

注记：我们来看一下 b_{α}^{β} 的含义。把定义 $b_{\alpha}^{\beta} = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta}$ 写出来

即为
$$\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

右端用我们原来的记号就是

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

也就是说 (b_{α}^{β}) 就是 Weingarten 变换在基 $\{r_1, r_2\}$ 下的矩阵表示。

再来看 (2) 中的待定系数。

取内积 $\langle \frac{\partial r_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}, n \rangle = \langle r_{\alpha\beta}, n \rangle = C_{\alpha\beta}$

故 $\boxed{C_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}}$

取内积 $\langle \frac{\partial r_{\alpha}}{\partial u^{\beta}}, r_{\gamma} \rangle = \langle r_{\alpha\beta}, r_{\gamma} \rangle = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} g_{\gamma\delta}$

故要得到 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 须求解 $\langle r_{\alpha\beta}, r_{\gamma} \rangle$ 。不难想到这可由对 $g_{\alpha\beta}$ 求导得出：

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} = \langle r_{\alpha\gamma}, r_{\beta} \rangle + \langle r_{\alpha}, r_{\beta\gamma} \rangle \quad (a)$$

我们作指标 α, β, γ 的轮换，得

$$\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} = \langle r_{\alpha\beta}, r_{\gamma} \rangle + \langle r_{\alpha}, r_{\gamma\beta} \rangle \quad (b)$$

$$\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^{\alpha}} = \langle r_{\gamma\alpha}, r_{\beta} \rangle + \langle r_{\gamma}, r_{\beta\alpha} \rangle \quad (c)$$

注意到 $r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha}$ ，右端有 ~~每~~项重复出现两次。

$$(b) + (c) - (a) \Rightarrow 2 \langle r_{\alpha\beta}, r_{\gamma} \rangle = \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \langle r_{\alpha\beta}, r_\gamma \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right\}.$$

$$\text{从而 } \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\delta} = \langle r_{\alpha\beta}, r_\delta \rangle \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right\}$$

$$\text{同样由技巧 } \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\delta} g^{\delta\eta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\gamma^\eta = \Gamma_{\alpha\beta}^\eta. \text{ 得}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\eta = \frac{1}{2} g^{\delta\eta} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right\} \\ = \frac{1}{2} g^{\eta\delta} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right\}.$$

特别地, 我们看到 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 完全由曲面的第一类形式系数及其一阶偏导数完全确定!!

$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ 称为曲面的 Christoffel 符号.

$$\text{记 } \Gamma_{\delta\alpha\beta} = g_{\delta\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right\}$$

并称其为曲面的第二类 Christoffel 符号.

至此, 我们看到, 由曲面第一类形式系数及其一阶导数, 第二类形式系数确定了自然标架的运动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial u^\alpha} = r_\alpha, & \alpha = 1, 2 \end{cases} \quad (M1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma + b_{\alpha\beta} n, & \alpha, \beta = 1, 2 \end{cases} \quad (M2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial u^\alpha} = -b_\alpha^\beta r_\beta, & \alpha = 1, 2 \end{cases} \quad (M3)$$

注记。Christoffel 是一位德国数学家，陈省身曾评价他“是一位开拓的大师”。他于 1869 年讨论两个二次微分式何时可通过独立变量变换相互转化时，引入了 Christoffel 符号。

~~Christoffel~~ 意大利数学家 Ricci 在 1883-1888 年间发表 6 篇文章系统研究了 Christoffel 的方法，将 Christoffel's algorithm 解释成“协变微分”。Ricci (1893) 称之为“absolute differential calculus”。

1901 年，Ricci 和他的学生 Levi-Civita 用法语将其成果发表。后来被称为“张量分析”。

Levi-Civita 于 1916/1917 认识到 Christoffel 符号的含义：决定向量沿流形(曲面)的“平行移动”。

§2. 曲面的结构方程。

我们继续来讨论自然标架运动方程 (M1), (M2), (M3)。我们的问题是“曲面的第一基本形式系数和第二基本形式系数是否独立？”

这节我们用到的基本原则是下面的简单事实：“任何光滑函数的二阶偏导数可交换求导次序，也就是说

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^\beta \partial u^\alpha} \quad \text{("mixed partials equal")}$$

把这个原则应用到 r , r_α 和 n 就分别有：

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\partial r}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial r}{\partial u^\beta} \right) \quad <1>$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} \right) \quad <2>$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\partial n}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial n}{\partial u^\beta} \right) \quad <3>$$

