(IV) 标架和曲面论基本定理

§0 引言

回忆从(III) §10 (p.109) 开始我们讨论曲面的局部外蕴几何时，我们借鉴了曲线论的三个要点。前两个要点，所对应的曲面几何研究我们已经在(III)进行了详尽的讨论。回忆曲线论第三个要点为

(iii) 曲线每点处的曲率、挠率，在相差 E^3 中一个刚体运动意义下，唯一确定该曲线。（曲线论基本定理）。

我们这一章的主要内容就是讨论相应地"曲面论基本定理"。前面已经解释过，相应合适的提法是

"曲面每点处的第一基本形式，第二基本形式，在相差 E^3 中一个刚体运动意义下，是否唯一确定该曲面？"

当然，类似于曲线论的情形，我们实际上有两个问题要回答：

① 给定两个二次微分式 $\varphi = a_{11}\,du\,du + 2a_{12}\,du\,dv + a_{22}\,dv\,dv$

和 $\psi = b_{11}\,du\,du + 2b_{12}\,du\,dv + b_{22}\,dv\,dv$，

是否存在曲面M使 φ, ψ 分别为其第一基本形式和第二基本形式？

② 如果存在这种曲面，是否唯一？

当然，在开始讨论之前，一个自然地问题是：能不能用高斯曲率K和平均曲率H来替代 I，II？也即

"一个曲面每点处的K和H，是否在相差一个刚体运动的意义下，唯一确定该曲面？"

这里K的描述内蕴的，H描述外蕴的。

答案是否定的！反例可由上一章末所讨论的两个极小曲面给出

例3：Helicoid $r(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$

计算得 $r_u = (-v\sin u, v\cos u, 1)$

$r_v = (\cos u, \sin u, 0)$

$\Rightarrow E = \langle r_u, r_u\rangle = 1+v^2,\ F = \langle r_u, r_v\rangle = 0,\ G = 1.$

$\Rightarrow \quad I = (1+v^2)\,du\,du + dv\,dv.$

Catenoid： $\bar{r}(u,v) = (\sqrt{1+u^2}\cos v, \sqrt{1+u^2}\sin v, \operatorname{arcsinh} u)$

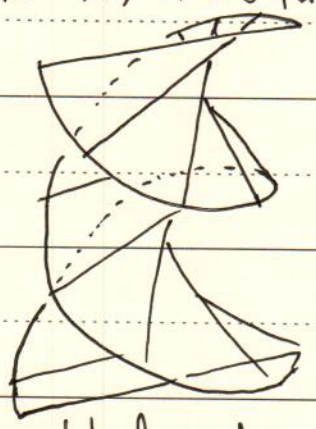
$\bar{r}_u = \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\cos v, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\sin v, \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)$

$\bar{r}_v = (-\sqrt{1+u^2}\sin v, \sqrt{1+u^2}\cos v, 0)$

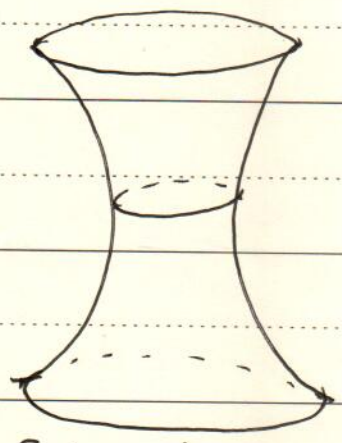
故而 $E = 1,\ F = 0,\ G = 1+u^2$

$\Rightarrow I = du\,du + (1+u^2)\,dv\,dv.$

这就是说，上述 Helicoid 和 Catenoid 的第一基本形式相同。由高斯绝妙定理，它们的高斯曲率相同。由(III)部分的讨论，知它们均为极小曲面，也即满足 $H=0$。也即这两个曲面 K, H 均相等。



Helicoid



Catenoid.

显然，不能通过一个刚体运动把 Helicoid 变成 Catenoid。由相应的第一基本形式，我们知道它们之间的等距映射是把

Helicoid $u = \text{const}$ (即直母线) $\xrightarrow{\text{映为}}$ Catenoid $v \equiv \text{const}$ (即 meridian 经线)

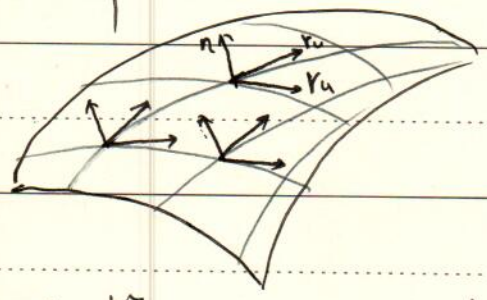
Helicoid $v = \text{const}$ (即 helix 曲线) $\xrightarrow{\text{映为}}$ Catenoid $u \equiv \text{const}$. $u \neq 0$ (即纬圈)
$v \neq 0$

Helicoid $v \equiv 0$ (即 z 轴) $\xrightarrow{\text{映为}}$ Catenoid $u \equiv 0$ (中心圈).

§1. 自然标架的运动方程

下面我们开始曲面论基本定理的讨论。类似于曲线论情形(主要工具是 Frenet 标架运动方程),我们先来推导曲面自然标架的运动方程.

设曲面 $r = r(u,v)$ 是 E^3 中参数曲面. 在任一点 $r(u,v)$ 处存在一个自然标架 $\{r(u,v);\ r_u(u,v),\ r_v(u,v),\ n(u,v)\}$。注意这个标架随 (u,v) 变化而变化,且光滑地依赖于参数 (u,v). 我们就来研究这个标架的变化规律.



