定义到两个曲面之间的映射上.

考虑任一切向量 $v\in T_pM$, 可写作

$$v = a r_u + b r_v.$$

取 M 上曲线 $\gamma(t) := r(u(t), v(t))$, 使得 $\gamma(0)=P$, 且

$$\left.\frac{d\gamma}{dt}\right|_{t=0} = r_u \frac{du}{dt}(0) + r_v \frac{dv}{dt}(0) = v.$$

(此即要求 $\frac{du}{dt}(0)=a$, $\frac{dv}{dt}(0)=b$)

这时 $\tilde M$ 上相应曲线 $\tilde\gamma(t)=\sigma\circ\gamma(t)$ 满足 $\tilde\gamma(0)=\sigma(P)$, 且

$$\left.\frac{d\tilde\gamma}{dt}\right|_{t=0} = \tilde r_{\tilde u}\frac{d\tilde u}{dt}(0) + \tilde r_{\tilde v}\frac{d\tilde v}{dt}(0)$$

(这里记 $\tilde\gamma(t)=\tilde r(\tilde u(t),\tilde v(t))$)

$$\cancel{= \tilde r_{\tilde u}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}(0)\right) + \tilde r_{\tilde v}}$$

$$= \tilde r_{\tilde u}\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}(0) + \frac{\partial\tilde u}{\partial v}\frac{dv}{dt}(0)\right) + \tilde r_{\tilde v}\left(\frac{\partial\tilde v}{\partial u}\frac{du}{dt}(0) + \frac{\partial\tilde v}{\partial v}\frac{dv}{dt}(0)\right)$$

$$= \tilde r_{\tilde u}\left(a\frac{\partial\tilde u}{\partial u} + b\frac{\partial\tilde u}{\partial v}\right) + \tilde r_{\tilde v}\left(a\frac{\partial\tilde v}{\partial u} + b\frac{\partial\tilde v}{\partial v}\right)\Bigg|_{t=0}$$

这说明切向量 $T_{\sigma(P)}\tilde M \ni \tilde v = \left.\frac{d\tilde\gamma}{dt}\right|_{t=0}$ 并不依赖于 γ 的选取, 而由切向量 v 及映射 $\sigma: M\to\tilde M$ 完全确定. 因此下述定义是良定的:

<u>定义(切映射)</u>: 曲面 M 和 $\tilde M$ 之间的映射 σ 诱导切平面之间的一个映射

$$\sigma_*: T_pM \longrightarrow T_{\sigma(p)}\tilde M$$
$$v \longmapsto \tilde v.$$

称为映射 σ 的切映射或 differential.

在前述讨论中, 令 $a=1$, $b=0$, 我们有 $\sigma^*(r_u) = \tilde r_{\tilde u}\frac{\partial\tilde u}{\partial u} + \tilde r_{\tilde v}\frac{\partial\tilde v}{\partial u}$

令 $a=0$, $b=1$, 我们有 $\sigma^*(r_v) = \tilde r_{\tilde u}\frac{\partial\tilde u}{\partial v} + \tilde r_{\tilde v}\frac{\partial\tilde v}{\partial v}$.

进而我们有：$\sigma^*(v) = \sigma^*(a r_u + b r_v)$

$$= a\left(\tilde r_{\tilde u}\frac{\partial \tilde u}{\partial u} + \tilde r_{\tilde v}\frac{\partial \tilde v}{\partial u}\right) + b\left(\tilde r_{\tilde u}\frac{\partial \tilde u}{\partial v} + \tilde r_{\tilde v}\frac{\partial \tilde v}{\partial v}\right)$$

$$= a\sigma^*(r_u) + b\sigma^*(r_v)$$

也就是说 σ^* 是一个线性映射，且在自然标架下，其有形式

$$\sigma^*\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde u}{\partial u} & \frac{\partial \tilde v}{\partial u} \\ \frac{\partial \tilde u}{\partial v} & \frac{\partial \tilde v}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde r_{\tilde u} \\ \tilde r_{\tilde v} \end{pmatrix} = J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde r_{\tilde u} \\ \tilde r_{\tilde v} \end{pmatrix}$$

命题1.3（等距变换等价性描述 III）. 设曲面 M 和 $\tilde M$ 之间存在 1:1 对应 σ. σ 为等距变换当且仅当对 M 的任意点 p，和任意 $v, w \in T_pM$，有

$$\langle \sigma_*(v), \sigma_*(w)\rangle = \langle v, w\rangle . \qquad (**)$$

证明：不妨设 $v = a r_u + b r_v$，$w = c r_u + d r_v$.