我们先看方程 <1> (M2)

$$\text{左端} = r_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} r_{\gamma} + b_{\alpha\beta} n$$

$$\text{右端} = r_{\beta\alpha} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} r_{\gamma} + b_{\beta\alpha} n$$

$$\text{故而} <1> \text{意味着 } (\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}) r_{\gamma} + (b_{\alpha\beta} - b_{\beta\alpha}) n = 0$$

因为 r_1, r_2, n 线性无关, 所以有

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}, \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}.$$

也就是说 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$, $b_{\alpha\beta}$ 关于 α, β 对称。这我们已经从定义及第一基本形式系数矩阵的对称性中观察到。

利用同样的思路我们来考察方程 <2> 和 <3>。

先来看 <2>。

$$\text{左端} = \frac{\partial}{\partial u^{\delta}} \left(\frac{\partial r_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} \right) = \frac{\partial}{\partial u^{\delta}} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} r_{\gamma} + b_{\alpha\beta} n)$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} r_{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{\partial r_{\gamma}}{\partial u^{\delta}} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}} n + b_{\alpha\beta} \frac{\partial n}{\partial u^{\delta}}$$

$$\stackrel{(M2)}{=} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} r_{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} (\Gamma_{\gamma\delta}^{\eta} r_{\eta} + b_{\gamma\delta} n) + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}} n + b_{\alpha\beta} \frac{\partial n}{\partial u^{\delta}}$$

$$\text{合并同类项} \Rightarrow \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} r_{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\delta}^{\eta} r_{\eta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} b_{\gamma\delta} n + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}} n + b_{\alpha\beta} \frac{\partial n}{\partial u^{\delta}}$$

$$\text{注意: } \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} r_{\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\delta}^{\eta} r_{\eta}$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} r_{\gamma} + \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\delta}^{\eta}}_{\uparrow} r_{\eta} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\delta}^{\gamma} \right) r_{\gamma}$$

$$\text{这里我们所做证是 } \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \Gamma_{\gamma\delta}^{\eta} r_{\eta} = \sum_{\eta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\delta}^{\gamma} r_{\gamma}$$

“加和指标可以一块儿改名字”

$$\text{总结起来, } <2> \text{式右端} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\delta}^{\gamma} \right) r_{\gamma} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} b_{\gamma\delta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}} \right) n + b_{\alpha\beta} n_{\delta}$$

$$\stackrel{(M3)}{=} \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^3}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^3 \right) r_\beta + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^3 b_{\beta\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\alpha} \right) n$$

$$+ b_{\alpha\beta} (-b_\gamma^3) r_\beta$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^3}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^3 - b_{\alpha\beta} b_\gamma^3 \right) r_\beta + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^3 b_{\beta\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\alpha} \right) n$$

类似的, 我们计算 <2> 式右端:

$$\text{右端} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (\Gamma_{\alpha\gamma}^3 r_\gamma + b_{\alpha\gamma} n)$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^3}{\partial u^\alpha} r_\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^3 \frac{\partial r_\gamma}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\alpha} n + b_{\alpha\gamma} \frac{\partial n}{\partial u^\alpha}$$

$$= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^3}{\partial u^\alpha} r_\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^3 \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (\Gamma_{\beta\gamma}^2 r_\beta + b_{\beta\gamma} n)$$

$$+ \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\alpha} n + b_{\alpha\gamma} (-b_\beta^3 r_\beta)$$

$$= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^3}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^2 \Gamma_{\eta\beta}^3 - b_{\alpha\gamma} b_\beta^3 \right) r_\beta + \left(\Gamma_{\alpha\gamma}^3 b_{\beta\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\alpha} \right) n$$

<2> 式左端 = 右端 推出

$$\begin{cases} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^3}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^3 - b_{\alpha\beta} b_\gamma^3 = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^3}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^2 \Gamma_{\eta\beta}^3 - b_{\alpha\gamma} b_\beta^3 \\ \Gamma_{\alpha\beta}^3 b_{\beta\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\alpha} = \Gamma_{\alpha\gamma}^3 b_{\beta\gamma} + \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\alpha} \end{cases}$$

稍作整理, 我们得到

$$\left[\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^3}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^3}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \Gamma_{\eta\gamma}^3 - \Gamma_{\alpha\gamma}^2 \Gamma_{\eta\beta}^3 - b_{\alpha\beta} b_\gamma^3 + b_{\alpha\gamma} b_\beta^3 &= 0 \quad (G) \\ \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^3 b_{\beta\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^3 b_{\beta\beta} &= 0 \quad (C) \end{aligned} \right]$$

(H)

这是两个非平凡的关系。方程(G)称为曲面的 Gauss 方程，方程(C)称为曲面的 Codazzi 方程。注意方程(G)左端关于 β 和 γ 是反称的，方程(C)左端也是如此。

再来看 <3>.

