$$\tilde{e}_1(s) = e_1(s)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_2 \\ \tilde{e}_3 \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(s)) & \sin(\theta(s)) \\ -\sin(\theta(s)) & \cos(\theta(s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}(s) \quad (\text{"转一下"})$$

~~可选~~ ~~de_1~~ ~~是由~~ $\{c; \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ 仍为单位正交标架.

可设 $\dfrac{d\tilde{e}_1}{ds} = \tilde{q}_1^2 \tilde{e}_2 + \tilde{q}_1^3 \tilde{e}_3$

由我们的取法知道:

$$\tilde{q}_1^2 \tilde{e}_2 + \tilde{q}_1^3 \tilde{e}_3 = \frac{d\tilde{e}_1}{ds} = \frac{de_1}{ds} = q_1^2 e_2 + q_1^3 e_3$$

$$\|$$

$$\tilde{q}_1^2 (\cos\theta\, e_2 + \sin\theta\, e_3) + \tilde{q}_1^3 (-\sin\theta\, e_2 + \cos\theta\, e_3)$$

$$= (\tilde{q}_1^2 \cos\theta + \tilde{q}_1^3 (-\sin\theta))\, e_2 + (\tilde{q}_1^2 \sin\theta + \tilde{q}_1^3 \cos\theta)\, e_3$$

由于 e_2, e_3 线性无关, 我们有

$$\begin{cases} q_1^2 = \tilde{q}_1^2 \cos\theta - \sin\theta\, \tilde{q}_1^3 \\ q_1^3 = \sin\theta\, \tilde{q}_1^2 + \cos\theta\, \tilde{q}_1^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} q_1^2 \\ q_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^2 \\ \tilde{q}_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \tilde{q}_1^2 \\ \tilde{q}_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^2 \\ q_1^3 \end{pmatrix}$$

也即 $\begin{pmatrix} \tilde{q}_1^2 \\ \tilde{q}_1^3 \end{pmatrix}$ 由将 $\begin{pmatrix} q_1^2 \\ q_1^3 \end{pmatrix}$ 旋转角度 θ 得到。从而其长度不变, 也即

$$(q_1^2)^2 + (q_1^3)^2 = (\tilde{q}_1^2)^2 + (\tilde{q}_1^3)^2$$ 不依赖于标架选取 (确定 $e_1 = \frac{dc}{ds}$ 后)

又观察到 $\sqrt{(q_1^2)^2 + (q_1^3)^2} = \left|\dfrac{de_1}{ds}\right| = \kappa(s)$. 是曲线的曲率!

当 $\kappa > 0$, 也就是 $(q_1^2)^2 + (q_1^3)^2 > 0$ 时, 可选取 θ 使得

$$\tilde{q}_1^3 = -\sin\theta\, q_1^2 + \cos\theta\, q_1^3 = 0.$$

(不妨设 $q_1^2 \neq 0$, 可取 $\tan\theta = \dfrac{q_1^3}{q_1^2}$, $\theta \in$ ~~$(0, \frac{\pi}{2})$~~ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 如 $q_1^2 > 0$, 取 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 如 $q_1^2 < 0$)

且 $\tilde{q}_1^2 = \cos\theta\, q_1^2 + \sin\theta\, q_1^3 > 0$

($q_1^2 \neq 0$, 上面选取使 $q_1^3 = \tan\theta\, q_1^2 \Rightarrow \tilde{q}_1^2 = (\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}) q_1^2 = \frac{1}{\cos\theta} q_1^2 > 0$)

从而在这样的标架下，有

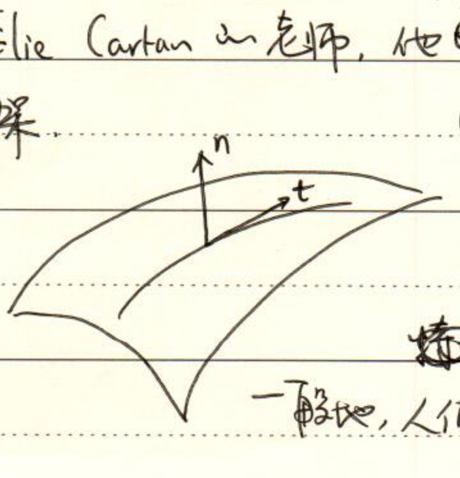
$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{e}_1}{ds} = \tilde{q}_1^2 \tilde{e}_2 \\ \dfrac{d\tilde{e}_2}{ds} = -\tilde{q}_1^2 \tilde{e}_1 + \tilde{q}_2^3 e_3 \\ \dfrac{d\tilde{e}_3}{ds} = -\tilde{q}_2^3 \tilde{e}_2 \end{cases}$$

