§6. 用正交活动标架研究曲面的结构方程

回忆曲面M的正交活动标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 满足运动方程

$$\begin{cases} dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 & \langle 1\rangle \\ de_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j e_j \ ; \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad i=1,2,3 & \langle 2\rangle \end{cases}$$

根据上一节的讨论，此时上述方程的可积性条件可以由

$$d(dr) = 0, \quad d(de_1) = d(de_2) = d(de_3) = 0$$

给出.

先来看 $d(dr)=0$. 由 $\langle 1\rangle$ 知

$$\begin{aligned} 0 = d(dr) &= d(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2} d(\omega^\alpha e_\alpha) \quad \text{向量值函数} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2} \left(d\omega^\alpha e_\alpha - \omega^\alpha \wedge de_\alpha\right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2} \left(d\omega^\alpha e_\alpha - \omega^\alpha \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} \omega_\alpha^j e_j \right) \right) \\ &= \left(d\omega^1 - \sum_{\alpha=1}^{2} \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 \right) e_1 + \left(d\omega^2 - \sum_{\alpha=1}^{2} \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^2 \right) e_2 \\ &\quad - \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^3 \right) e_3 \end{aligned}$$

因为 e_1, e_2, e_3 线性无关，我们得到

$$\begin{cases} d\omega^\beta - \sum_{\alpha=1}^{2} \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta = 0, \quad \beta = 1,2 & (a) \\ \sum_{\alpha=1}^{2} \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^3 = 0 & (b) \end{cases}$$

因为 ω_α^β 有反称性，故而 $\omega_\alpha^\alpha = 0$, $\alpha = 1,2$。从而 (a) 可化为

$$\begin{cases} d\omega^1 - \omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0 \\ d\omega^2 - \omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 \end{cases}$$

也就是从 $0 = d(dr)$ 我们得到三个方程:

$$\boxed{\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega^2 \wedge \omega_2^1 & ① \\ d\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega_1^2 & ② \\ \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3 &= 0 & ③ \end{aligned}}$$

因此用活动标架研究结构方程时，相应的方程组的对称性条件是
$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} \quad 和 \quad b_{\alpha\beta}=b_{\beta\alpha}.$$

在这里，我们看③：由 $\begin{pmatrix}\omega_1^3\\ \omega_2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\end{pmatrix}$

得 $0=\omega^1\wedge(h_{11}\omega^1+h_{12}\omega^2)+\omega^2\wedge(h_{21}\omega^1+h_{22}\omega^2)$

$$=h_{12}\,\omega^1\wedge\omega^2+h_{21}\,\omega^2\wedge\omega^1$$

$$=(h_{12}-h_{21})\,\omega^1\wedge\omega^2$$

因此 ③ $\Leftrightarrow$ $h_{12}=h_{21}$ $\Leftrightarrow$ $B:=\begin{pmatrix}h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}$ 是对称的.

(这就证明了上一节中未给证明的矩阵 B 的对称性)

再来看方程①，② 我们说实际上有：

__性质6.1__ 方程 $\begin{cases} d\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1 & ①\\ d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2 & ②\end{cases}$ 和 $\omega_1^2=-\omega_2^1$ $(*)$

唯一确定 $\omega_1^2=-\omega_2^1$.

证明：由179页例3，我们知道 ω^1 和 ω^2 线性无关，从而任一二阶微分形式都可写成 $f\,\omega^1\wedge\omega^2$ 的形式. 我们记
$$d\omega^1=a\,\omega^1\wedge\omega^2,\quad d\omega^2=b\,\omega^1\wedge\omega^2$$

则不难得到 $\omega_1^2=a\omega^1+b\omega^2$ 是方程 $(*)$ 的解. 下证 $(*)$ 的解唯一.

