该处其他球面切向量要与赤道切向角度不变）.

注记：在结束这节讨论之前，我们指出，也可以类似地定义协变微分. 即在正交活动标架下，回忆$E^3$中的曲面切向外微分为

$$\begin{cases} de_1 = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \end{cases}$$

可定义曲面切向的协变微分 $De_1 = \langle de_1, e_1\rangle e_1 + \langle de_1, e_2\rangle e_2 = \langle de_1, e_2\rangle e_2$

$$= \omega_1^2 e_2$$

$$De_2 = \langle de_2, e_1\rangle e_1 + \langle de_2, e_2\rangle e_2 = \omega_2^1 e_1$$

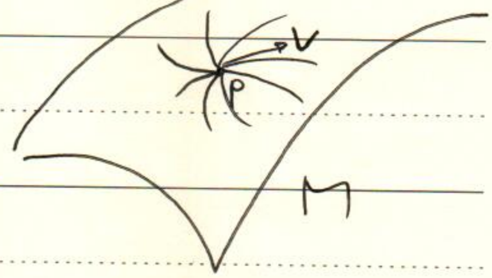
$\omega_1^2$ 称为"联络形式".

一般的切向量场$V$，可定义 $DV = \langle dV, e_1\rangle e_1 + \langle dV, e_2\rangle e_2$.

关于协变微分，我们就不作详细讨论了。

## §5 测地坐标系

了解了曲面上的测地线，我们就可以用它们来引入曲面上更方便的坐标系。就是站在曲面上一点p处，如何确定其它点的位置？




回忆只要在p点给定一个切方向，就存在惟一一条p点出发与之相切的测地线。也就是说，我们可以定义映射：

$$\exp_p : T_pM \longrightarrow M$$

$$W \longmapsto \exp_p(W) := \gamma\left(\frac{W}{|W|}, |W|\right).$$

其中$\gamma(V,s) = \gamma_V(s)$ 记的是从p点出发，切向量为$V$的弧长参数测地线上参数为$s$的点。由定理3.2 (p.211)知，对任一给定$\frac{W}{|W|}$，总存在$\varepsilon_{\frac{W}{|W|}} > 0$，使测地线$\gamma\left(\frac{W}{|W|}, s\right)$，$s \in [0, \varepsilon_{\frac{W}{|W|}})$存在。实际上，由常微分

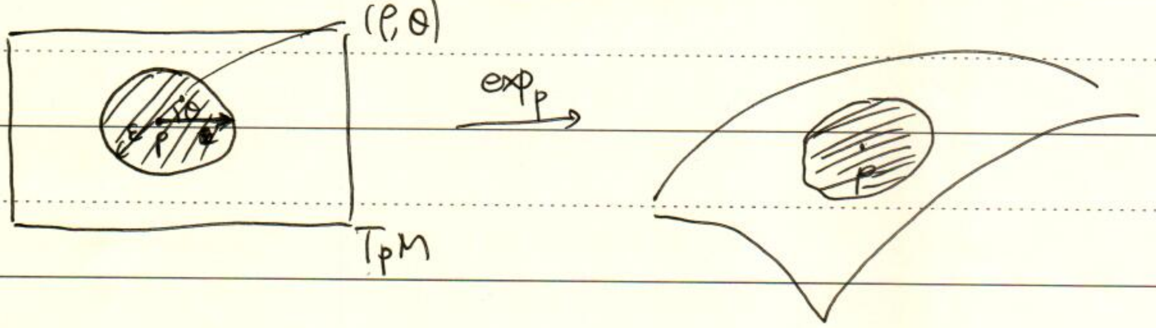
方程解对初值的连续依赖性，知 $\varepsilon_{\frac{W}{|W|}}$ 连续依赖于 $\frac{W}{|W|}$. 又注意到

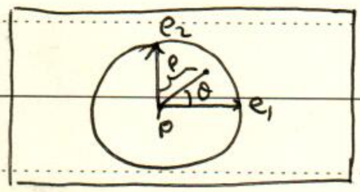
$\left\{\frac{W}{|W|} : W\in T_pM,\ W\neq 0\right\}$ = 单位圆，为一紧集。故而

$\{\varepsilon_{\frac{W}{|W|}}\}$ 存在最小值 $\varepsilon$. 换句话讲，映射 $\exp_p$ 在

$\{W\in T_pM : |W|\leq\varepsilon\}$ 上均有定义.（可知 $\exp_p 0 = p$）

我们称 $\exp_p$ 为 p 点处的<u>指数映射</u> (exponential map)




设 $\rho=|W|$, 则 $W = x^1e_1 + x^2e_2 = (\rho\cos\theta)e_1 + (\rho\sin\theta)e_2$.