其中 $\tilde{q}_1^2 = k(s) > 0$. 故上述标架就是曲线的 Frenet 标架. □

由上述讨论，我们看到，用单位正交标架可以使运动方程变得简便。我们自然想在曲面上也这么做。

为了下面讨论的精确，我们先来对"随点变化而光滑变化的标架"概念作一精确描述。我们称其为"活动标架"，英文为"Moving frames". 标架法主要是由法国数学家发展的，法文为"Repère mobile". 这里 Repère 的直译是在建新建筑过程中，或室内装修/设计过程中在墙上所做的临时标记. 所以英文直译为 "moving landmarks".

在 Cotton, Darboux, Frenet, Serret 等前辈工作基础之上，活动标架由法国大数学家 Élie Cartan 发扬光大。活动标架概念最初源于刚体运动，此时标架依赖于单参数时间 t 变化。后面逐渐由 Cotton、Darboux 等的工作推广到随多个变量变化的标架. Darboux 是 Élie Cartan 的老师，他研究一条嵌入到曲面中的曲线上的活动标架.



这时有两个自然的方向：单位切向 t 和曲面在该点单位法向 n. (取决于曲面定向). 第3个方向由 $t \wedge n$ 给出.

一般地，人们可以考虑曲面的随点光滑变化的单位正交标架.

回忆第一章我们知道 E^3 中单位正交标架的全体和 E^3 中的合同变换群一一对应！在这个意义下，E^3 中一张曲面可以看作是 E^3 的合同变换群的一个子集。Élie Cartan 把活动标架从欧氏合同变换群推广到任意李群，将其发展为十分强大的研究工具。

定义 4.1（光滑向量场）参数曲面 $r=r(u,v)$ 上的光滑向量场 $x(u,v)$ 是指对于曲面上任一点 $r(u,v)$，$x(u,v)$ 是从点 $r(u,v)$ 出发的一个向量且 $x(u,v)$ 光滑地依赖于参数 (u,v).

定义 4.2（活动标架场）以参数曲面 $r=r(u,v)$ 上的点为原点的 E^3 的标架 $\{r(u,v); x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)\}$，其中 x_1, x_2, x_3 是曲面上的处处线性无关的光滑向量场，即 $(x_1, x_2, x_3)\neq 0$，称为曲面上的活动标架场。

一般我们要求 $(x_1,x_2,x_3)>0$. 如果 $\{x_1,x_2,x_3\}$ 为单位正交标架，则称 $\{r(u,v); x_1,x_2,x_3\}$ 为曲面的正交活动标架.

在 E^3 的一个曲面上，我们可在各点的切平面上取单位正交向量 e_1, e_2，即 $\langle e_1,e_1\rangle=\langle e_2,e_2\rangle=1$，$\langle e_1,e_2\rangle=0$，且 e_1, e_2 为光滑向量场。这总是可以做到的。（如设 $r=r(u,v)$ 为曲面 M 的一个参数表示，则可通过对 $\{r_u, r_v\}$ 施行 Schmidt 正交化，取

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{r_u}{|r_u|} \\ e_2 = \dfrac{r_v-\langle r_v,e_1\rangle e_1}{|r_v-\langle r_v,e_1\rangle e_1|} \end{cases}$$

）.

取 $e_3:=e_1\wedge e_2$，则 e_3 为曲面的单位法向量场. 这样我们就

得到曲面 M 的一个正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$.

