定理3.1（曲面的唯一性定理）

设 M_1 和 M_2 是定义在同一个参数区域 D 上的两个曲面，它们的参数表示分别为

$$r(u^1,u^2) \quad 和 \quad \tilde{r}(u^1,u^2).$$

如果 $\forall\,(u^1,u^2)\in D$，M_1 和 M_2 在 (u^1,u^2) 点有相同的第一基本形式和第二基本形式，则 M_1 和 M_2 相差一个 E^3 的刚体运动，即存在 E^3 的一个刚体运动 T 使得 $\tilde{r}=T\circ r$.

证明：取定一点 $(u_0^1,u_0^2)\in D$，则在该点处两个曲面 M_1 和 M_2 的两个标架分别为：

$$\text{自然}\ \{r(u_0^1,u_0^2);\ r_1(u_0^1,u_0^2),\ r_2(u_0^1,u_0^2),\ n(u_0^1,u_0^2)\} \qquad (a)$$

$$\{\tilde{r}(u_0^1,u_0^2);\ \tilde{r}_1(u_0^1,u_0^2),\ \tilde{r}_2(u_0^1,u_0^2),\ \tilde{n}(u_0^1,u_0^2)\} \qquad (b)$$

因为 M_1 和 M_2 在 (u_0^1,u_0^2) 有相同的第一基本形式，故而

$$|r_\alpha(u_0^1,u_0^2)|^2=|\tilde{r}_\alpha(u_0^1,u_0^2)|^2,\quad \alpha=1,2$$

$$\langle r_1(u_0^1,u_0^2),\ r_2(u_0^1,u_0^2)\rangle=\langle \tilde{r}_1(u_0^1,u_0^2),\ \tilde{r}_2(u_0^1,u_0^2)\rangle$$

而且 $\{r_1,r_2,n\}$ 和 $\{\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\tilde{n}\}$ 均为右手系定向 ~~如~~ 因此，存在 E^3 的一个刚体运动 T，把标架(a)变为标架(b).

回忆，第一基本形式和第二基本形式均在 E^3 的刚体运动下保持不动，所以曲面 $T(M_1)$ 和 M_2 在 (u_0^1,u_0^2) 点处有相同的自然标架，且处处有相同的第一基本形式和第二基本形式.

为方便起见，不妨仍记 $T(M_1)$ 的参数表示为 $r(u^1,u^2)$，则

$$\text{自然标架}\quad \{r;r_1,r_2,n\}\big|_{(u_0^1,u_0^2)}=\{\tilde{r};\tilde{r}_1,\tilde{r}_2,\tilde{n}\}\big|_{(u_0^1,u_0^2)}.$$

且满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha\\[2mm] \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}r_\gamma+b_{\alpha\beta}n\\[2mm] \dfrac{\partial n}{\partial u^\alpha}=-b_\alpha^\beta r_\beta\end{cases}\quad 和 \quad \begin{cases}\dfrac{\partial \tilde{r}}{\partial u^\alpha}=\tilde{r}_\alpha\\[2mm] \dfrac{\partial \tilde{r}_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\tilde{r}_\gamma+b_{\alpha\beta}\tilde{n}\\[2mm] \dfrac{\partial \tilde{n}}{\partial u^\alpha}=-b_\alpha^\beta \tilde{r}_\beta.\end{cases}$$

上述方程的系数相同是因为两个曲面的第一、第二基本形式处处相同，而这些系数由它们所确定。

上面的方程均有向量形式的未知函数，实际上每个有12个未知函数，u^1, u^2是自变量。由一阶线性偏微分方程组关于初值问题解的唯一性，我们得到

$$r=\tilde{r},\quad r_\alpha=\tilde{r}_\alpha,\ \alpha=1,2,\quad n=\tilde{n}.$$

特别地，$r=\tilde{r}$说明曲面$T(M_1)$和M_2相同。 □

下面说明Gauss方程和Codazzi方程是以给定的两个二次微分式为它的第一、第二基本形式的曲面存在的充分条件。

设$D\subset E^2$，$D=\{(u^1,u^2)\}$是一个平面区域，设

$$\varphi=g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta \quad 和 \quad \psi=b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$$

