$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{3} c^i e_i$$

$$e_i' = \sum_{j=1}^{3} t_i^j e_j \,, i=1,2,3$$

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \\ t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \\ t_3^1 & t_3^2 & t_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

T 是正交阵，$\det T = \pm 1$.

→ $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$ 相差原点间的一个平移和矩阵T诱导的正交变换.

定义：给定欧氏空间一个正交标架，称为给定欧氏空间一个定向. 若 $\det T = 1$，两个标架称为定向相同；否则称它们定向相反 (orientation)

定向相同是一个等价关系.

例：$\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O; e_2, e_3, e_1\}$ 定向相同

$\{O; e_1, e_2, e_3\}$ 和 $\{O; -e_1, e_2, e_3\}$ 定向相反

$\mathbb{R}^3$ 中 $\{i, j, k\}$ 决定的定向称为自然定向（右手定向）

一点 $P \in E^3$ 在不同标架下，有不同坐标：

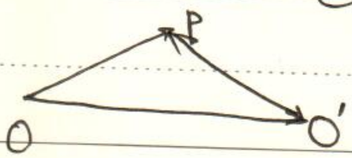
$\{O; e_1, e_2, e_3\}$ $\qquad$ $\{O'; e_1', e_2', e_3'\}$

(x^1, x^2, x^3) $\qquad$ (y^1, y^2, y^3)

↓ $\qquad$ ↓

$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{3} x^i e_i$ $\qquad$ $\overrightarrow{O'P} = \sum_{i=1}^{3} y^i e_i'$

从而 $\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{3} x^i e_i$



$$= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} c^i e_i + \sum_{j=1}^{3} y^j e_j'$$

$$= \sum_{i=1}^{3} c^i e_i + \sum_{j=1}^{3} y^j \sum_{i=1}^{3} t_j^i e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(c^i + \sum_{j=1}^{3} t_j^i y^j \right) e_i$$

$$\Rightarrow \quad x^i = c^i + \sum_{j=1}^{3} t_j^i y^j, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$(x^1, x^2, x^3) = (c^1, c^2, c^3) + (y^1, y^2, y^3) \begin{pmatrix} & T & \\ & & \end{pmatrix}.$$

§5. 保持欧氏结构的变换：合同变换

在 E^3 中取定一个正交标架，则它与3维欧氏向量空间等同.

两点之间距离：$P = (x^1, x^2, x^3)$，$Q = (y^1, y^2, y^3)$

$$d(P,Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y^i - x^i)^2}.$$

注意 $d(P,Q) = \underbrace{|\overrightarrow{PQ}|}_{\text{向量长度}} = \sqrt{\underbrace{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}_{\text{内积}}}.$

变换：空间中点之间一对一的对应.

合同变换（欧氏变换）：$T: E^3 \to E^3$

$$\text{s.t. } d(P,Q) = d(T(P), T(Q)), \ \forall P, Q \in E^3.$$

合同变换的一般表达式

$$O(3) = \{ T \ 3\times 3 \text{ 矩阵} \mid T^T T = I_3 \}$$

$$\mathcal{T} \longleftrightarrow (T, P_0)$$

$$\mathcal{T}(P) = PT + P_0 , \ \forall\, p \in E^3 . \qquad (1)$$

- 形如(1)的变换是合同变换
- 合同变换都形如(1)

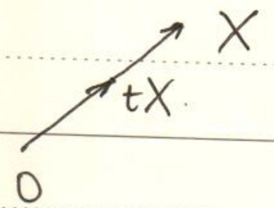
定理：设 $\mathcal{T}$ 是 E^3 的合同变换。则存在 $T \in O(3)$ 以及 $P \in E^3$ 使得

$$\mathcal{T}(X) = XT + P , \ \forall\, X = (x^1, x^2, x^3) \in E^3 .$$

证明：经过适当地平移，不妨设 $\mathcal{T}(0) = 0$.（保持原点不动）

对任一 $X \in E^3$, $X \neq 0$, ~~使定义有~~

Claim $\mathcal{T}(tX) = t\mathcal{T}(X)$, $\forall\, t \in (0,1)$



$$d(0, tX) = d(\mathcal{T}(0), \mathcal{T}(tX)) = d(0, \mathcal{T}(tX))$$

$$d(tX, X) = d(\mathcal{T}(tX), \mathcal{T}(X))$$

相加，有

$$d(0,X) = d(0,tX) + d(tX, X) = d(0, \mathcal{T}(tX)) + d(\mathcal{T}(tX), \mathcal{T}(X))$$

$$d(0,X) = d(\mathcal{T}(0), \mathcal{T}(X)) = d(0, \mathcal{T}(X)) \le d(0, \mathcal{T}(tX)) + d(\mathcal{T}(tX), \mathcal{T}(X))$$

triangle ineq.