则 $\langle v, w\rangle = \langle a r_u + b r_v, c r_u + d r_v\rangle$

$$= (a, b)\begin{pmatrix} \langle r_u, r_u\rangle & \langle r_u, r_v\rangle \\ \langle r_u, r_v\rangle & \langle r_v, r_v\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= (a, b)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

另一方面，$\langle \sigma_*(v), \sigma_*(w)\rangle = \langle a\sigma_*(r_u) + b\sigma_*(r_v), c\sigma_*(r_u) + d\sigma_*(r_v)\rangle$

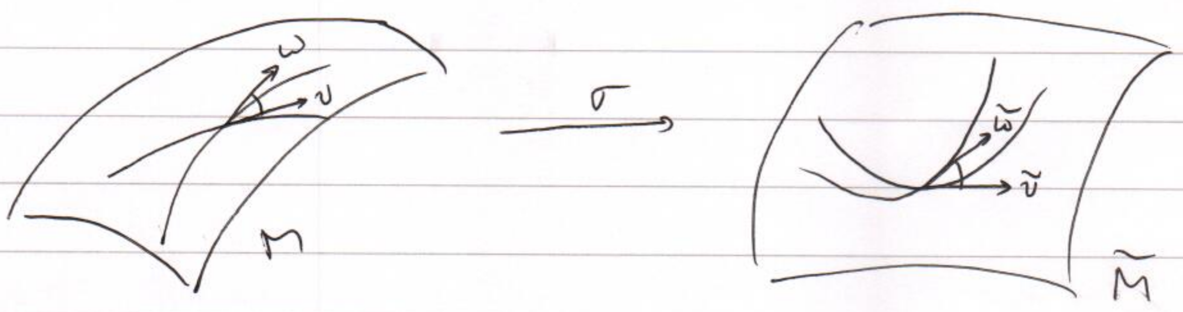
$$= (a\ b)\underbrace{\begin{pmatrix} \langle \sigma_*(r_u), \sigma_*(r_u)\rangle & \langle \sigma_*(r_u), \sigma_*(r_v)\rangle \\ \langle \sigma_*(r_u), \sigma_*(r_v)\rangle & \langle \sigma_*(r_v), \sigma_*(r_v)\rangle \end{pmatrix}}_{:= Q}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

可以直接验证

$$Q = J_\sigma \begin{pmatrix} \tilde E & \tilde F \\ \tilde F & \tilde G \end{pmatrix} J_\sigma^T \qquad (待证)$$

故由命题1.1，知 σ 为等距变换 $\Leftrightarrow$ $(**)$ 成立。 □

注意到，命题1.3 还告诉我们角度也被保持!!



即 $\dfrac{\langle v, w\rangle}{|v|\cdot|w|} = \dfrac{\langle \sigma_*(v), \sigma_*(w)\rangle}{|\sigma_*(v)|\,|\sigma_*(w)|}$.

定义（保角变换 conformal map）设 M 和 $\tilde{M}$ 是 E^3 中两个正则曲面(片)，$\sigma: M \to \tilde{M}$ 为 1:1 对应. 如果在对应 σ 下，曲面 M 上任意两条曲线在相交点处的夹角和相应曲线在 $\tilde{M}$ 上相应交点处夹角相等，则称 σ 为 M 到 $\tilde{M}$ 的保角变换.

所以，等距变换是保角变换.
反之则不对。实际上，我们有：

命题1.4.（保角变换等价描述）设 $\sigma: M \to \tilde{M}$ 为1:1对应. 则 σ 为保角变换当且仅当存在正函数 λ 使得在对应点处，曲面 M 和 $\tilde{M}$ 的第一基本形式满足

$$\tilde{I} = \lambda^2 \cdot I$$

证明：由定义，σ 保角 $\Leftrightarrow \dfrac{\langle v, w\rangle}{|v|\cdot|w|} = \dfrac{\langle \sigma_*(v), \sigma_*(w)\rangle}{|\sigma_*(v)|\,|\sigma_*(w)|}$ $(\diamond)$ $\forall\, v, w$.