是定义在D内的两个二次微分式，其中$(g_{\alpha\beta})$，$(b_{\alpha\beta})$为对称阵，$(g_{\alpha\beta})$正定。我们记$(g^{\alpha\beta})=(g_{\alpha\beta})^{-1}$，为逆矩阵。利用$(g_{\alpha\beta})$，$(b_{\alpha\beta})$可以构造

$$b_\alpha^\beta=b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma=\frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left\{\frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\right\}.$$

定理3.2（曲面的存在性定理）如果上述两个二次微分式φ和ψ所诱导的$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$，$b_{\alpha\beta}$和$b_\alpha^\beta$满足Gauss方程（G）和Codazzi方程（C），则对任意$u_0=(u_0^1,u_0^2)\in D$，存在u_0的一个邻域$U\subset D$以及定义在U上的~~曲面~~一个正则参数曲面$r(u^1,u^2):U\to E^3$，使得φ和ψ分别为该曲面的第一、第二基本形式。

证明：利用$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$，$b_{\alpha\beta}$和$b_\alpha^\beta$~~构造~~列出如下一阶偏微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha} = r_\alpha \\ \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} r_\gamma + b_{\alpha\beta} n \qquad \alpha, \beta = 1, 2. \\ \dfrac{\partial n}{\partial u^\alpha} = -b^\beta_\alpha r_\beta \end{cases} \tag{$*$}$$

其中 r, r_1, r_2, n 为写成向量形式的未知函数。因此，我们一共有 12 个未知函数，u^1, u^2 为自变量。根据一阶偏微分方程组的理论，方程组 $(*)$ 有解的充要条件是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\dfrac{\partial r}{\partial u^\beta}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial u^\gamma}\left(\dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\gamma}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial u^\beta}\left(\dfrac{\partial n}{\partial u^\alpha}\right) = \dfrac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(\dfrac{\partial n}{\partial u^\beta}\right) \end{cases} \tag{$**$}$$

由第 2 节的讨论可知，条件 $(**)$ 等价于 Gauss-Codazzi 方程。因此，在定理 3.2 的假设下，对任意 $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in D$，以及任意给定初值 r^0, r_1^0, r_2^0, n^0，必存在 u_0 的邻域 $U \subset D$ 以及定义在 U 上的（向量）~~函~~数 $r(u^1, u^2)$，$r_\alpha(u^1, u^2)$，$\alpha = 1, 2$，$n(u^1, u^2)$ 满足方程 $(*)$ 及初值条件

$$\begin{cases} r(u_0^1, u_0^2) = r^0 \\ r_\alpha(u_0^1, u_0^2) = r_\alpha^0, \quad \alpha = 1, 2. \\ n(u_0^1, u_0^2) = n^0 \end{cases} \tag{$***$}$$

下面的问题是：$r(u^1, u^2)$ 是否为一张正则参数曲面？$\{r_1, r_2, n\}$ 是否处处线性无关？（即 $\{r; r_1, r_2, n\}$ 是否给出一族标架？）

若是，r 是否以 φ 和 ψ 为它的第一基本形式和第二基本形式？为此等目的，我们甚码要求初值满足

是上面方程组 $(*)$ 的一组解。由一阶偏微分方程组关于初值问题的

$$\begin{cases} \langle r_\alpha^0, r_\beta^0 \rangle = g_{\alpha\beta}(u_0^1, u_0^2), \\ \langle r_\alpha^0, n^0 \rangle = 0, \\ \langle n^0, n^0 \rangle = 1, \quad (r_1^0, r_2^0, n^0) > 0. \end{cases} \quad (\text{****})$$

(定向右手系)