用反证法，假设另一一阶微分形式 $\tilde\omega_1^2=-\tilde\omega_2^1$ 也满足 $(*)$，

则有 $\begin{cases} d\omega^1=\omega^2\wedge\tilde\omega_2^1\\ d\omega^2=\omega^1\wedge\tilde\omega_1^2\end{cases}$，结合 $\begin{cases} d\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1\\ d\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2\end{cases}$ 得到

$$\omega^2\wedge(\tilde\omega_2^1-\omega_2^1)=\omega^1\wedge(\tilde\omega_1^2-\omega_1^2)=0.$$

~~所以~~注意到 ω^1,ω^2 线性无关，故有 $\tilde\omega_2^1-\omega_2^1=\tilde\omega_1^2-\omega_1^2=0$.
□

但是我们说 ω_1^2 这个量是个依赖于正交标架选取的量.

命题 6.1 设 $\{r; \bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3\}$ 是曲面的另一组正交标架, 其中

$$\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$$

则有 $\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + d\theta$.

证明: 由 $\bar{\omega}_1^2 = \langle d\bar{e}_1, \bar{e}_2\rangle = \langle d(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2), -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2\rangle$

$$\underset{\text{计算}}{=} d\theta + \omega_1^2.$$

□

下面再来考察方程

$$d(de_1) = 0, \quad d(de_2) = 0. \quad \text{写成 } d(de_\alpha) = 0, \ \alpha = 1, 2.$$

我们有:

$$0 = d\left(\sum_{j=1}^{3} \omega_\alpha^j e_j\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(d\omega_\alpha^j e_j - \omega_\alpha^j \wedge de_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} d\omega_\alpha^j e_j - \sum_{j=1}^{3}\omega_\alpha^j \wedge \left(\sum_{k=1}^{3}\omega_j^k e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left(d\omega_\alpha^k - \sum_{j=1}^{3}\omega_\alpha^j \wedge \omega_j^k\right) e_k$$

因此, 我们有

$$\boxed{d\omega_\alpha^k - \sum_{j=1}^{3}\omega_\alpha^j \wedge \omega_j^k = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ k = 1, 2, 3}$$

这个方程组有几个独立方程?

$k=1$ $\quad 0 = d\omega_2^1 - \sum_{j=1}^{3}\omega_2^j \wedge \omega_j^1 = d\omega_2^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^1$

$k=2$ $\quad 0 = d\omega_1^2 - \sum_{j=1}^{3}\omega_1^j \wedge \omega_j^2 = d\omega_1^2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$.

所以这两种情形只有一个独立方程 $\boxed{d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2}$

$k=3$, α 可取 1 或 2:

$$d\omega_1^3 - \sum_{j=1}^3 \omega_1^j \wedge \omega_j^3 = 0 \Leftrightarrow \quad d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3$$

$$d\omega_2^3 - \sum_{j=1}^3 \omega_2^j \wedge \omega_j^3 = 0 \Leftrightarrow \quad d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3.$$

总结起来，

$$\boxed{\begin{array}{ll} d(de_1)=0,\ d(de_2)=0 \Leftrightarrow & \\ d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 & (**) \\ \begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \end{cases} & (*) \end{array}}$$

事实上，通过 $0 = d(de_3)$ 得不到新的方程式：

$$0 = d\left(\sum_{j=1}^3 \omega_3^j e_j\right) = \sum_{j=1}^3 \left(d\omega_3^j e_j - \omega_3^j \wedge de_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^3 d\omega_3^j e_j - \sum_{j=1}^3 \omega_3^j \wedge \sum_{k=1}^3 \omega_j^k e_k$$

$$= \sum_{k=1}^3 \left(d\omega_3^k - \sum_{j=1}^3 \omega_3^j \wedge \omega_j^k\right) e_k$$

$$\Rightarrow \quad d\omega_3^k - \sum_{j=1}^3 \omega_3^j \wedge \omega_j^k = 0, \quad k=1,2,3.$$

其中 $k=1 \Rightarrow d\omega_3^1 - \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 = 0$ 这是方程 (*) 的第一个

$k=2 \Rightarrow d\omega_3^2 - \omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0$ 这是方程 (*) 的第二个

$k=3 \Rightarrow 0=0$. trivial.