设 e_1, e_2 为 M 的正交标架.

(i) 取 $v = e_1$, $w = e_2$ 代入 $(\diamond)$ 式，有：

$$0 = \frac{\langle \sigma_*(e_1), \sigma_*(e_2)\rangle}{|\sigma_*(e_1)|\cdot|\sigma_*(w)|} \Rightarrow \langle \sigma_*(e_1), \sigma_*(e_2)\rangle = 0 \quad ①$$

(ii) 取 $v = ae_1 + be_2$, $w = e_2$ 代入 $(\diamond)$，并利用①，有：

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b\langle \sigma_*(e_2), \sigma_*(e_2)\rangle^{1/2}}{\sqrt{a^2\langle \sigma_*(e_1), \sigma_*(e_1)\rangle + b^2\langle \sigma_*(e_2), \sigma_*(e_2)\rangle}}.$$

这说明 $\langle \sigma_*(e_1), \sigma_*(e_1)\rangle = \langle \sigma_*(e_2), \sigma_*(e_2)\rangle$

我们记 $\lambda^2 = \langle \sigma_*(e_1), \sigma_*(e_1)\rangle \neq 0$.

则找到 $\tilde{M}$ 上正交标架 $\tilde{e}_1 := \frac{1}{\lambda}\sigma_*(e_1)$, $\tilde{e}_2 := \frac{1}{\lambda}\sigma_*(e_2)$

由映射 σ_* 的线性性，我们有：

$$\sigma_*(dr) = \sigma_*(du\, r_u + dv\, r_v) = du\,\sigma_*(r_u) + dv\,\sigma_*(r_v)$$
$$= (du\ dv)\begin{pmatrix}\sigma_*(r_u)\\ \sigma_*(r_v)\end{pmatrix} = (du\ dv)\, J_\sigma \begin{pmatrix}\tilde{r}_{\tilde{u}}\\ \tilde{r}_{\tilde{v}}\end{pmatrix}$$
$$= (d\tilde{u}\ d\tilde{v})\begin{pmatrix}\tilde{r}_{\tilde{u}}\\ \tilde{r}_{\tilde{v}}\end{pmatrix} = d\tilde{r}.$$

这告诉我们

$$\tilde{I} = \langle d\tilde{r}, d\tilde{r}\rangle = \langle \sigma_*(dr), \sigma_*(dr)\rangle$$
$$= \langle \sigma_*(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2), \sigma_*(\omega^1 e_1 + \omega^2 e_2)\rangle$$
$$= \langle \omega^1\sigma_*(e_1) + \omega^2\sigma_*(e_2), \omega^1\sigma_*(e_1) + \omega^2\sigma_*(e_2)\rangle$$
$$= \omega^1\omega^1\langle\sigma_*(e_1), \sigma_*(e_1)\rangle + \omega^2\omega^2\langle\sigma_*(e_2), \sigma_*(e_2)\rangle$$
$$= \lambda^2(\omega^1\omega^1 + \omega^2\omega^2) = \lambda^2 \cdot I.$$

□.

实际上，有：

<u>定理1.1</u>. 任意曲面上每一点都有一个邻域，它可以和欧氏平面的一个区域间建立保角变换.

（这个证明我们不作讨论）这说明任意曲面上每一点都有邻域，它以 (u,v) 为参数，使得其第一基本形式

$$I = \lambda^2(u,v)(du\,du + dv\,dv), \quad \lambda \neq 0.$$

这类参数 (u,v) 称为<u>等温参数</u> (isothermal parameter).