我们下面当然希望(****)在处处均成立。为此目的，我们来看函数 $\langle r_\alpha, r_\beta \rangle$, $\langle r_\alpha, n \rangle$, $\langle n, n \rangle$ 所满足的方程

$$\frac{\partial \langle r_\alpha, r_\beta \rangle}{\partial u^\gamma} = \langle \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi} r_\xi + b_{\alpha\gamma} n, r_\beta \rangle + \langle r_\alpha, \Gamma_{\beta\gamma}^{\xi} r_\xi + b_{\beta\gamma} n \rangle$$

$$= \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi} \langle r_\xi, r_\beta \rangle + \Gamma_{\beta\gamma}^{\xi} \langle r_\alpha, r_\xi \rangle + b_{\alpha\gamma} \langle n, r_\beta \rangle + b_{\beta\gamma} \langle r_\alpha, n \rangle$$

$$\frac{\partial \langle r_\alpha, n \rangle}{\partial u^\beta} = \langle \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} r_\xi + b_{\alpha\beta} n, n \rangle + \langle r_\alpha, -b_\beta^\gamma r_\gamma \rangle$$

$$= \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} \langle r_\xi, n \rangle + b_{\alpha\beta} \langle n, n \rangle - b_\beta^\gamma \langle r_\alpha, r_\gamma \rangle$$

$$\frac{\partial \langle n, n \rangle}{\partial u^\alpha} = 2 \langle -b_\alpha^\beta r_\beta, n \rangle = -2 b_\alpha^\beta \langle r_\beta, n \rangle.$$

故函数 $\langle r_\alpha, r_\beta \rangle$, $\langle r_\alpha, n \rangle$, $\langle n, n \rangle$ 满足方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \langle r_\alpha, r_\beta \rangle}{\partial u^\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma}^{\xi} \langle r_\xi, r_\beta \rangle + \Gamma_{\beta\gamma}^{\xi} \langle r_\alpha, r_\xi \rangle + b_{\alpha\gamma} \langle r_\beta, n \rangle + b_{\beta\gamma} \langle r_\alpha, n \rangle \\ \dfrac{\partial \langle r_\alpha, n \rangle}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\xi} \langle r_\xi, n \rangle + b_{\alpha\beta} \langle n, n \rangle - b_\beta^\gamma \langle r_\alpha, r_\gamma \rangle \\ \dfrac{\partial \langle n, n \rangle}{\partial u^\alpha} = -2 b_\alpha^\beta \langle r_\beta, n \rangle \end{cases} \quad (*)$$

可以直接验证，函数 $\langle r_\alpha, r_\beta \rangle = g_{\alpha\beta}$, $\langle r_\alpha, n \rangle = 0$, $\langle n, n \rangle = 1$ 是上面方程组(*)的一组解。由一阶偏微分方程组关于初值问题之解的唯一性知，满足初值(****)的方程组(*)的解为

$$\langle r_\alpha, r_\beta \rangle = g_{\alpha\beta}, \quad \langle r_\alpha, n \rangle = 0, \quad \langle n, n \rangle = 1.$$

因此 r_1, r_2 线性无关，曲面 $r(u^1, u^2)$ 是 E^3 的一个正则参数曲面，且第一基本形式为 φ.

又见 n 与 r_α, $\alpha=1,2$ 均垂直，且为单位向量.

初始时 $(r_1^0, r_2^0, n^0)>0$ 及解的连续性保证了 $(r_1, r_2, n)>0$（正的右手系定向）

故有 $n=\dfrac{r_1\wedge r_2}{|r_1\wedge r_2|}$.

从而曲面 r 的第二基本形式 (**) on page 163.

$$\mathrm{II} = \langle r_{\alpha\beta}, n\rangle du^\alpha du^\beta = b_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = \psi. \qquad \square$$

~~定理~~

注记：Gauss - Codazzi 方程是一阶线性偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha\\ \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma + b_{\alpha\beta} n\\ \dfrac{\partial n}{\partial u^\alpha}=-b_\alpha^\gamma r_\gamma\end{cases}$$