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(\frac{\partial n}{\partial u^\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\beta} (-b_\alpha^3 r_\beta) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^\beta} (-b_\alpha^3) r_\beta - b_\alpha^3 (\Gamma_{\beta\gamma}^\eta r_\eta + b_{\beta\gamma} n) \\ &= \left(-\frac{\partial b_\alpha^3}{\partial u^\beta} - b_\alpha^\eta \Gamma_{\eta\beta}^3 \right) r_\beta - b_\alpha^3 b_{\beta\gamma} n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右端} &= \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\frac{\partial n}{\partial u^\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (-b_\beta^3 r_\alpha) \\ &= -\frac{\partial b_\beta^3}{\partial u^\alpha} r_\alpha - b_\beta^3 (\Gamma_{\alpha\eta}^\eta r_\eta + b_{\alpha\eta} n) \\ &= \left(-\frac{\partial b_\beta^3}{\partial u^\alpha} - b_\beta^\eta \Gamma_{\eta\alpha}^3 \right) r_\alpha - b_\beta^3 b_{\alpha\eta} n \end{aligned}$$

故而左端 = 右端 意味着

$$\begin{cases} \frac{\partial b_\beta^3}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_\alpha^3}{\partial u^\beta} + b_\beta^\eta \Gamma_{\eta\alpha}^3 - b_\alpha^\eta \Gamma_{\eta\beta}^3 = 0 & \text{①} \\ b_\beta^3 b_{\alpha\eta} - b_\alpha^3 b_{\beta\eta} = 0 & \text{②} \end{cases}$$

回忆 $b_\beta^3 = b_{\beta\eta} g^{\eta 3}$ ，代入②式有

$$b_{\beta\eta} g^{\eta 3} b_{\alpha\eta} - b_{\alpha\eta} g^{\eta 3} b_{\beta\eta} = 0 \quad \text{③}$$

注意 $b_{\beta\eta} g^{\eta 3} b_{\alpha\eta}$ 是矩阵 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

的 (p,q)-项。而这个乘积矩阵为对称阵，故③(进而②)是平凡的。

我们再来看①. 同样代入 b_p^3 的定义, 我们有

$$\frac{\partial (b_{px} g^{x3})}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial (b_{\alpha x} g^{x3})}{\partial u^\beta} + b_{px} g^{x\eta} \Gamma_{\eta\alpha}^3 - b_{\alpha x} g^{x\eta} \Gamma_{\eta\beta}^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial b_{px}}{\partial u^\alpha} g^{x3} + b_{px} \frac{\partial g^{x3}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\alpha x}}{\partial u^\beta} g^{x3} - b_{\alpha x} \frac{\partial g^{x3}}{\partial u^\beta}$$

$$+ b_{px} g^{x\eta} \Gamma_{\eta\alpha}^3 - b_{\alpha x} g^{x\eta} \Gamma_{\eta\beta}^3 = 0$$

两边同乘 $g_{\delta 3}$ 并对 3 加和, (注意 $(g_{\delta 3})$ 正定, 故所得等式与原等式等价):

$$\Leftrightarrow g_{\delta 3} \left[\left(\frac{\partial b_{px}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\alpha x}}{\partial u^\beta} \right) g^{x3} + b_{px} \frac{\partial g^{x3}}{\partial u^\alpha} - b_{\alpha x} \frac{\partial g^{x3}}{\partial u^\beta} + g^{x\eta} (b_{px} \Gamma_{\eta\alpha}^3 - b_{\alpha x} \Gamma_{\eta\beta}^3) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial b_{p\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} \right) + b_{px} g_{\delta 3} \frac{\partial g^{x3}}{\partial u^\alpha} - b_{\alpha x} g_{\delta 3} \frac{\partial g^{x3}}{\partial u^\beta} + g^{x\eta} b_{px} \underbrace{g_{\delta 3} \Gamma_{\eta\alpha}^3}_{\Gamma_{\eta\alpha}^\delta} - g^{x\eta} b_{\alpha x} \underbrace{g_{\delta 3} \Gamma_{\eta\beta}^3}_{\Gamma_{\eta\beta}^\delta} = 0$$