下面来看方程 (**) 的含义. 应用

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

我们有：

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = (h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2) \wedge (-h_{21}\omega^1 - h_{22}\omega^2)$$

$$= -h_{11}h_{22}\,\omega^1 \wedge \omega^2 - h_{12}h_{21}\,\omega^2 \wedge \omega^1$$

$$= -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)\,\omega^1 \wedge \omega^2$$

$$= -K\,\omega^1 \wedge \omega^2 \qquad (***)$$

这实际上就是曲面的 Gauss 方程. 我们可以在一个特殊的参数化下来探讨它与自然标架下曲面结构方程的 Gauss 方程之关系.

例13: 考虑曲面 M 的正交参数 (u,v). 其第一基本形式可写为 $I = E\,du\,du + G\,dv\,dv$

则 ~~由~~可取 $e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}$, $e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}}$.

这时由 $dr = r_u du + r_v dv = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$ 得到

$$\omega^1 = \sqrt{E}\,du, \quad \omega^2 = \sqrt{G}\,dv.$$

从而 $d\omega^1 = (\sqrt{E})_v\, dv\wedge du = -(\sqrt{E})_v\, du\wedge dv$

$$= \frac{-(\sqrt{E})_v}{\sqrt{E}\cdot\sqrt{G}}\,\omega^1\wedge\omega^2$$

$$d\omega^2 = (\sqrt{G})_u\, du\wedge dv = \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}\cdot\sqrt{G}}\,\omega^1\wedge\omega^2.$$

由性质6.1及其证明, 得

$$\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}\,\omega^1 + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}\,\omega^2$$

$$= -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\,du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\,dv$$

从而有方程 (**) 的左边满足

$$d\omega_1^2 = -\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v dv\wedge du + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u du\wedge dv$$

$$= \left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right] du\wedge dv$$

再看方程 (**) 的右端: $\omega_1^3\wedge\omega_3^2$

直接计算 $\omega_1^3 = \langle de_1, e_3\rangle = \langle d\left(\frac{r_u}{\sqrt{E}}\right), e_3\rangle$

$$= \left\langle \left(\frac{r_u}{\sqrt{E}}\right)_u du + \left(\frac{r_u}{\sqrt{E}}\right)_v dv,\ e_3\right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{r_{uu}}{\sqrt{E}}du, e_3 \right\rangle + \left\langle r_u \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_u du, e_3 \right\rangle + \left\langle \frac{r_{uv}}{\sqrt{E}} \cdot dv, e_3 \right\rangle + \left\langle r_u \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)_v dv, e_3 \right\rangle$$

$$= \frac{L}{\sqrt{E}}du + \frac{M}{\sqrt{E}}dv.$$

$$\omega_2^3 = \langle de_2, e_3 \rangle = \left\langle d\left(\frac{r_v}{\sqrt{G}}\right), e_3 \right\rangle = \frac{M}{\sqrt{G}}du + \frac{N}{\sqrt{G}}dv$$

故而有

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = \left(\frac{L}{\sqrt{E}}du + \frac{M}{\sqrt{E}}dv\right) \wedge \left(-\frac{M}{\sqrt{G}}du - \frac{N}{\sqrt{G}}dv\right)$$

$$= -\frac{LN}{\sqrt{EG}}du\wedge dv - \frac{M^2}{\sqrt{EG}}dv\wedge du$$

$$= -\frac{LN-M^2}{\sqrt{EG}}du\wedge dv.$$

综上，方程 $(**)$ 等价于

$$-\left[\left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}\right)_u\right] = \frac{LN-M^2}{\sqrt{EG}}.$$

这就是Gauss方程.

