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 \\ y=0 \end{cases}$ 上.





注意：平面 $z=0$ 截曲面得 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 即 $y = \pm\frac{b}{a}x$

切向为 $(a, -b)$ 或 (a, b).

注意：过 $(0,0,0)$ 点，方向为 $(a,b,0)$ 或 $(a,-b,0)$ 的直线完全落在曲面上.

$\boxed{\text{可展曲面}}$ (developable surfaces)：高斯曲率为0的直纹面称为可展曲面.（实际上可展曲面定义为 Gauss curvature 为0的曲面. 它说明任一点局部都可等距于平面，也即可由平面 "develop" 而来。回忆高斯论文中，develop 是等距的另一种表达；实际上可以证明，三维空间中完备的可展曲面均为直纹面）

性质 12.1 直纹面 $r(u,v) = a(u) + v\,b(u)$ 是可展曲面当且仅当它满足下列条件之一：

(1) $(a', b, b') = 0$

(2) $\forall u_0$，沿着直母线 $r(u_0, v) = a(u_0) + v\,b(u_0)$，直纹面的法向量不变，即
$$n(u_0, v_1) = n(u_0, v_2),\quad v_1 \neq v_2$$

证明：(1) 直纹面的高斯曲率 $K = \frac{-M^2}{EG-F^2}$，故 $K=0 \Leftrightarrow M=0$

$\Leftrightarrow \langle r_{uv}, n\rangle = \langle b'(u), n\rangle = 0$ (1)

故 $b'(u)$ 是曲面的切向量，可表为 $r_u = a'(u)+vb'(u)$ 和 $r_v = b(u)$ 的线性组合。或 (1) $\Leftrightarrow$ $b'(u)$ 可表为 $a'(u)$ 和 $b(u)$ 的线性组合

$\Leftrightarrow (b', a', b) = (a', b, b') = 0$.

(2) $K=0 \Leftrightarrow M = 0 = \langle r_{uv}, n\rangle = -\langle r_u, n_v\rangle$

直纹面 $\Rightarrow N = \langle r_{vv}, n\rangle = -\langle r_v, n_v\rangle = 0$

注意 $\begin{cases} \langle r_u, n_v\rangle = 0 \\ \langle r_v, n_v\rangle = 0 \end{cases}$ 记 $n_v = ar_u + br_v$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow n_v = 0$

$\Leftrightarrow \forall u_0,\ n(u_0, v_1) = n(u_0, v_2)$. □

可展曲面可以是什么样的曲面呢？（分类）

直纹曲面 $r(u,v) = a(u) + vb(u)$ 为可展曲面

$\Leftrightarrow (a', b, b') = \langle a, b\wedge b'\rangle = 0$

情形1：$b(u)\wedge b'(u) \equiv 0$.

由第一章习题，知 $b(u)\wedge b'(u) \equiv 0 \Leftrightarrow b(u)$ 的方向不变．此时曲面为柱面

有一点不为0，则由连续性在一个邻域不为0.（只关心局部）

情形2．$b(u)\wedge b'(u) \neq 0 \Leftrightarrow b(u)$ 和 $b'(u)$ 线性无关

$(a', b, b') = 0 \Rightarrow a'(u) = \lambda(u)b(u) + \mu(u)b'(u)$

记 $\tilde{a}(u) = a(u) - \mu(u)b(u)$．则

$\tilde{a}'(u) = a'(u) - \mu(u)b'(u) - \mu'(u)b(u) = (\lambda(u) - \mu'(u))b(u)$

情形(2a) $\tilde{a}'(u) \equiv 0 \Leftrightarrow \tilde{a}(u)$ 为常向量，记为 a_0，

即 $a(u) - \mu(u)b(u) = a_0$

则曲面参数表示为 $r(u,v) = a(u) + vb(u) = a_0 + (\mu(u)+v)b(u)$

此时曲面为锥面

情形(2b) $\tilde{\alpha}'(u) \neq 0$. 则 $\tilde{\alpha}(u)$ 是一条正则曲线

参数表示为. $r(u,v) = \tilde{\alpha}(u) + v\, b(u)$

$$= a(u) - \mu(u) b(u) + (\mu(u)+v) b(u)$$

$$= \tilde{\alpha}(u) + \frac{\mu(u)+v}{\lambda(u)-\mu'(u)} \tilde{\alpha}'(u)$$

此时曲面为曲线 $\tilde{\alpha}(u)$ 的切线面.

~~情形(2c) 其它情形.~~

~~情形3 其它情形.~~

极小曲面 II: 具有零平均曲率的直纹面.