<u>注记</u>. 在结束等距变换的讨论之前，我们再对高斯绝妙定理作进一步地说明。回忆一点处高斯曲率定义为 ~~定义为一点处~~ 高斯

映射像集相应点处有向面积元和该点处有向面积元的比值。所以这个定义所用到的东西~~在~~不是在等距变换下不变的!! 高斯绝妙定理告诉我们 高斯曲率在等距变换下不变!! 这就带来了高斯曲率定义的不令人满意的地方。不过高斯绝妙定理的证明本身提供了一个等距变换下不变的曲率定义。~~如果用后来~~

回忆 如记第一基本形式 $I = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha du^\beta$

$$\text{则}\quad K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

或用正交活动标架时 $K = \dfrac{d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}$.

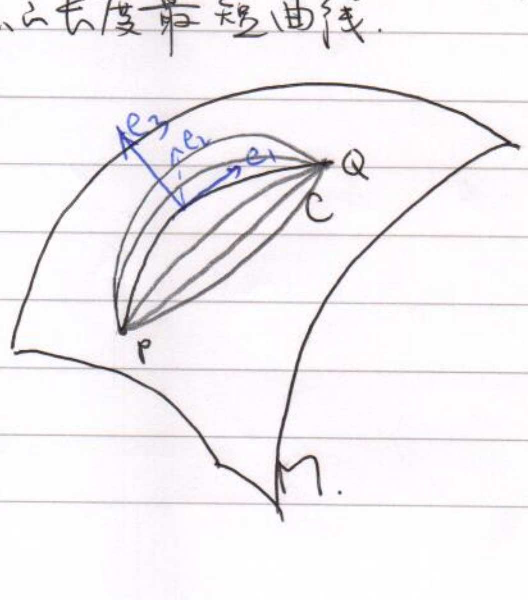
当然这些定义的代价是丢失了所有的几何直观。且表达式复杂，初看起来较难接受。要想把这样的定义理解清楚 须要考查更高维的几何。在一些更抽象的框架下，这种定义表达式也会变简洁。这些就是黎曼几何的研究内容。我们在这章接下来的讨论可以看作为大家将来学习黎曼几何作一铺垫或引子。

§2. 测地线 (geodesic)

我们关于内蕴几何的讨论，就围绕测地线来展开。

我们生活在一个空间当中(假想我们生活在一个二维曲面里)，一个最直接的问题就是如何通过移动最短的距离从一个点移动到另一个点。也就是要寻找连接两点的长度最短曲线。

首先来考查曲面上的曲线



回忆我们前面提到 Darboux 为研究曲面上的曲线的几何性质，引入过如下的活动标架：

记曲面参数表示为 $r = r(u,v)$
$= r(u^1, u^2)$

曲线 C : $r(s) = r(u^1(s), u^2(s))$

(假设 s 为其弧长参数)

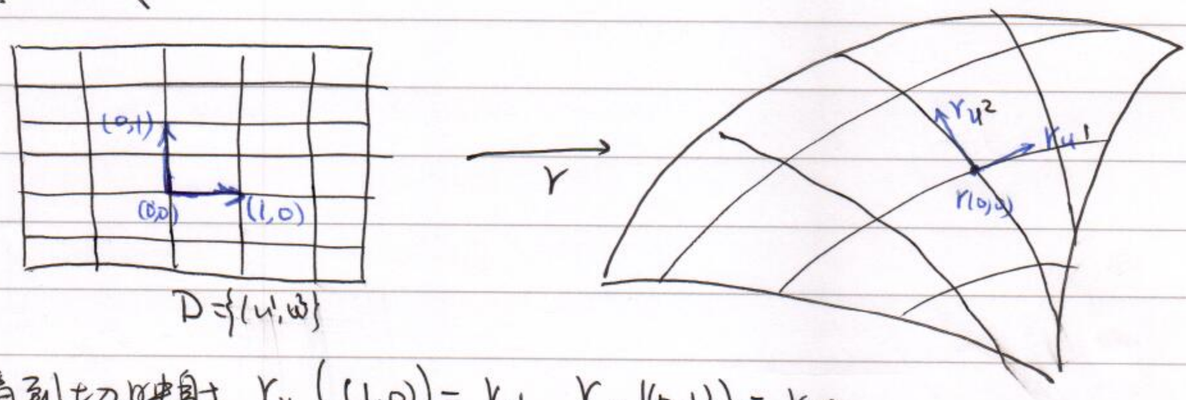
取沿C的正交活动标架 $e_1 = \frac{dr}{ds}$ (单位切向量)