的"可积性条件"(integrability condition)，即其解存在的充分必要条件。

§4 正交活动标架

前面的计算讨论中，我们类比于对曲线的研究，证明了曲面论基本定理。主要工具是相应标架的运动方程：

曲面自然标架运动方程

$$\text{(i)}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha\\ \dfrac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma + b_{\alpha\beta} n, \quad \alpha,\beta=1,2\\ \dfrac{\partial n}{\partial u^\alpha}=-b_\alpha^\gamma r_\gamma\end{cases}$$

曲线 Frenet 标架运动方程

$$\text{(ii)}\quad\begin{cases}\dfrac{dc}{ds}=t(s)\\ \dfrac{dt}{ds}=\qquad k(s)n(s)\\ \dfrac{dn}{ds}=-kt \qquad +\tau b\\ \dfrac{db}{ds}=\qquad -\tau b\end{cases}$$

自然标架 $\{r; r_1, r_2, n\}$，$r_1 = r_u$，$r_2 = r_v$

Frenet 标架 $\{c; t, n, b\}$

为了使方程组(i)和(ii)更可比较，我们用一阶微分形式来代替偏导数。

比如 r 是一个向量值函数，则 dr 是一个向量值一阶微分形式

如设 $r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$

则
$$
\begin{aligned}
dr &:= (dx,\ dy,\ dz) = (x_u du + x_v dv,\ y_u du + y_v dv,\ z_u du + z_v dv) \\
&= (x_u du,\ y_u du,\ z_u du) + (x_v dv,\ y_v dv,\ z_v dv) \\
&= (x_u,\ y_u,\ z_u)\,du + (x_v,\ y_v,\ z_v)\,dv \\
&= r_u\,du + r_v\,dv \\
&= (du)\cdot r_u + (dv)\cdot r_v
\end{aligned}
$$

可以看作以一阶微分形式为系数的向量 r_u 和 r_v 的线性组合。

同样的办法，我们可以写

$$
\begin{aligned}
dr_\alpha &= \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} du^\beta = (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} r_\gamma + b_{\alpha\beta} n)\, du^\beta \\
&= (\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\, du^\beta)\, r_\gamma + (b_{\alpha\beta}\, du^\beta)\, n
\end{aligned}
$$

$$
dn = \frac{\partial n}{\partial u^\alpha} du^\alpha = (-b^\gamma_\alpha r_\gamma)\, du^\alpha = (-b^\gamma_\alpha\, du^\alpha)\, r_\gamma
$$

照此办法，上述两个方程组(i)和(ii)可写作

$$
(i')\begin{cases}
dr = (du^1)\, r_1 + (du^2)\, r_2 \\
dr_1 = (\Gamma^1_{1\beta} du^\beta)\, r_1 + (\Gamma^2_{1\beta} du^\beta)\, r_2 + (b_{1\beta} du^\beta)\, n \\
dr_2 = (\Gamma^1_{2\beta} du^\beta)\, r_1 + (\Gamma^2_{2\beta} du^\beta)\, r_2 + (b_{2\beta} du^\beta)\, n \\
dn = (-b^1_\alpha du^\alpha)\, r_1 + (-b^2_\alpha du^\alpha)\, r_2
\end{cases}
$$

和

$$
(ii')\begin{cases}
dc = (ds)\cdot t \\
dt = \qquad\qquad (\kappa ds)\, n \\
dn = (-\kappa ds)\, t \qquad\qquad + (\tau ds)\, b \\
db = \qquad\qquad (-\tau ds)\, b
\end{cases}
$$

如果我们只看每个方程组的后三个方程，我们可以把它们写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} dr_1 \\ dr_2 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1_{1\beta}du^\beta & \Gamma^2_{1\beta}du^\beta & b_{1\beta}du^\beta \\ \Gamma^1_{2\beta}du^\beta & \Gamma^2_{2\beta}du^\beta & b_{2\beta}du^\beta \\ -b^1_\beta du^\beta & -b^2_\beta du^\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ n \end{pmatrix} \qquad (i'')$$

和

$$\begin{pmatrix} dt \\ dn \\ db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa ds & 0 \\ -\kappa ds & 0 & \tau ds \\ 0 & -\tau ds & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \qquad (ii'')$$