作业：验证在曲面的正交曲率线网参数 (u,v) 下，(即 $F=M=0$)，方程 $(*)$ 是曲面的Codazzi方程

$$L_v = HE_v, \quad N_u = HG_u.$$

注记：实际上 $(***)$ 给出了用正交活动标架法的Gauss绝妙定理的证明：由于 ω^1, ω^2 由 I 确定，而 ω_1^2 也由 ω^1, ω^2 确定(引理6.1)，从而也由 I 确定，故

$$K = -\frac{d\omega_1^2}{\omega^1\wedge\omega^2}$$ 只依赖于曲面的第一基本形式.

如前所述，曲面上的正交活动标架场可看作 E^3 中正交标架全体的子集。我们可以通过考虑 E^3 中正交标架的运动方程及结构方程来进一步理解曲面的正交标架运动方程、结构方程。

E^3 中一个正交标架可记为

$$\{x;\ e_1, e_2, e_3\}$$

观察到这个标架可由六个参数确定：三个参数确定 x，再用两个参数确定 e_1（因 e_1 在 S^2 上），此后，e_2 必在与 e_1 垂直的圆上，故只须一个参数确定 e_2。这之后，e_3 就完全确定了。

考虑 E^3 中正交标架的变化规律：

$$(**) \quad \begin{cases} dx = \omega^i e_i \\ de_i = \omega_i^j e_j \end{cases}$$

（我们使用 Einstein 加和约定）

（注意这个方程由六个一阶微分式 $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$ 决定。这是因为 $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ 微分得 $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$）。

由 $0 = d(dx) = d(\omega^i e_i) = d\omega^i e_i - \omega^i \wedge de_i$

$$= d\omega^i e_i - \omega^i \wedge \omega_i^j e_j$$

$$= \left(d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i\right) e_i$$

$\Leftrightarrow \quad d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$

类似地，$0 = d(de_i) = d(\omega_i^j e_j) = d\omega_i^j e_j - \omega_i^j \wedge de_j$

$$= d\omega_i^j e_j - \omega_i^j \wedge \omega_j^k e_k$$

$$= \left(d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j\right) e_j$$

$\Leftrightarrow \quad d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$

总结起来，我们有

$$\begin{cases} d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, & i=1,2,3 \quad (\Diamond) \\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j, & i,j=1,2,3 \quad (\bigcirc) \end{cases}$$

回到曲面的讨论。曲面上的正交标架场是E^3中正交标架的子集，故必然满足 ($\Diamond$) 和 ($\bigcirc$)。曲面上正交标架~~的持续存在于曲面~~可如下选取：先取e_3为曲面法向（有两种选择）。

e_3选定后，再在切平面上选两个相互垂直向量e_1, e_2使$(e_1, e_2, e_3)=1$。并要求e_1, e_2光滑~~依赖于参变~~成向量场。

这类正交标架特殊性在于

$$\omega^3 = \langle dr, e_3 \rangle = 0$$

故方程 (**) 就化为 $\begin{cases} dr = \sum_{\alpha=1}^{2} \omega^\alpha e_\alpha \\ de_i = \omega_i^j e_j \end{cases}$

方程 ($\Diamond$) 化为

$$d\omega^1 = \omega^j \wedge \omega_j^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1$$

$$d\omega^2 = \omega^j \wedge \omega_j^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2$$

$$0 = d\omega^3 = \omega^j \wedge \omega_j^3 = \omega^1 \wedge \omega_1^3 + \omega^2 \wedge \omega_2^3$$

这就是方程①②③ on page 181.