给定直纹面, 可参数化为 $r(u,v) = a(u) + v\, b(u)$

注意到我们可以取 $b(u)$ 使得 $|b(u)| = 1$. (这意味着 $\langle b'(u), b(u)\rangle = 0$)

情形1. 若 $b'(u) \neq 0$, $\forall u \in$ 于某区间. ~~则该曲面为柱面~~

则我们可重新参数化, 变曲线 $a(u)$ 为曲线

$$\sigma(u) = a(u) - \frac{\langle a'(u), b'(u)\rangle}{\langle b'(u), b'(u)\rangle} b(u).$$ (点 $a(u)$ 沿 $b(u)$ 方向变动)

则曲面可重新参数化为 $r(u,\bar{v}) = \sigma(u) + \bar{v}\cdot b(u)$

这时有 $\langle \sigma'(u), b'(u)\rangle = \Big\langle a'(u) - \left(\frac{\langle a'(u), b'(u)\rangle}{\langle b'(u), b'(u)\rangle}\right)' b(u)$

$$- \left(\frac{\langle a'(u), b'(u)\rangle}{\langle b'(u), b'(u)\rangle}\right) b'(u), b'(u)\Big\rangle$$

因为 $\langle b'(u), b(u)\rangle = 0$,

则有 $\langle \sigma'(u), b'(u)\rangle = \langle a'(u), b'(u)\rangle - \langle a'(u), b'(u)\rangle = 0$.

我们还可以取曲线 $b(u)$ 为弧长参数, 即满足 $|b'(u)| = 1$.

也就是说, 此时, 我们总可以取直纹面的一个参数表示

$$r(u,v) = a(u) + v\, b(u)$$ (为以下方便我们用原记号)

使得 $|b| = |b'| = 1$, $\langle a', b'\rangle = 0$.

我们计算: $r_u = a'(u) + v b'(u)$, $r_v = b(u)$

$r_{uu} = a''(u) + v b''(u)$, $r_{uv} = b'(u)$, $r_{vv} = 0$.

回忆 Weingarten 变换矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} LG-MF & -LF+ME \\ MG-NF & -MF+NE \end{pmatrix}.$$

~~记 W := EG-F~~ 故而 $H=0 \Leftrightarrow$ 上述矩阵迹为 0

$\Leftrightarrow \quad LG-2MF+NE=0.$

其中, $N = \langle r_{vv}, n \rangle = 0$.

$F = \langle r_u, r_v \rangle = \langle a'(u) + v b'(u), b(u) \rangle$.

$\overset{\langle b', b \rangle = 0}{=} \langle a'(u), b(u) \rangle$

$G = \langle r_v, r_v \rangle = 1$

$L = \langle r_{uu}, n \rangle = \dfrac{1}{|r_u \wedge r_v|} \langle r_{uu}, r_u \wedge r_v \rangle$

$= \dfrac{1}{EG-F^2} \det \begin{pmatrix} a'' + v b'' \\ a' + v b' \\ b \end{pmatrix}$

$M = \langle r_{uv}, n \rangle = \dfrac{1}{|r_u \wedge r_v|} \langle r_{uv}, r_u \wedge r_v \rangle$

$= \dfrac{1}{EG-F^2} \det \begin{pmatrix} b' \\ a' + v b' \\ b \end{pmatrix}$

从而 $H=0 \Leftrightarrow LG-2MF=0 \Leftrightarrow$

$$-2\langle a', b \rangle \det \begin{pmatrix} b' \\ a' + v b' \\ b \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a'' + v b'' \\ a' + v b' \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\langle a', b \rangle \det \begin{pmatrix} b' \\ a' \\ b \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a'' \\ a' \\ b \end{pmatrix} + v \left[\det \begin{pmatrix} a'' \\ b' \\ b \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b'' \\ a' \\ b \end{pmatrix} \right]$$

$$+\,u^2\left[\det\begin{pmatrix} b'' \\ b' \\ b \end{pmatrix}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\langle a',b\rangle \det\begin{pmatrix} b' \\ a' \\ b \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a'' \\ a' \\ b \end{pmatrix} = 0 & ① \\ \det\begin{pmatrix} a'' \\ b' \\ b \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b'' \\ a' \\ b \end{pmatrix} = 0 & ② \\ \det\begin{pmatrix} b'' \\ b' \\ b \end{pmatrix} = 0 & ③ \end{cases}$$

③ $\Rightarrow$ b'' 是 b' 和 b 的线性组合

$$\left.\begin{array}{l} \text{但 } \langle b',b'\rangle = 1 \Rightarrow \langle b'',b'\rangle = 0 \\ \langle b,b\rangle = 1 \Rightarrow \langle b',b\rangle = 0 \Rightarrow \langle b'',b\rangle + \langle b',b'\rangle = 0 \\ \qquad \Rightarrow \langle b'',b\rangle = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow b''=-b.$$

由于曲线 $b(u)$ 为弧长参数，故其曲率 $k(u)=|b''|=1$

从而由Frenet 标架运动方程 $b''(u) = k(u)\underbrace{n(u)}_{\text{主法向量}} = n(u) = -b$.