§4.1 正交活动标架运动方程:

$\{r; e_1, e_2, e_3\}$

dr 是一个向量值一阶微分形式.

$$dr = r_u du + r_v dv = du \cdot r_u + dv \cdot r_v$$

因为 $\{r_u, r_v\}$ 和 $\{e_1, e_2\}$ 均为一点处切平面的基, 所以有:

$$\begin{cases} r_u = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ r_v = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

其中 $\{a_{\alpha\beta} : \alpha, \beta = 1, 2\}$ 均为曲面 M 上的光滑函数.

从而
$$\begin{aligned} dr &= du(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + dv(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= \underbrace{(a_{11}du + a_{21}dv)}\, e_1 + \underbrace{(a_{12}du + a_{22}dv)}\, e_2 \end{aligned}$$

→ 均为一阶微分形式.

可记 $\omega^1 = a_{11}du + a_{21}dv$, $\omega^2 = a_{12}du + a_{22}dv$

就有: $dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$ ——— ①

这里, 也可以写 $\omega^1 = \langle dr, e_1 \rangle$, $\omega^2 = \langle dr, e_2 \rangle$

下面考查 de_i, $i = 1, 2, 3$. 因 de_i 是向量值一阶微分形式. 它可表示成 e_1, e_2, e_3 以一阶微分形式为系数的线性组合:

$$de_i = \omega_i^1 e_1 + \omega_i^2 e_2 + \omega_i^3 e_3$$

其中 $\omega_i^j = \langle de_i, e_j \rangle$ 为一阶微分形式.

类似于前面考查的曲线情形, $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 为正交活动标架意味着

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

微分得 $\langle de_i, e_j\rangle + \langle e_i, de_j\rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0$$

特别地 $\omega_i^i = 0$，$i=1,2,3$。因此，我们得到：

命题4.1：设 M 是 E^3 中曲面，$\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 是 M 的正交活动标架，则其运动方程为

$$\begin{cases} dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \\ de_1 = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} & dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \\ & \begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ -\omega_1^2 & 0 & \omega_2^3 \\ -\omega_1^3 & -\omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

且其中 $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$。

§4.2 第一基本形式和第二基本形式

在上述正交活动标架下，我们有第一基本形式

$$\mathrm{I} = \langle dr, dr\rangle = \langle \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2\rangle$$
$$= \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2$$

第二基本形式

$$\mathrm{II} = -\langle dr, dn\rangle = -\langle dr, de_3\rangle = -\langle \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2\rangle$$
$$= -\omega^1\omega_3^1 - \omega^2\omega_3^2 = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3$$

注记：我们也可以类似于自然标架的运算，利用第一基本形式系数矩阵定义"把指标拉下来"。但这时 I 系数阵为 $\{\delta_{ij}\}$，故我们可定义

$$\omega_i := \omega^j \delta_{ij}$$
$$\omega_{ij} := \omega_i^k \delta_{kj}$$

注意这时候，$\omega_i = \omega^j\delta_{ij} = \omega^i$

$$\omega_{ij} = \omega_i^j$$

也就是说，在这套记号下，可以不必区分 ω_i 和 ω^i，ω_{ij} 和 ω_i^j。

回忆我们在自然标架下讨论 I、II 时，证明了 I 与参数选取无关，II 与同定向的参数选取无关。在正交活动标架下，我们有：

命题 4.2：曲面的第一基本形式与正交活动标架的选取无关。

曲面的第二基本形式与同法向的正交标架选取无关。

注意，我们上述正交标架是指 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 中 e_1, e_2 为切向量场的正交活动标架。所以，要证明命题4.2，只需证把 $\{e_1, e_2\}$ 旋转一下，变成 $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$，即

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

后，第一基本形式 $I = \langle dr, dr \rangle$ ~~$= \langle dr, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle dr, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$~~

不会变化。进一步，如果 $\bar{e}_3 = e_3$，证明 $II = -\langle dr, d\bar{e}_3 \rangle$ 也不变。

证明：$I = \bar{\omega}^1 \bar{\omega}^1 + \bar{\omega}^2 \bar{\omega}^2 = \langle dr, \bar{e}_1 \rangle \langle dr, \bar{e}_1 \rangle + \langle dr, \bar{e}_2 \rangle \langle dr, \bar{e}_2 \rangle$

