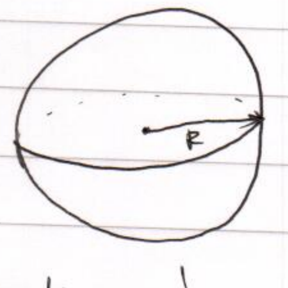
(V) 曲面的内蕴几何学

§0 引言

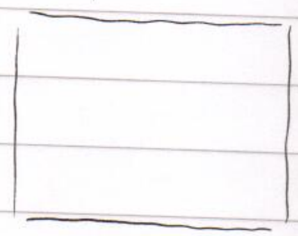
前面我们已经讨论过挺长一段时间的"外蕴几何"：局部椭圆点、双曲点、抛物点、平点、以及标架法。从这一章开始，我们重新回到"内蕴几何"的讨论，也即回到高斯绝妙定理的研究（Theorema Egregium）.

高斯绝妙定理讲高斯曲率只依赖于曲面的第一基本形式。我们这一章就讨论只由曲面第一基本形式所决定的几何，即所谓曲面的内蕴几何学。如果两个曲面之间存在一个变换保持第一基本形式，我们称此变换为曲面间的保等距变换。曲面的内蕴几何就是在等距变换下不变的几何。

反过来讲，如果两个曲面的某个内蕴的几何量不相同，则这两个曲面不等距。比如，由 Theorema Egregium 知道高斯曲率是一个内蕴的几何量。而球面高斯曲率为 $\frac{1}{R^2}$，平面高斯曲率为0

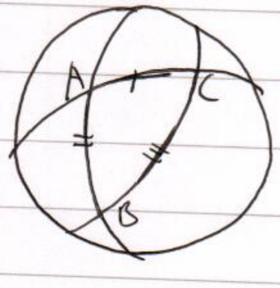


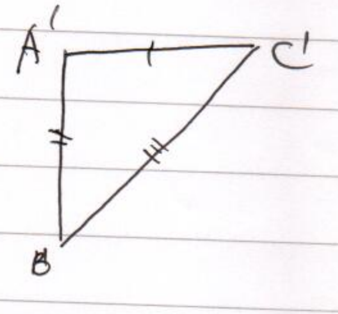
$K = \frac{1}{R^2}$



$K = 0$

故而球面和平面不等距。其实，可以有更初等的方法来说明球面和平面不等距。我们来看球面上由三条大圆弧围成的三角形



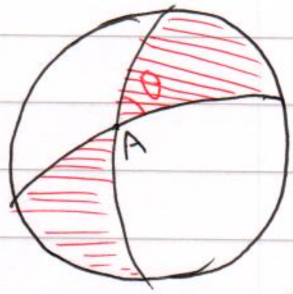


当三角形足够小时，大圆弧是两点之间的最短线。如果球面和平面等距，则必存在一变换将球面上三角形 $\triangle ABC$ 映为平

面上论到一个$\Delta A'B'C'$，使相应边长相等，可以想见相应之角度也会被保持。由平面几何知，三角形内角和为180°，或写成

$$\angle A' + \angle B' + \angle C' = \pi$$

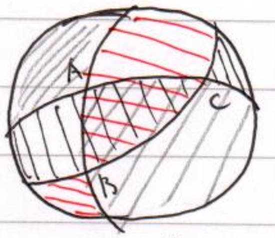
那么球面上三角形内角和是不是π呢？



想像沿大圆切球两刀.

则两条夹角为θ之大圆所夹球面部分之面积为整个球面面积之 $\frac{2\theta}{2\pi} = \frac{\theta}{\pi}$ 倍.