代入第 2 类 Christoffel symbol 的定义式, 我们有:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial b_{p\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} \right) + b_{px} g_{\delta 3} \frac{\partial g^{x3}}{\partial u^\alpha} - b_{\alpha x} g_{\delta 3} \frac{\partial g^{x3}}{\partial u^\beta} + b_{px} \frac{1}{2} g^{x\eta} \left(\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial u^\eta} - \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\eta} \right) - b_{\alpha x} \frac{1}{2} g^{x\eta} \left(\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\eta} - \frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\delta} \right) = 0$$

再注意到 $0 = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} (g_{\delta\gamma} g^{\gamma\delta}) = \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial u^\alpha} g^{\gamma\delta} + g_{\delta\gamma} \frac{\partial g^{\gamma\delta}}{\partial u^\alpha}$

$0 = \frac{\partial}{\partial u^\beta} (g_{\delta\gamma} g^{\gamma\delta}) = \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial u^\beta} g^{\gamma\delta} + g_{\delta\gamma} \frac{\partial g^{\gamma\delta}}{\partial u^\beta}$

我们有

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial b_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} \right) + \underbrace{b_{\beta\gamma} \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial u^\alpha} g^{\gamma\delta}}_{= -\Gamma_{\delta\alpha}^\gamma} + \underbrace{b_{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial u^\beta} g^{\gamma\delta}}_{= -\Gamma_{\delta\beta}^\gamma} + b_{\beta\gamma} \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial u^\eta} - \frac{\partial g_{\eta\alpha}}{\partial u^\delta} \right) - b_{\alpha\gamma} \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\eta} - \frac{\partial g_{\eta\beta}}{\partial u^\delta} \right) = 0$$

合并同类项

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial b_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} \right) + b_{\beta\gamma} \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial u^\eta} - \frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\eta\alpha}}{\partial u^\delta} \right) - b_{\alpha\gamma} \frac{1}{2} g^{\gamma\eta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\eta} - \frac{\partial g_{\eta\delta}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\eta\beta}}{\partial u^\delta} \right) = 0$$

$= -\Gamma_{\delta\beta}^\gamma$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial b_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + b_{\alpha\gamma} \Gamma_{\delta\beta}^\gamma - b_{\beta\gamma} \Gamma_{\delta\alpha}^\gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial b_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial b_{\delta\alpha}}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\delta\beta}^\gamma b_{\gamma\alpha} - \Gamma_{\delta\alpha}^\gamma b_{\gamma\beta} = 0$$

这就是 Codazzi 方程 (C).

通过上面的计算, 我们知道, 曲面的第一基本形式(系数)和第二基本形式(系数)并不是相互独立的, 它们必须满足 Gauss 方程 (G) 和 Codazzi 方程 (C), 合称为 Gauss-Codazzi 方程, 或称为曲面的结构方程。

方程(C)也称 Codazzi - Mainardi 方程, 是由两位意大利数学家 Gaspare Mainardi (1856) 和 Delfino Codazzi (1868-1869) 各自独立推出. 实际上这个方程的最早版本由俄国数学家 Karl Mikhailovich Peterson 在其 1853 年的毕业论文中 (后来发表) 中给出.

我们第一次遇到这么复杂一些 (指标很多) 的公式, 可能会问这种公式如何去学呢?

第一境界, 就是观察它, 各个指标是否具有对称性? 熟悉它, 或许试图记住它.

第二境界, 知道它从何处来, 从什么基本原理来? 也就是若要用到, 可以临时去推导它.

第三境界, 就是通过不断地琢磨, 理解它背后的有何意义. 这一层没有止境, 要不断地重复, 不断地品味, 如切如磋, 如琢如磨.

我们下面就一起朝这个方向讨论这两个结构方程. (这实际上是两组方程). 我们先来看 Gauss 方程 (组):

$$\left[\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\delta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\beta} = b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta}^{\beta} - b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma}^{\beta} \right] \quad (G)$$

我们先把上式右端上指标“拉下来”: (G) 等价于将两边同乘 $g_{\delta\gamma}$ 再对 γ 加和后得到的方程

$$g_{\delta\gamma} \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\delta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\beta} \right) = b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} - b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma}$$

我们引入 Riemann 记号:

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} := -g_{\delta\gamma} \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}}{\partial u^{\delta}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\delta}^{\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\delta}^{\eta} \Gamma_{\eta\gamma}^{\beta} \right) \quad (*)$$

则 (G) $\Leftrightarrow$
$$R_{\delta\alpha\beta\gamma} = -b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} + b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma}$$