故取等号. $\Rightarrow$ $\mathcal{T}(tX) = s\,\mathcal{T}(X)$ for some $s \in (0,1)$

进一步

$$t\,d(0,X) = d(0, tX) = d(0, \mathcal{T}(tX)) = d(0, s\mathcal{T}(X)) = s\,d(0, \mathcal{T}(X))$$

$\Rightarrow$ $s = t$. Claim proved.

利用式子 $T(tX) = t\,T(X)$, $\forall t \in (0,1)$ $\quad(*)$

坐标表示 $T(X) = (t^1(X), t^2(X), t^3(X))$, $\forall X \in E^3$.

$$T(tX) = (t^1(tX), t^2(tX), t^3(tX)) \quad t \in (0,1)$$

向量值函数 —— 依赖于参数变化的向量

$$tT(X) = (t\,t^1(X), t\,t^2(X), t\,t^3(X)), \quad t \in (0,1)$$

向量值函数.

向量值函数 $a(t) = (a^1(t), a^2(t), a^3(t))$ 的微商为

$$\frac{d}{dt}a(t) = \left(\frac{da^1(t)}{dt}, \frac{da^2(t)}{dt}, \frac{da^3(t)}{dt}\right).$$

对(*)求微商有

$$\frac{d}{dt}t^i(tX) = t^i(X), \quad i=1,2,3.$$

$$\|$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t^i}{\partial x^j}(tX)\cdot x^j \qquad \forall t \in (0,1).$$

令 $t \to 0$, 有 $t^i(X) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial t^i}{\partial x^j}(0)\cdot x^j$

即 $$T(X) = XT = (x^1, x^2, x^3)\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial t^1}{\partial x^1}(0), & \frac{\partial t^2}{\partial x^1}(0) & \frac{\partial t^3}{\partial x^1}(0) \\ \frac{\partial t^1}{\partial x^2}(0) & \frac{\partial t^2}{\partial x^2}(0) & \frac{\partial t^3}{\partial x^2}(0) \\ \frac{\partial t^1}{\partial x^3}(0) & \frac{\partial t^2}{\partial x^3}(0) & \frac{\partial t^3}{\partial x^3}(0) \end{pmatrix}}_{T}$$

因此 T 是一个线性变换 由于 T 保距离, 亦保内积. 故 $T \in O(3)$.

□

几何角度: $X \longrightarrow \underbrace{XT}_{\text{旋转/镜面反射}} + \underbrace{P}_{\text{平移}}$, $T \in O(3)$, $P \in E^3$

合同变换全体构成一个群：三维合同(欧氏)变换群.

$\det T = 1$　　刚体运动

$\det T = -1$　　反向刚体运动

§(6) 反思：E³ 的正交标架全体 F 与 E³ 的欧氏变换群一一对应

给定一个标架（正交），经合同变换，得另一标架（正交）

给定两个正交标架，可通过唯一的一个合同变换把一个变为另一个.

§(7) 向量分析 in $\mathbb{R}^3$

由上面定理的证明，我们看到，需要研究依赖于参数变化的向量，即向量值函数. 设向量 $\vec{a}(t)$ 依赖于参数 t，其坐标可写为

$$\vec{a}(t) = (a^1(t),\ a^2(t),\ a^3(t)) \in \mathbb{R}^3$$

换言之，$\vec{a}(t)$ 是三个有序的实函数.

如果 $a^1(t), a^2(t), a^3(t)$ 是三个连续可微函数.

则称 $\vec{a}(t)$ 是连续可微的.

微商 $$\frac{d}{dt}\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{da^1}{dt}, \frac{da^2}{dt}, \frac{da^3}{dt}\right).$$

设 $\lambda(t)$ 为一实函数. 可验证.

(i) $\frac{d}{dt}(\lambda\vec{a}) = \frac{d\lambda}{dt}\vec{a} + \lambda\frac{d}{dt}\vec{a}$.

(ii) $\frac{d}{dt}\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b}\rangle + \langle\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt}\rangle$

(iii) $\frac{d}{dt}\vec{a}\wedge\vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\frac{d\vec{b}}{dt}$

(iv) $\frac{d}{dt}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\frac{d\vec{a}}{dt},\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a},\frac{d\vec{b}}{dt},\vec{c}) + (\vec{a},\vec{b},\frac{d\vec{c}}{dt})$.