也就是说如果球面半径为R，则阴影部分面积为 $\frac{\theta}{\pi} \cdot 4\pi R^2 = 4\theta R^2$



如果沿三个大圆切三刀，

$$4\cdot(\angle A)R^2 + 4(\angle B)R^2 + 4(\angle C)R^2$$
$$= 4\pi R^2 - 2\cdot \text{Area}(\Delta ABC) \times 2$$

（三个夹角区域球面部分加起来，覆盖了整个球面，但原面我们之三角形面积多数了两次，它对径之三角形，（具有相同面积）也多数了两次。这样我们就有

$$\angle A + \angle B + \angle C = \frac{4\pi R^2 + 4\,\text{Area}(\Delta ABC)}{4R^2}$$
$$= \pi + \frac{\text{Area}(\Delta ABC)}{R^2}$$

亦即 $\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \frac{\text{Area}(\Delta ABC)}{R^2} > 0 \qquad (*)$

故球面和平面不等距。

观察到 (*) 可以写为

$$\int_{\Delta ABC} K\, dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi \qquad (**)$$

（因为球面处处有 $K = \frac{1}{R^2}$）

高斯在他1827年之论文中证明了公式 (**) 对任意曲面上的

"测地三角形"都对。所谓测地三角形就是三边都是测地线的三角形。测地线是~~一般曲面上~~大圆弧(球面的)、平面的直线的推广。只要两点充分靠近，连接两点的测地线就是连接两点的最短线。高斯认为他的这个结果 "ought to be counted among the most elegant in the theory of curved surfaces". 据说，高斯最早是从这个结果观察到高斯曲率只依赖于~~第一~~角度、面积，故而只依赖于第一基本形式的。后来在高斯写1827年文章的时候，从高斯曲率定义出发，直接推导证明了高斯绝妙定理。

当在高斯的结果之后，有几个自然的问题：

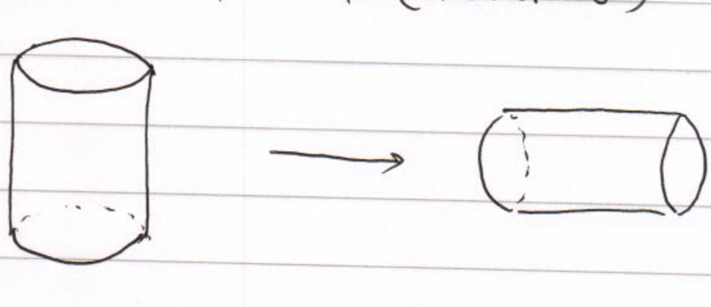
(i) 如果区域不是测地三角形，而是测地多边形会怎样？

(ii) 如果区域边界不是测地线会怎样？

(iii) 如果在整个曲面上(如整个球面)上积分高斯曲率会怎样？

在正式讨论这些问题之前我们先对等距变换、测地线等基本概念作一详细讨论。

§1. 曲面的等距变换 (Isometries)

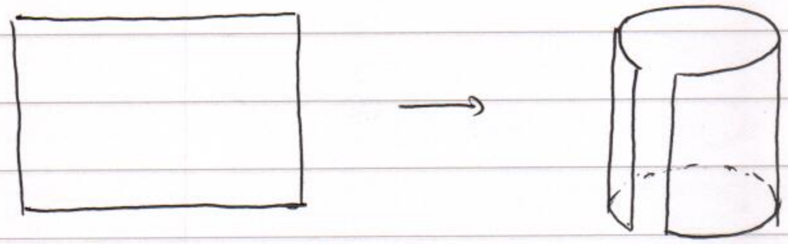


我们~~把空间~~把曲面在空间中做旋转、平移或反射是不会改变曲面上曲线的长度的

定义(等距变换). 设 M 和 $\tilde{M}$ 是 E^3 中两个正则曲面(光滑). $\sigma: M \to \tilde{M}$ 为 1:1 对应 (我们都要求 σ, σ^{-1} 均光滑. 所以 σ 为微分同胚). 如果在对应 σ 下，曲面 M 上任意曲线 C

和在曲面$\tilde{M}$上相应的曲面 $\tilde{C} := \sigma(C)$ 长度相等，则称 σ 为 M 到$\tilde{M}$的<u>等距变换</u>.

注意等距变换并不都可以通过欧氏~~空~~合同变换来实际，比如



下面我们来从不同的角度来讨论曲面间的等距变换。

回忆曲面 $r = r(u,v)$ 上的曲线 $r(t) = r(u(t), v(t))$ 的弧长

$$s(T) = \int_0^T \sqrt{\left\langle \frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right\rangle}\, dt$$

$$= \int_0^T \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^T \frac{ds}{dt} \cdot dt.$$

由等距变换的定义，~~s(t) = σ~~ 记 $\tilde{s}(T)$ 为曲线 $\sigma \circ r\big|_{[0,t]} := \tilde{r}\big|_{[0,t]}$ 的弧长，我们有 $s(T) = \tilde{s}(T)$, $\forall\, T \geq 0$.