即 $\begin{cases} x^1=\rho\cos\theta \\ x^2=\rho\sin\theta \end{cases}$

这样我们引入曲面 p 点附近的一个参数化

$$r(x^1,x^2) := \exp_p(W) = \exp_p(x^1e_1+x^2e_2)$$

<u>命题 5.1</u>. $(x^1,x^2)$ 是曲面在 p 点附近的<u>正则</u>参数.

<u>证明</u>: 我们知道在曲面一点处附近总存在正交参数 $(u^1,u^2)$，且可要求<u>在此点 p 处</u>，有:

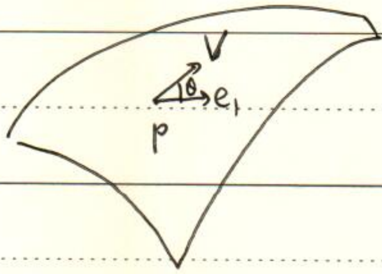
$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1} = e_1,\quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2} = e_2,\quad u^1=0,\ u^2=0$$

为标准正交向量.

回忆 $\frac{\partial r}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial r}{\partial x^2} = \det\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right) r_1\wedge r_2$.

为证 $(x^1,x^2)$ 为正则参数，只须说明 $\det\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\neq 0$.

设 $V=\cos\theta\, e_1+\sin\theta\, e_2\in T_pM$，则




记 $C_\theta$ 为从 p 点出发以 V 为切向量的测地线. 其参数表示为

$r(\rho)=r(u^1(\rho),u^2(\rho))$ ，$\rho$ 为弧长参数.

则它满足 ODE：

$$\boxed{\frac{d^2u^\alpha(\rho)}{d\rho^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{d\rho}\frac{du^\gamma}{d\rho}=0,\quad \alpha=1,2}$$

其切向量 $V=\left.\frac{dr}{d\rho}\right|_{\rho=0}=\left.r_1\frac{du^1}{d\rho}+r_2\frac{du^2}{d\rho}\right|_{\rho=0}$

$$=e_1\frac{du^1}{d\rho}(0)+e_2\frac{du^2}{d\rho}(0)=\cos\theta\, e_1+\sin\theta\, e_2.$$

因此有.
$$\boxed{\frac{du^1}{d\rho}(0)=\cos\theta,\quad \frac{du^2}{d\rho}(0)=\sin\theta.}$$

现在，由 Taylor 展开，我们得

$$u^\alpha(\rho)=u^\alpha(0)+\left.\frac{du^\alpha}{d\rho}\right|_{\rho=0}\cdot\rho+\frac{1}{2}\left(\left.\frac{d^2u^\alpha}{d\rho^2}\right|_{\rho=0}\right)\rho^2+\cdots$$

$$=0+x^\alpha+\frac{1}{2}\left(-\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\left.\frac{du^\beta}{d\rho}\frac{du^\gamma}{d\rho}\right|_{\rho=0}\right)\rho^2+\cdots$$

$$=x^\alpha-\frac{1}{2}\left.\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right|_{\rho=0}\rho\cdot\frac{du^\beta}{d\rho}(0)\cdot\rho\,\frac{du^\gamma}{d\rho}(0)+\cdots$$

$$=x^\alpha-\frac{1}{2}\left.\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right|_{\rho=0}x^\beta x^\gamma+\cdots$$

这说明：在 p 点处. $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}=\delta^\alpha_\beta$

故 $\det\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\neq 0$ 由连续性，p 点附近，$\det\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right)\neq 0$. □

注记：实际上，从定义可知 $\exp_p$ 的切映射 $(\exp_p)_{*}$ 是恒等映射，这可

直接说明：$x^1, x^2$ 为正则参数。

我们称 $(x^1, x^2)$ 为以 $p \in M$ 为原点的法坐标系 (normal coordinate). 称 $(\rho, \theta)$ 为 ~~点p处法坐标~~ 以 $p$ 为原点的测地极坐标系.