$e_3 = n$ (曲面法向)

然后 $e_2 := -e_1 \wedge e_3$ (使 $(e_1, e_2, e_3) > 0$)

设当 $s \in [0, l]$ 时，C连接P点和Q点，也即 $C|_{[0,l]}$ 是长度为 l 的曲线段。

我们来找P, Q之间的最短曲线。如果C是这样一条曲线，那么它一定是一族连接P, Q之间的曲线中最短的。我们就来考虑一族曲线。~~一个曲线族~~ 可以理解到每一条这样的曲线都可以看作是C沿标架方向 e_2 的一个扰动，当然逐点处扰动幅度不一样，在P, Q点处扰动为0。如何把这样的曲线具体写出来呢。我们回到参数曲域



容易看到切映射 $r_*((1,0)) = r_{u^1}$, $r_*((0,1)) = r_{u^2}$.

而注意到 e_2 在M的切平面上，故沿C有

$$e_2 = a^1 \frac{\partial r}{\partial u^1} + a^2 \frac{\partial r}{\partial u^2} = a^1 r_1 + a^2 r_2$$

故 $r_*((a^1, a^2)) = e_2$

所以曲线 $C: r(s) = r(u^1(s), u^2(s))$ 在参数曲域上看就是曲线

$$(u^1(s), u^2(s)) \quad s \in [0, l]$$

我们对C在曲面上~~的~~向 e_2 方向作(不同振幅度)的扰动，在区域上来说就是作扰动

$$(u^1(s), u^2(s)) + \lambda f(s) (a^1(s), a^2(s)), \quad s \in [0, l].$$

其中 $\lambda\in(-\varepsilon,\varepsilon)$，我们通过函数 $f(s)$ 来调控each点处扰动幅度的大小。由于我们要保持 P, Q 两点不动，故要求

$$f(0)=f(l)=0.$$

这样在曲面上我们有一族曲线

$$r_f^{\lambda}(s):=r\left(u^1(s)+\lambda f(s)a^1(s),\ u^2(s)+\lambda f(s)a^2(s)\right)$$

$s\in[0,l]$.

它们连结 P, Q 两点。

~~注意，通过调节 λ, f 我们可得到~~

给定 f 后，这就是一族以 $\lambda\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 为参数的曲线。如果 C 是最短线，我们必有 $r_f^{\lambda}(s)\big|_{s\in[0,l]}$ 的长度 $L(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 时达最小值（注意到 $r_f^0(s)=r(s)$）。特别地，我们有

$$\left.\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=0. \qquad (1)$$

下面我们就来看看 (1) 告诉我们什么？ ~~因为~~

$$L(\lambda)=\int_0^l\left|\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s}\right|ds=\int_0^l\left\langle\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s},\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s}\right\rangle^{\frac12}ds.$$

因此有：
$$\left.\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=\int_0^{l}\frac12\left\langle\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s},\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s}\right\rangle^{-\frac12}\cdot 2\left\langle\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s},\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s}\right\rangle\Bigg|_{\lambda=0}ds$$

由于 s 为 $r(s)$ 的弧长参数，我们有

$$\left.\left\langle\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s},\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s}\right\rangle\right|_{\lambda=0}=\left\langle\frac{\partial r(s)}{\partial s},\frac{\partial r(s)}{\partial s}\right\rangle=1.$$

所以，
$$\left.\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=\int_0^{l}\left\langle\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s}\right),\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s}\right\rangle\Bigg|_{\lambda=0}ds$$

$$=\int_0^{l}\left\langle\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial\lambda}\right),\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial s}\right\rangle\Bigg|_{\lambda=0}ds$$

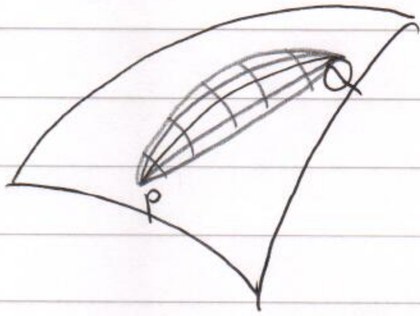
注意到
$$\left.\frac{\partial r_f^{\lambda}(s)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=r_1\cdot f(s)a^1(s)+r_2 f(s)a^2(s)$$
$$=f(s)\left(r_1a^1+r_2a^2\right)=f(s)e_2.$$