方程($\bigcirc$)化为

$$d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 \qquad \text{(Gauss eq.)}$$

$$\begin{cases} d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \end{cases} \qquad \text{(Codazzi eq.)}$$

注意到曲面正交标架运动方程中有五个一阶微分形式

$$\omega^1, \omega^2, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3$$

因为正交标架的缘故，这些量都不直接关系到曲面参数的选取。这时一个自然的问题就是这些量是否依赖于正交标架

的选取？我们知道正交标架 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 可通过旋转得变成另一正交标架 $\{r; \bar{e}_1, \bar{e}_2, e_3\}$，其中

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

如果一个量不依赖于正交标架的选取，才是曲面的量，或者称几何量。但是由命题4.2 (p.174) 的证明知道，在上述正交标架变化后，

$$\begin{pmatrix} \bar{\omega}^1 \\ \bar{\omega}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\omega}_1^3 \\ \bar{\omega}_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix}$$

由命题6.1 (p.183) 我们知道

$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + d\theta.$$

所以这五个一阶微分形式都不是曲面的几何量。但我们前面已验证第一基本形式 $I = \omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2$ 和第二基本形式 $II = \omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3$ 都是几何量。

作业：验证下面的量是曲面的几何量：

(i) 曲面面积元：$\omega^1 \wedge \omega^2$.

(ii) Gauss 映射面积元 $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2$. $\left(\text{回忆 } dn = de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2\right)$

(iii) 曲面的 Hopf 不变式：$\omega_1\omega_2^3 - \omega_2\omega_1^3$

上面我们看到正交活动标架是研究曲面几何的有力工具。下面我们看个例子：

例. 研究主曲率为常数的曲面的分类

设曲面的两个主曲率为 k_1, k_2. 我们研究 k_1, k_2 为常数的曲面

情形1. 如果 $k_1 = k_2$, 则曲面是全脐点曲面.
由第三章的讨论, 曲面是平面或球面.

情形2: 如果 $k_1 \neq k_2$. 我们可以取 e_1, e_2 为曲面的主方向而得正交活动标架. 这时回忆

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases} \omega_1^3 = k_1 \omega^1 & (1) \\ \omega_2^3 = k_2 \omega^2 & (2) \end{cases}$

微分(1)式, 有 $d\omega_1^3 = d(k_1\omega^1) \overset{k_1\text{是常数}}{=} k_1 d\omega^1 \overset{\text{结构方程}}{=} k_1\, \omega^2 \wedge \omega_2^1$

结构方程 $\to \|$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \overset{(2)}{=} \omega_1^2 \wedge k_2\omega^2 = k_2\, \omega^2 \wedge \omega_2^1$$

$$\Rightarrow \boxed{(k_1 - k_2)\,\omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0} \xrightarrow{k_1 \neq k_2} \omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0 \quad (a)$$

类似地, 微分(2)式, 得

$$d\omega_2^3 = k_2\, d\omega^2 = k_2\, \omega^1 \wedge \omega_1^2$$

$$\| $$

$$\omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = k_1\, \omega_2^1 \wedge \omega^1 = k_1\, \omega^1 \wedge \omega_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(k_2 - k_1)\,\omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0} \xrightarrow{k_1 \neq k_2} \omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0 \quad (b)$$

由(a)和(b), 以及注意到 ω^1, ω^2 线性无关, 我们得到

$$\omega_1^2 = 0$$

这时由高斯方程 $K = -\dfrac{d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = 0 = k_1 k_2$.

不妨设 $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$. 代入(2)式有 $\omega_2^3 = 0$

所以标架的运动方程变为: $\begin{cases} de_1 = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 = k_1 \omega^1 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 = 0 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 = -k_1 \omega^1 e_1 \end{cases}$

也即 e_2 是常向量，同时 $\begin{cases} de_1 = \omega' \cdot (k_1 e_3) \\ de_3 = \omega' (-k_1 e_1) \end{cases}$

这是半径为 $\frac{1}{|k_1|}$ 的圆的标架运动方程. 由平面曲线论基本定理，$\{e_1, e_3\}$ 是半径为 $\frac{1}{|k_1|}$ 的圆的标架。注意到 e_2 是常向量，我们得到 此时，曲面是圆柱面. □