故而 σ 为等距变换 等价于 σ 保持曲面上曲线的弧长微分元 ds^2.

（这里我们把参数区域上的点 (u,v) 和曲面上的点 $r(u,v)$ 作了等同。也可看作我们考虑抽象曲面

设: $\sigma: M \to \tilde{M}$

$(u,v) \longmapsto \sigma(u,v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$

有 $ds^2(u,v) = d\tilde{s}^2(\tilde{u},\tilde{v})$ ~~(亦即第二基本~~ 亦即相应第一基本形式相同 $(*)$

而 $$ds^2(u,v) = (du\ \ dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$d\tilde{s}^2(u,v) = (d\tilde{u}, d\tilde{v})\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{pmatrix}$$

~~由~~ 如果记 $\sigma(u,v) := (\tilde{u}(u,v), \tilde{v}(u,v))$，我们就有

$$(d\tilde u, d\tilde v) = (du \ dv)\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde u}{\partial u} & \frac{\partial \tilde v}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde u}{\partial v} & \frac{\partial \tilde v}{\partial v}\end{pmatrix} := (du \ dv)\, J_\sigma$$

这表明 $d\tilde s^2(u,v) = (du \ dv)\, J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde E & \tilde F \\ \tilde F & \tilde G \end{pmatrix} J_\sigma^T \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$.

观察到 $J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde E & \tilde F \\ \tilde F & \tilde G \end{pmatrix} J_\sigma^T$ 和 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 均为对称阵，(※)就 ~~意味着~~ 等价于

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde E & \tilde F \\ \tilde F & \tilde G \end{pmatrix} J_\sigma^T.$$

命题 1.1（等距变换等价描述 I）设两个参数表示分别为 $r = r(u,v)$ 和 $\tilde r = \tilde r(\tilde u, \tilde v)$ 的曲面 M 和 $\tilde M$ 之间存在 1:1 对应 $\sigma(u,v) = (\tilde u, \tilde v)$. σ 是等距变换当且仅当它们的第一基本形式在对应 σ 下满足

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde E & \tilde F \\ \tilde F & \tilde G \end{pmatrix} J_\sigma^T, \quad \text{其中 } J_\sigma = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde u}{\partial u} & \frac{\partial \tilde v}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde u}{\partial v} & \frac{\partial \tilde v}{\partial v}\end{pmatrix}$$

例3：回忆我们在第(IV)章引言部分的例子

Helicoid $\quad r(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$

有第一基本形式 $\quad I = (1+v^2)\, du\, du + dv\, dv$

Catenoid $\quad \tilde r(\tilde u, \tilde v) = (\sqrt{1+\tilde u^2}\cos\tilde v, \sqrt{1+\tilde u^2}\sin\tilde v, \operatorname{arcsinh}\tilde u)$

有第一基本形式 $\quad \tilde I = d\tilde u\, d\tilde u + (1+\tilde u^2)\, d\tilde v\, d\tilde v$.

考虑 1:1 对应 σ: ~~$(u,v) \mapsto (\tilde v, \tilde u)$~~ $\begin{cases} \tilde u = v \\ \tilde v = u \end{cases}$

$$\Rightarrow J_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可验证 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\tilde u^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\tilde u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故而 Helicoid 和 Catenoid 之间存在等距变换.

上述讨论表明 σ 为等距变换当且仅当它保持第一基本形式。但在自然标架下，其相应的矩阵相差 Jacobian。在正交标架下，考虑这个问题，表述形式会不会更~~简~~简单呢？

分别给定 M 和 $\tilde{M}$ 上的正交标架

$$\{r; e_1, e_2, e_3\} \text{ 和 } \{\tilde{r}; \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$$

记 $dr = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2$, $d\tilde{r} = \tilde{\omega}^1 \tilde{e}_1 + \tilde{\omega}^2 \tilde{e}_2$

对 $\sigma: M \to \tilde{M}$ 为等距变换，相应点有第一基本形式相同

也即： $\omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2 = \tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^1 + \tilde{\omega}^2\tilde{\omega}^2$. $\quad (*)$