其中 $\langle dr, \bar{e}_1 \rangle = \langle dr, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \rangle$

$= \cos\theta\, \omega^1 + \sin\theta\, \omega^2$

$\langle dr, \bar{e}_2 \rangle = \langle dr, -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2 \rangle$

$= -\sin\theta\, \omega^1 + \cos\theta\, \omega^2$

$$\Rightarrow I = (\cos\theta\, \omega^1 + \sin\theta\, \omega^2)(\cos\theta\, \omega^1 + \sin\theta\, \omega^2) + (-\sin\theta\, \omega^1 + \cos\theta\, \omega^2)\cdot(-\sin\theta\, \omega^1 + \cos\theta\, \omega^2)$$

$$= \cos^2\theta\, \omega^1\omega^1 + 2\cos\theta\sin\theta\, \omega^1\omega^2 + \sin^2\theta\, \omega^2\omega^2 + \sin^2\theta\, \omega^1\omega^1 - 2\sin\theta\cos\theta\, \omega^1\omega^2 + \cos^2\theta\, \omega^2\omega^2 = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2.$$

而 ~~$-\langle dr, d\bar{e}_3 \rangle$~~ $II = \bar{\omega}^1 \bar{\omega}_1^3 + \bar{\omega}^2 \bar{\omega}_2^3$

~~$= -\langle dr, d\bar{e}_3 \rangle$~~ $= (\cos\theta\, \omega^1 + \sin\theta\, \omega^2)\bar{\omega}_1^3 + (-\sin\theta\, \omega^1 + \cos\theta\, \omega^2)\bar{\omega}_2^3$

$\bar{\omega}_1^3 = -\langle d\bar{e}_3, \bar{e}_1 \rangle = -\langle de_3, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2 \rangle = \cos\theta\, \omega_1^3 + \sin\theta\, \omega_2^3$

$$\bar{\omega}_2^3 = -\bar{\omega}_3^2 = -\langle d\bar{e}_3, \bar{e}_2\rangle = -\langle de_3, -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2\rangle$$
$$= \sin\theta\, \omega_3^1 - \cos\theta\, \omega_3^2$$
$$= -\sin\theta\, \omega_1^3 + \cos\theta\, \omega_2^3.$$

故而 $\mathrm{II} = (\cos\theta\,\omega^1 + \sin\theta\,\omega^2)(\cos\theta\,\omega_1^3 + \sin\theta\,\omega_2^3)$
$$+ (-\sin\theta\,\omega^1 + \cos\theta\,\omega^2)(-\sin\theta\,\omega_1^3 + \cos\theta\,\omega_2^3)$$
$$= \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 \qquad \square$$

下面我们来考察 I, II 在正交活动标架下的系数矩阵.

~~由已第一基本形式有~~：

$$\mathrm{I} = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2 = (\omega^1\ \omega^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

单位矩阵

第二基本形式有

$$\mathrm{II} = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3 = (\omega^1\ \omega^2)\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = (\omega_1^3\ \omega_2^3)\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

注意 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^3, \omega_2^3$ 均为~~第二基本~~一阶微分式, 都是 du, dv 的线性组合. 我们的问题是：ω_1^3, ω_2^3 是否为 ω^1, ω^2 的线性组合?

回忆, 前面我们已经讨论过, 当

$$\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} =: A\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

时, 有
$$\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \qquad (*)$$

而第一基本形式 $\mathrm{I} = (du\ dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

$$= (\omega^1\ \omega^2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$
$$= (du\ dv)\, A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A^T\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

故而 $AA^T = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. 我们知道 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 正定, 故而

$(\det A)^2>0$. 特别地 A 可逆！

因此，(*) 告诉我们，du, dv 也可写成 ω^1, ω^2 的线性组合.

回忆 ω_1^3, ω_2^3 可写成 du, dv 的线性组合

两相结合，我们知道 ω_1^3, ω_2^3 可写成 ω^1 和 ω^2 的线性组合.