由此可以看到前面计算复杂的一个可能原因：曲线Frenet标架运动方程（ii''）中矩阵为~~对称~~反对称阵：若记此阵为 $A=(a_i^j)$，有 $a_i^j + a_j^i = 0$，且形式简单（$a_1^3 = a_3^1 = 0$）。而曲面自然标架运动方程（i''）~~其~~中的矩阵则不具备这种性质。

那么原因何在呢？我们观察到两个标架的一个不同之处：Frenet标架在每点处，t, n, b 两两相互正交，且均为单位向量；而曲面的自然标架 r_u, r_v, n 中 n 为单位向量且与 r_u, r_v 均正交，但 r_u, r_v 的夹角以及 r_u, r_v 的长度均在变化，依赖于曲面~~曲线~~参数的选取。

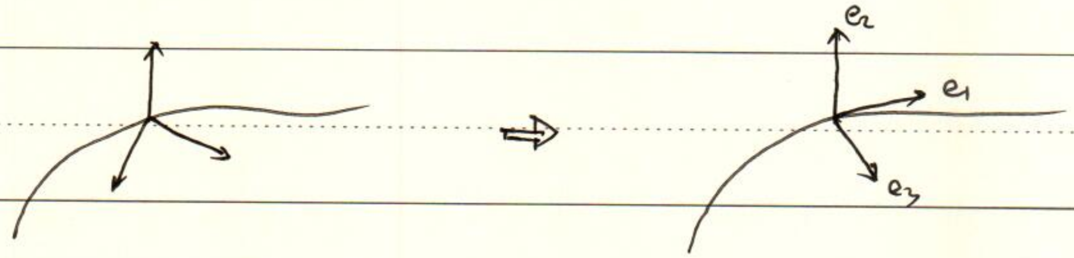
实际上，Frenet标架处处为"单位正交标架"这个性质正是其运动方程矩阵反称的原因所在！为看清这一点，我们作如下的讨论。

例 4.1：设 c(s) 是 E^3 中一条弧长参数曲线，每点处取一个正定向的单位正交标架 $\{c; e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$，且设 $e_i(s)$, $i=1,2,3$ 光滑地依赖于参数 s。特别的曲线的切向量可有如下表示

$$\frac{dc}{ds} = a^i e_i = a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3.$$

为了使这些选取的标架能反映出曲线的几何，我们取 $e_1(s) = \frac{dc}{ds}$，

也即 $a^1=1,\ a^2=a^3=0$.



这可以通过将最初取定的标架作适当正交变换得到.("原地转一下")

下面设 $\dfrac{dc}{ds}=e_1$.

我们还有 $\dfrac{de_i(s)}{ds}=q_i^j(s)e_j(s),\quad i=1,2,3.$

这就是我们所取标架沿曲线的运动方程。

"单位正交 ⇒ 矩阵反对称": 因为

$$\langle e_i(s), e_j(s)\rangle=\delta_{ij}$$

求导有

$$\begin{aligned} 0&=\langle \frac{de_i}{ds},e_j\rangle+\langle e_i,\frac{de_j}{ds}\rangle \\ &=\langle q_i^k e_k, e_j\rangle+\langle e_i, q_j^l e_l\rangle \\ &= q_i^j+q_j^i \end{aligned}$$

故而矩阵 (q_i^j) 满足 $q_i^j+q_j^i=0$.

特别地 $q_i^i=0,\ i=1,2,3$.

所以,标架的单位正交性,保证了运动方程矩阵形如

$$\begin{pmatrix} 0 & q_1^2 & q_1^3 \\ -q_1^2 & 0 & q_2^3 \\ -q_1^3 & -q_2^3 & 0 \end{pmatrix}$$

接下来看能不能把矩阵变得更简单:"能否把 q_1^3 变为0"? 我们现在 $e_1(s)$ 逐点处已固定,但我们还可以把 $\{e_2,e_3\}$ "转一下"。

也就是我们逐点处选一个新标架 $\{c;\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3\}$ 使得