观察到 $(\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2)$ 可写成 $d\tilde{u}, d\tilde{v}$ 的线性组合，由前述讨论我们知道（196页），$d\tilde{u}, d\tilde{v}$ 可写成 du, dv 的线性组合。回忆 ω^1, ω^2 线性无关，故 du, dv 可写成 ω^1, ω^2 的线性组合。

综上 $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2$ 可写作 ω^1, ω^2 的线性组合。我们不妨记

$$\begin{cases} \tilde{\omega}^1 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 \\ \tilde{\omega}^2 = a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2 \end{cases}$$

亦即 $\begin{pmatrix} \tilde{\omega}^1 \\ \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$.

由(*)可知

$$(\omega^1 \ \omega^2)\, Id_2 \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix} = (\tilde{\omega}^1 \ \tilde{\omega}^2)\, Id_2 \begin{pmatrix} \tilde{\omega}^1 \\ \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix}$$

$$= (\omega^1 \ \omega^2)\, A^T A \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

因为 Id_2, A^TA 均为对称阵，我们有 $A^TA = Id_2$，换言之，A 为正交矩阵。

这时我们观察到，如果我们把标架 $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ 作正交变换变为 $\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix}$.

则在新标架下

$$
\begin{aligned}
d\tilde{r} &= \tilde{\omega}^1\tilde{e}_1 + \tilde{\omega}^2\tilde{e}_2 \\
&= (\tilde{\omega}^1\ \ \tilde{\omega}^2)\begin{pmatrix}\tilde{e}_1\\ \tilde{e}_2\end{pmatrix} = (\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2)\, A \begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix} \\
&= (\omega^1\ \ \omega^2)\begin{pmatrix}\bar{e}_1\\ \bar{e}_2\end{pmatrix} \\
&\overset{\text{记号}}{=} \bar{\omega}^1\bar{e}_1 + \bar{\omega}^2\bar{e}_2 .
\end{aligned}
$$

也即通过在 $\tilde{M}$ 上重新选择正交标架 $\{\tilde{r}; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \tilde{e}_3\}$，我们有

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2.$$

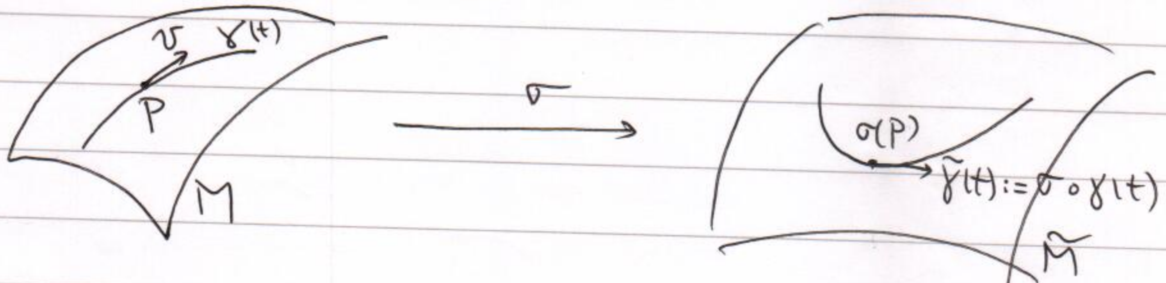
命题1.2（等距变换等价性描述 II）设 M 和 $\tilde{M}$ 之间存在 1:1 对应 σ. σ 为等距变换当且仅当存在正交标架

$$\{e_1, e_2, e_3\} \text{ 和 } \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$$

使得在对应点有

$$\tilde{\omega}^1 = \omega^1, \quad \tilde{\omega}^2 = \omega^2. \qquad \square$$

等距变换保持相应曲线长度，除了从弧长微元角度来理解外，还可以从曲线切向量长度的角度来考查。



直观上，如果任何一段曲线的长度都被保持，那么相应点处的切向量的长度应该被保持。实际上，上述切向量之间的对应，可以不依赖于曲线 $\gamma, \tilde{\gamma}$ 来定义。

回忆我们在第三章开始介绍过 $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 的映射的 differential 的相关概念，下面的切映射的定义实际上把 differential