记号的讨论

为了下面的计算方便,我们先来引入一套张量的记法和 Einstein 的求和约定:我们记

$$u^1 = u, \quad u^2 = v, \quad \text{则 } r = r(u^1, u^2)$$

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}(u^1, u^2), \qquad r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}(u^1, u^2)$$

用指标记为 $r_\alpha = \dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha}$, $\alpha = 1, 2$

再求导 $r_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 r}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}(u^1, u^2)$, $\alpha, \beta = 1,2$

单位法向量 $n = \dfrac{r_1 \wedge r_2}{|r_1 \wedge r_2|}$

第一基本形式系数 $\langle r_\alpha, r_\beta \rangle := g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1,2$

第二基本形式系数 $\langle r_{\alpha\beta}, n \rangle = -\langle r_\alpha, n_\beta \rangle := b_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1,2$.

易见用我们原来的记号 $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$

$b_{11} = L$, $b_{12} = b_{21} = M$, $b_{22} = N$

($g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ 关于下标 α, β 是对称的).

第一基本形式 $I = g_{11} du^1 du^1 + 2 g_{12} du^1 du^2 + g_{22} du^2 du^2$

$$= g_{11} du^1 du^1 + g_{12} du^1 du^2 + g_{21} du^2 du^1 + g_{22} du^2 du^2$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$$

类似地 $II = \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$.

Einstein 求和约定：在一个单项式中如果一个指标字母作为上指标和下指标各出现一次，则表示是对该指标的求和.

在这个约定下，$I = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$, $II = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$.

~~如果我们记~~ 回忆矩阵 $(g_{\alpha\beta})$ 正定

我们可以记其逆矩阵 $(g_{\alpha\beta})^{-1} := (g^{\alpha\beta})$，因为在这种记法下，$(\delta^\alpha_\beta) = (g_{\alpha\beta})^{-1} \cdot (g_{\alpha\beta}) = (g^{\alpha\beta})(g_{\alpha\beta})$

单位阵

写成分量就是 $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \sum_{\beta=1,2} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$.

我们也记 $g := \det(g_{\alpha\beta})$, $b = \det(b_{\alpha\beta})$.

下面我们就开始推导自然标架的运动方程，即 $\{r; r_1, r_2, n\}$ 随 (u^1, u^2) 的变化方程：注意逐点处，$\{r_1, r_2, n\}$ 均线性无关，所以

$r_{\alpha\beta} = \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}$ 和 $n_\alpha = \frac{\partial n}{\partial u^\alpha}$ 均可表示为 r_1, r_2, n 的线性组合

待定系数，我们可记

$$\begin{cases} r_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} r_\gamma + C_{\alpha\beta} n \\ n_\alpha = D_\alpha^\beta r_\beta + A_\alpha n \end{cases}$$

也即自然标架 $\{r; r_1, r_2, n\}$ 的运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} = r_\alpha, \quad \alpha = 1,2 & (1) \\ \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} r_\gamma + C_{\alpha\beta} n, \quad \alpha,\beta = 1,2 & (2) \\ \frac{\partial n}{\partial u^\alpha} = D_\alpha^\beta r_\beta + A_\alpha n & (3) \end{cases}$$

其中系数 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $C_{\alpha\beta}$, D_α^β, A_α 待定.

- 做内积 $\langle \frac{\partial n}{\partial u^\alpha}, n \rangle = A_\alpha$ 因为 $\langle n, n \rangle = 1$，故 $\langle n_\alpha, n \rangle = 0$

也即 $\boxed{A_\alpha = 0}$.

- 做内积 $\langle \frac{\partial n}{\partial u^\alpha}, r_\gamma \rangle = D_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} = -b_{\alpha\gamma}$

两边同乘 $g^{\gamma\rho}$，并对 γ 求和 得

$$D_\alpha^\beta g_{\beta\gamma} g^{\gamma\rho} = D_\alpha^\beta \delta_\beta^\rho = D_\alpha^\rho.$$

从而有 $D_\alpha^\rho = -b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\rho} := -b_\alpha^\rho$ （把指标"拉"上去）

$\Rightarrow$ $\boxed{D_\alpha^\beta = -b_\alpha^\beta}$

注记：我们来看一下 b_α^β 的含义. 把定义 $b_\alpha^\beta = b_{\alpha\xi} g^{\xi\beta}$ 写出来

即为
$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

右端用我们原来的记号就是
$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

也就是说 (b_α^β) 就是 Weingarten 变换在基 $\{r_1, r_2\}$ 下的矩阵表示.

再来看(2)中的待定系数.

- 取内积 $\langle \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}, n \rangle = \langle r_{\alpha\beta}, n \rangle = C_{\alpha\beta}$.

  故 $\boxed{C_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}}$

- 取内积 $\langle \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}, r_\xi \rangle = \langle r_{\alpha\beta}, r_\xi \rangle = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\xi}$

故要得到 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 须求解 $\langle r_{\alpha\beta}, r_\xi \rangle$。不难想到这可由对 $g_{\alpha\beta}$ 求导得出：

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = \langle r_{\alpha\gamma}, r_\beta \rangle + \langle r_\alpha, r_{\beta\gamma} \rangle \qquad (a)$$

我们作指标 α, β, γ 的轮换，得

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} = \langle r_{\alpha\beta}, r_\gamma \rangle + \langle r_\alpha, r_{\gamma\beta} \rangle \qquad (b)$$

$$\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} = \langle r_{\gamma\alpha}, r_\beta \rangle + \langle r_\gamma, r_{\beta\alpha} \rangle \qquad (c)$$

注意到 $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$，三式的右端~~每个~~项重复出现两次.

$$(b) + (c) - (a) \Rightarrow 2\langle r_{\alpha\beta}, r_\gamma \rangle = \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}$$