求微分的方法
应用广泛.

定理: 设 $\vec{a}(t)$ 是一个连续可微的向量函数, 则 $\vec{a}(t)$ 的长度是常数 当且仅当 $\langle\vec{a}(t), \vec{a}'(t)\rangle = 0$.

证明: 因为 $\vec{a}(t)$ 的长度 $|\vec{a}(t)| = \sqrt{\langle\vec{a}(t), \vec{a}(t)\rangle}$, 故 ~~$\langle\vec{a}(t), \vec{a}(t)\rangle$ 为常数~~ $|\vec{a}(t)|$ 为常数 $\Leftrightarrow$ $\langle\vec{a}(t), \vec{a}(t)\rangle$ 为常数.

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\langle\vec{a}(t), \vec{a}(t)\rangle = 0$$
$$\frac{d}{dt}\langle\vec{a}(t), \vec{a}(t)\rangle = 2\langle\vec{a}(t), \vec{a}'(t)\rangle.$$
$\square$

作业: ~~证明~~ 设 $\vec{a}(t)$ 是一个连续可微的 处处非零向量函数. 则 (1) $\vec{a}(t)$ 的方向不变 当且仅当 $\vec{a}'(t) \wedge \vec{a}(t) = 0$.

(2). 如果 $\vec{a}(t)$ 与某一个固定的方向垂直, 那么
$$(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) = 0.$$
反之, 如果 $(\vec{a}(t), \vec{a}'(t), \vec{a}''(t)) = 0$, 且处处有 $\vec{a}'(t) \times \vec{a}''(t) \neq 0$ 那么 $\vec{a}(t)$ 必定与某一个固定的方向垂直.

为了后面的需要, 我们进一步回忆下 ~~向量分析~~ ~~向量~~ 梯度、散度、旋度的概念

设 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为一函数. 其梯度 (gradient) 定义为
$$\operatorname{grad} f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

注意, 这是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个向量值函数!! (通常也称为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个向量场)

记法: Nabla 算子 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
$$\operatorname{grad} f =: \nabla f$$

给定一向量场 $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

其散度 (divergence) 定义为

$$\mathrm{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

记法： $\mathrm{div} F = \langle \nabla, F \rangle$

其旋度定义为 (rotation)

$$\mathrm{rot}\, F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, -\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

记法 $\mathrm{rot} F = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

设 $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. 我们有.

(i) $$\begin{aligned} \mathrm{div}(fF_1 + gF_2) &= \langle \nabla, fF_1 + gF_2 \rangle \\ &= \langle \nabla, fF_1 \rangle + \langle \nabla, gF_2 \rangle \\ &= f\langle \nabla, F_1 \rangle + \langle \nabla f, F_1 \rangle \\ &\quad + g\langle \nabla, F_2 \rangle + \langle \nabla g, F_2 \rangle \\ &= f\,\mathrm{div}(F_1) + g\,\mathrm{div}(F_2) + \langle \nabla f, F_1 \rangle + \langle \nabla g, F_2 \rangle . \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} &\mathrm{rot}(fF_1 + gF_2) \\ &= \nabla \wedge (fF_1 + gF_2) = \nabla \wedge (fF_1) + \nabla \wedge (gF_2) \\ &= \nabla f \wedge F_1 + f\, \nabla \wedge F_1 + \nabla g \wedge F_2 + g\, \nabla \wedge F_2 \\ &= \nabla f \wedge F_1 + f\,\mathrm{rot}(F_1) + \nabla g \wedge F_2 + g\,\mathrm{rot}(F_2). \end{aligned}$$

性质 (1) $\nabla \wedge (\nabla f) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0$

(2) $\langle \nabla, \nabla \wedge F \rangle = \mathrm{div}(\mathrm{rot} F) = 0$.

作业：验证上述性质 (1), (2).

实际上，向量场 对应于 外微分形式

∇ 外微分算子.

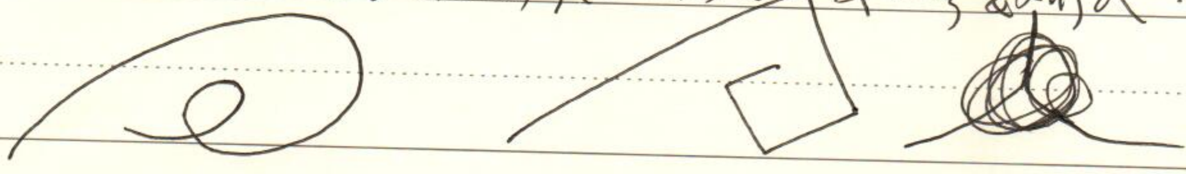
(II). 曲线的局部理论

§1 研究什么样的曲线?