设 $$\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$$

从而我们有
$$\mathrm{II}=(\omega^1\ \ \omega^2)\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}=(\omega^1\ \ \omega^2)\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$$

同时，我们又有
$$\mathrm{II}=(\omega_1^3\ \ \omega_2^3)\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}=(\omega^1\ \ \omega^2)\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$$

~~这说明~~ $\cancel{\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}}$ ~~为对称矩阵~~

但这里得不到对称性，即 $h_{12}=h_{21}$ 我们要用到后面讨论的结构方程来证明 $h_{12}=h_{21}$. 这里先假定这个对称性成立

§4.3 Weingarten 变换：

回忆 Weingarten 变换为 $W: T_pM \to T_pM$ 线性变换
$$\lambda r_u+\mu r_v \longmapsto -(\lambda n_u+\mu n_v)$$

它在自然标架下的矩阵为
$$W\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}r_u\\ r_v\end{pmatrix}$$

现在来考查它在正交活动标架下的矩阵：

由 W 的线性性及定义，我们有
$$W(dr)=W(du\, r_u+dv\, r_v)=du(-n_u)+dv(-n_v)=-dn$$

故而有 $$W(\omega^1 e_1+\omega^2 e_2)=-de_3=-(\omega_3^1 e_1+\omega_3^2 e_2)=\omega_1^3 e_1+\omega_2^3 e_2.$$

$$= (h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2)e_1 + (h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2)e_2 \qquad (\#)$$

从而

$$W\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

(注：~~(#)~~(#)式中，令 $\omega^2=0$ 得 $W(e_1)$，令 $\omega^1=0$ 得 $W(e_2)$)

也即，在正交标架下，Weingarten 变换的系数矩阵就是第二基本形式的系数矩阵。记

$$B = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

我们有：

<u>命题 4.3</u> 矩阵 B 的特征值是曲面主曲率。曲面的 Gauss 曲率

$$K = \det B = (h_{11}h_{22} - h_{12}^2)$$

平均曲率 $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}B = \frac{1}{2}(h_{11}+h_{22})$.

证明：由于 B 对称，故其特征值为实数。只须证明 $K=\det B$，$H=\frac{1}{2}\operatorname{tr}B$

(因为 $\begin{matrix} a+b=2H \\ ab=K \end{matrix}$ 唯一确定数组 $\{a,b\}$，故 B 特征值只能是主曲率)

回忆 $\mathrm{II} = (du\ dv)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

$$= (\omega^1\ \omega^2)\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$= (du\ dv)\, A\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}A^T\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

quadratic form 和 symmetric matrix 相互确定!!

这里要用到 B 的对称性从而 ABA^T 对称，同时因为 $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ 也是对称的，故而

~~因此~~有 $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = ABA^T \Rightarrow B = A^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}(A^T)^{-1}$

因此，$\det B = \det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\cdot\det(\underbrace{AA^T}_{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}})^{-1} = \dfrac{\det\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} = K.$

$\frac{1}{2}\operatorname{tr}B = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(A^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}(A^T)^{-1}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}(AA^T)^{-1}\right) = H.$ □

~~因此~~，在选取正交活动标架时，我们总可以~~把~~"转一下"，把 e_1, e_2 取成曲面的主方向。

当曲面没有脐点时，

$$\omega(e_1) = k_1 e_1, \quad \omega(e_2) = k_2 e_2$$

$$\Rightarrow \quad \omega\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

即此时 $B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$.

$$\omega_1^3 = k_1 \omega^1, \quad \omega_2^3 = k_2 \omega^2.$$

$\Rightarrow$ 曲面第二基本形式 $\mathrm{II} = k_1 \omega^1\omega^1 + k_2 \omega^2\omega^2$.

§5 外微分形式

现在我们为推导正交活动标架下，曲面的结构方程作些准备。回忆正交活动标架运动方程

$$\begin{cases} dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \\ de_i = \omega_i^j e_j \qquad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \end{cases}$$

这里的问题是正交标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 不再直接依赖于参数，故不能讨论求导。我们需要一种微分（向量值）一阶微分形式（$dr, \omega^1, \omega^2, de_i, \omega_i^j$）的办法。

注意到平面参数区域 $D = \{(u,v)\}$ 上的一阶微分形式可写为

$$f\,du + g\,dv$$

可看作是 du, dv 所张成的线性空间里的元素，以函数 f, g 为系数。

要微分 ~~du~~ 一个一阶微分形式，我们需要一个更高阶（二阶）微分形式。这个二阶微分形式应是个面积微元。类似于向量外积，我们定义 $du \wedge dv$ 为 du, dv 生成的平行四边形的有向面积微元。

故而有 $du \wedge dv = -dv \wedge du$.