即 $-b$ 为曲线 $b(u)$ 的主法向量

从而副法向量为 $b'\wedge(-b)$

由运动方程 $\big(b'\wedge(-b)\big)' = -\tau(u)\,n(u)$

$$= b''\wedge(-b) + b'\wedge(-b')$$

$$= (-b)\wedge(-b) + b'\wedge(-b') = 0$$

$\Rightarrow$ 挠率 $\tau = 0$.

即曲线 $b(u)$ 为平面曲线. 平面曲线且曲率处处为1，且 $|b(u)|=1$. 故 $b(u)$ 为半径为1的圆. 可参数化为

$$b(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

现在看方程②：注意 $b''=-b \Rightarrow \det\begin{pmatrix} b'' \\ a' \\ b \end{pmatrix} = 0$

故而 ② $\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a'' \\ b' \\ b \end{pmatrix} = 0$

即 a'' 是 b' 和 b 之线性组合. 也即 a'' 在 x-y 平面内.

从而 曲线 $a(u)$ 可参数化为

$$a(u) = (\alpha(u), \beta(u), \lambda u + \underbrace{c}_{\text{可取 } c=0})$$

$$\Rightarrow \quad a(u) = (\alpha(u), \beta(u), \lambda u)$$

再来看方程①. 这时

$$\det\begin{pmatrix} b' \\ a' \\ b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\sin u & \cos u & 0 \\ \alpha'(u) & \beta'(u) & \lambda \\ \cos u & \sin u & 0 \end{pmatrix} = -\lambda(-\sin^2 u - \cos^2 u) = \lambda$$

$$\det\begin{pmatrix} a'' \\ a' \\ b \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha''(u) & \beta''(u) & 0 \\ \alpha'(u) & \beta'(u) & \lambda \\ \cos u & \sin u & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda(\alpha''(u)\sin u - \beta''(u)\cos u)$$

又注意到 $0 = \langle a', b' \rangle = -\alpha'(u)\sin u + \beta'(u)\cos u$

再求导得 $0 = -\alpha''(u)\sin u - \alpha'(u)\cos u + \beta''(u)\cos u - \beta'(u)\sin u.$

$$\Rightarrow \alpha''(u)\sin u - \beta''(u)\cos u = -\alpha'(u)\cos u - \beta'(u)\sin u$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a'' \\ a' \\ b \end{pmatrix} = \lambda(\alpha'(u)\cos u + \beta'(u)\sin u) = \lambda\langle a', b \rangle.$$

另一种方法:

$a'' = \langle a'', b' \rangle b' + \langle a'', b \rangle b$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a'' \\ a' \\ b \end{pmatrix} = \langle a'', b' \rangle \det\begin{pmatrix} b' \\ a' \\ b \end{pmatrix}$

由 $\langle a', b' \rangle = 0$

求导 $\langle a'', b' \rangle = -\langle a', b'' \rangle \overset{b''=-b}{=} \langle a', b \rangle.$

故而 ① $\Leftrightarrow \; 2\lambda\langle a', b \rangle = 0$

若 $\lambda = 0$, 则 $a(u)$ 落入 x-y 平面内. 则 曲面为平面.

若 $\lambda \neq 0$. 则 $\langle a', b \rangle = 0$, 我们有.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \langle a', b \rangle = \alpha'(u)\cos u + \beta'(u)\sin u \\ 0 &= \langle a', b' \rangle = -\alpha'(u)\sin u + \beta'(u)\cos u \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = 0$$

从而 α, β 均为常数.

曲面为 $r(u,v) = (\alpha, \beta, \lambda u) + v(\cos u, \sin u, 0)$

$$= (\alpha + v\cos u,\ \beta + v\sin u,\ \lambda u)$$

通过平移，可重新参数化为

$$r(u,v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ \lambda u)$$

这个曲面称为 Helicoid 正螺面

$(v_0\cos u,\ v_0\sin u,\ \lambda u)$ 是一条 helix

$(v\cos u_0,\ v\sin u_0,\ \lambda u_0)$ 是一条直线