如果将曲线看作是质点的运动轨迹，~~对于把 E^3 中的曲线~~
在时刻 t，其位置为 $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 = E^3$.
故曲线为映射

$$t \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \in E^3, \quad t \in (a,b)$$

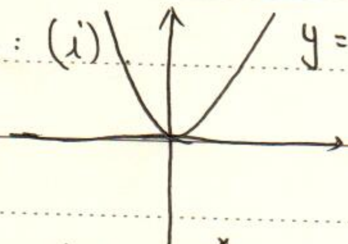
$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in (a,b)$ 为曲线的参数形式.



在这门课里，我们只考虑如下的"正则曲线".

定义 1.1： $r: (a,b) \longrightarrow E^3$ 称为正则曲线，如果
(1) 曲线的每一个分量都是 C^∞ 函数. （光滑性）
(2) $\left|\dfrac{dr}{dt}\right| > 0$，$\forall t \in (a,b)$ 成立 （浸入，局部1-1）
immersion

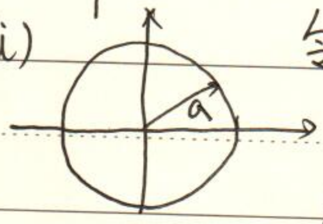
例子：(i)



$y = f(x) = x^2$

$$r(t) = (t, f(t)) = (t, t^2)$$

(ii)



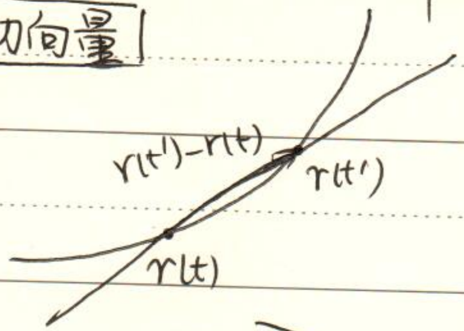
令 $F(x,y) = x^2 + y^2 - a^2$
方程 $F(x,y) = 0$ 决定此曲线
局部可显式表达 $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$
任一点局部可有参数表示 $(t, f(t))$

(iii) $r(t) = (a\cos t, a\sin t)$, $t \in (0, 4\pi)$
$\bar{r}(t) = (a\cos 2t, a\sin 2t)$, $t \in (0, 4\pi)$ 转圈数不同
$\tilde{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $t \in (0, 4\pi)$

§2 平面曲线

我们先来讨论平面正则曲线 $r(t)=(x(t),y(t))\in E^2$, $t\in(a,b)$

$\boxed{\text{切向量}}$



$$r'(t)=\lim_{t'\to t}\frac{r(t')-r(t)}{t'-t}$$

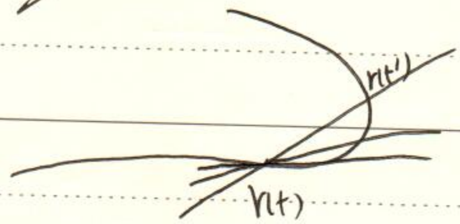
$t'>t$

$$=(x'(t),y'(t))$$

称为"切向量" tangent vector

长度: $|r'(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}>0$.

方向: 参数 t 增加方向.



曲线在每点处的 一阶近似:

$$c(u)=r(t_0)+r'(t_0)(u-t_0)$$

$\boxed{\text{弧长}}$: 曲线长度: ~~设 $[c,d]\subset(a,b)$~~ $r(t)$, $t\in[a,b]$.

弧长 $\int_c^d |r'(t)|\,dt$.

弧长函数 $s:[a,b]\to[0,\int_c^d|r'(t)|\,dt]$

$$s(t):=\int_c^t |r'(u)|\,du$$

注意 $\frac{ds}{dt}(t)=|r'(t)|>0 \quad \forall t\in[a,b]$.

故 s 是 t 的严格单增函数 故 s^{-1} 存在

$c:=r\circ s^{-1}$ 称为取弧长参数的曲线

好处:

$$\left|\frac{dc}{ds}\right|=\left|\frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds}\right|=\frac{ds}{dt}\cdot\left|\frac{dt}{ds}\right|\overset{单调性}{=}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{ds}=1.$$

2017.09.07