我们由此可定义两个一阶微分形式的外积运算（定义为线性运算）.

通过要求这个外积运算"$\wedge$"满足：对任意一阶微分形式 $\theta, \varphi, \theta_1, \theta_2$

(1) 线性：$(\lambda\theta_1+\mu\theta_2)\wedge\varphi = \lambda(\theta_1\wedge\varphi)+\mu(\theta_2\wedge\varphi_2)$

函数

(2) 反交换律：$\theta\wedge\varphi = -\varphi\wedge\theta \quad (\Rightarrow \theta\wedge\theta = 0)$

这样对任两个一阶微分形式

$$\theta = f_1\,du + f_2\,dv, \quad \varphi = g_1\,du + g_2\,dv$$

我们就有

$$\begin{aligned}\theta\wedge\varphi &= (f_1\,du+f_2\,dv)\wedge(g_1\,du+g_2\,dv)\\ &= f_1g_2\,du\wedge dv + f_2g_1\,dv\wedge du\\ &= (f_1g_2-f_2g_1)\,du\wedge dv\end{aligned}$$

例子：~~设 $\{e_1, e_2\}$ 是曲面的正交标架~~ 回忆 $dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$

e_1, e_2 是曲面的正交切标架，ω^1, ω^2 为相应一阶微分形式

则我们有

$$\begin{aligned}\omega^1\wedge\omega^2 &= (a_{11}\,du + a_{21}\,dv)\wedge(a_{12}\,du + a_{22}\,dv)\\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\,du\wedge dv\\ &= \det A\ du\wedge dv\end{aligned}$$

另一方面回忆 $AA^T = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}$，即 $(\det A)^2 = EG-F^2$

故 $\omega^1\wedge\omega^2 = \sqrt{EG-F^2}\,du\wedge dv$

正是曲面的有向面积微元. □

我们称形如 $f\,du\wedge dv$ 的微分形式称为二阶外微分形式，称函数为零阶外微分形式，称形如 $f\,du+g\,dv$ 的微分形式为一阶微分形式

下面我们定义这些外微分形式之间的"外微分运算" d：

$$\{\text{零阶外微分形式}\} \xrightarrow[(1)]{d} \{\text{一阶外微分形式}\} \xrightarrow[(2)]{d} \{\text{二阶外微分形式}\} \xrightarrow{d} \{0\}$$

(1) 对于零阶外微分形式 f （函数），定义

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

(2) 对于一阶外微分形式 $\theta = f du + g dv$，定义

$$\begin{aligned} d\theta &= df \wedge du + dg \wedge dv \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du + \left(\frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv\right) \wedge dv \\ &= \frac{\partial f}{\partial v} dv \wedge du + \frac{\partial g}{\partial u} du \wedge dv \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u}\right) du \wedge dv. \end{aligned}$$

(3) 对于二阶外微分形式，$\varphi = f du \wedge dv$，定义

$$\begin{aligned} d\varphi &= df \wedge du \wedge dv = \left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) \wedge du \wedge dv \\ &= 0. \end{aligned}$$

可直接验证如下性质

性质5.1. 设 f, g 为零阶外微分形式，φ 是一阶外微分形式.

则有: (i) $d(fg) = (df)g + f(dg)$

(ii) $d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f d\varphi$

$d(\varphi f) = -\varphi \wedge df + d\varphi \cdot f$

(iii) $d(df) = 0$.

证明: 根据定义可直接验证. 特别地，我们有(iii)

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} dv \wedge du + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} du \wedge dv$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) du \wedge dv = 0. \quad \square$$

所以我们的标架运动方程的可积性条件在外微分语言下即为 $d^2 f = 0$!!