(这个事实的几何意义是说，如果固定参数 s，我们得曲线

$$r_f^\lambda(s),\quad \lambda\in(-\varepsilon,\varepsilon)$$

则该曲线在 $\lambda=0$ 处切向量为

$$f(s)\,e_2(s).$$



实际上 $\{r_f^\lambda(s)\}_{\lambda\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ 称为曲线 $r(s)$ 的一个变分，fe_2 为其变分向量场）.

继续我们的计算，我们有

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}=\int_0^{l}\left\langle\frac{\partial}{\partial s}(f(s)e_2(s)),\ \frac{\partial r_f^\lambda(s)}{\partial s}\right\rangle\Big|_{\lambda=0}ds$$

$$=\int_0^{l}\left\langle\frac{\partial}{\partial s}(f(s)e_2(s)),\ \frac{\partial r(s)}{\partial s}\right\rangle ds$$

$$=\int_0^{l}\left\langle\frac{d}{ds}(f(s)e_2(s)),\ e_1(s)\right\rangle ds$$

$$=\int_0^{l}\left(\frac{d}{ds}\langle fe_2,e_1\rangle-\left\langle fe_2,\frac{de_1}{ds}\right\rangle\right)ds$$

$$=f\langle e_2,e_1\rangle\Big|_0^{l}-\int_0^{l}\left\langle fe_2,\frac{de_1}{ds}\right\rangle ds$$

$$=-\int_0^{l}f\left\langle e_2,\frac{de_1}{ds}\right\rangle ds.$$

注意，上述计算表明

$$\int_0^{l}f(s)\cdot\left\langle e_2,\frac{de_1}{ds}\right\rangle(s)\,ds=0$$ 对任意 f 满足 $f(0)=f(l)=0$ 都对.

这说明：$\forall s\in[0,l]$，都有：

$$\left\langle\frac{de_1}{ds},e_2\right\rangle(s)=0.$$

（这是变分法基本定理）

也就是说，如果 C 是连接 P, Q 的最短线，且 s 为弧长参数，则上式

成立!

<u>定义</u>(测地线) 设曲面 M 上一条弧长参数的曲线 $r(s)=r(u^1(s),u^2(s))$,
如果满足

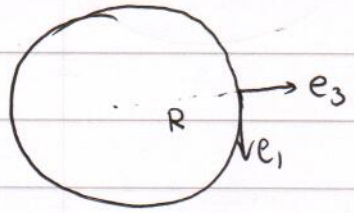
$$\langle \frac{de_1}{ds}, e_2 \rangle (s) = 0 \quad , \forall s \qquad (Geo)$$

其中 $e_1=\frac{dr}{ds}$ 为单位切向. 记 n 为 M 的法向, 则 $e_2=-e_1\wedge n$.

<u>例子</u>: 平面上的直线: 我们有 $\frac{de_1}{ds}=0$. 故满足 (Geo), 是测地线.

这种情形, 所有直线都是最短线

球面上的大圆. 用 ~~大圆~~ 球面的一个切向 e_1 和该点处球面法向 $e_3=n$ 张成的平面截球面得到一个大圆弧(这是因为 e_3 过球心) 取弧长参数 s.



这时有

$$\frac{de_1}{ds}=\frac{1}{R}e_3$$

从而 $\langle \frac{de_1}{ds}, e_2 \rangle (s) = 0. \ \forall s$

故大圆弧是测地线。又注意到大圆弧不总是最短线. 当其两端充分靠近时, 大圆弧是最短线.

由上述例子及前述讨论我们看到

· 最短线是测地线

· 测地线不一定是最短曲线.

一个自然的问题是: 什么时候测地线是最短线? 随着我们对测地线理解的深入, 我们会回答这个问题.

下面, 我们从不同的角度进一步地理解测地线方程 (Geo).