当然首先要说明 $(\rho, \theta)$ 确为正则参数。这次我们注意到它与法坐标系之间的参数变换为

$$\begin{cases} x^1 = \rho\cos\theta \\ x^2 = \rho\sin\theta \end{cases}$$

这个变换的 Jacobian 行列式 $\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \rho} & \frac{\partial x^2}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \theta} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

$$= \det\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho > 0 \quad \text{if } \rho > 0$$

因此 $(\rho, \theta)$ 为 $p$ 点附近 ($p$ 点除外) 的正则参数

我们来考查在 $(\rho, \theta)$ 坐标下的参数曲线，$\rho$ 线和 $\theta$ 线.

$\rho$ 线 $\theta = \theta_0$，~~由 $\exp_p(x^1\cos\theta_0 + x^2\sin\theta_0) = \exp_p$~~

由 $\exp_p(x^1 e_1 + x^2 e_2) = \exp_p(\rho(\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2))$

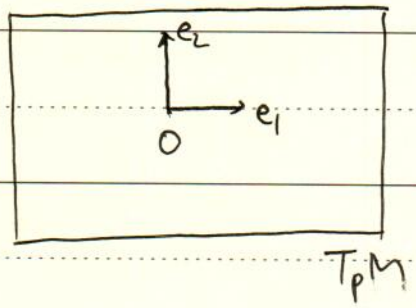
给出. 记 $V_0 = \cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2$ 为单位切向量，我们有

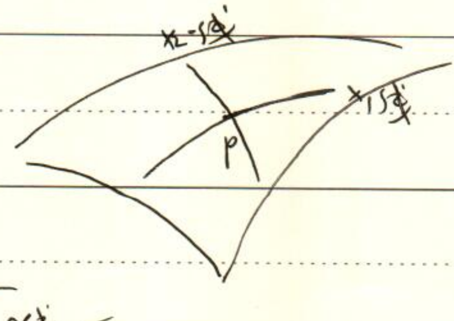
$$\exp_p(\rho V_0) = \gamma(V_0, \rho)$$

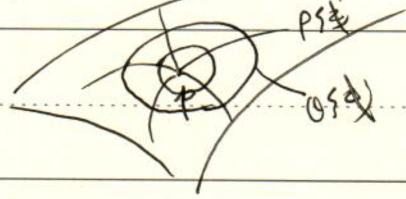
故 $\rho$ 线是从 $p$ 点出发，切于单位切向量 $V_0 = \cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2$ 的测地线，它以 $\rho$ 为弧长参数. 注意 $\rho V_0$ 是切平面上从原点出发，方向为 $V_0$ 的射线。指数映射 $\exp_p$ 把 $T_pM$ 中过原点的射线映为 $M$ 上 $p$ 点出发的测地"射线".

$\theta$ 线 $\rho = \rho_0$，就由 $\exp_p(\rho_0(\cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2))$ 给出. 也就是 $\theta$ 线为 $T_pM$ 上以原点为圆心，$\rho_0$ 为半径的圆在指数映射下的像。我们称 $\theta$ 线为以 $\rho_0$ 为半径的测地圆 (注意 $\theta$ 线不一定是测地线，比如

球面上，北极点附近纬线圈就是测地圆）




同样地，在法坐标系中，$x^1$-线就是 $\exp_p(s e_1) = \gamma(e_1, s)$

$x^2$-线是 $\exp_p(s e_2) = \gamma(e_2, s)$

这是两条过p点测地线，且在p点处这两条测地线正交（夹角为$\frac{\pi}{2}$），换言之

在p点处，$\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x^1}, \frac{\partial \gamma}{\partial x^2} \rangle = 0$，$\langle \frac{\partial \gamma}{\partial x^1}, \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} \rangle = \langle \frac{\partial \gamma}{\partial x^2}, \frac{\partial \gamma}{\partial x^2} \rangle = 1$.

这是名字 normal coordinate 的由来。实际上，我们可以证明更多：

定理5.1（法坐标系）设曲面M上以p点为原点的法坐标系$(x^1, x^2)$下的第一基本形式为

$$I = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta.$$

则有：$(g_{\alpha\beta})(p) = (\delta_{\alpha\beta})$，$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(p) = 0$，$\forall \alpha, \beta, \gamma = 1, 2$.

证明：$(g_{\alpha\beta})(p) = (\delta_{\alpha\beta})$ 前面已说明. 下面我们来看

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(p) = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \langle \frac{\partial \gamma}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \gamma}{\partial x^\beta} \rangle$$

$$= \langle \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^\alpha}\right), \frac{\partial \gamma}{\partial x^\beta} \rangle + \langle \frac{\partial \gamma}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^\beta}\right) \rangle$$

运动方程
法向部分和切向
内积为0.

$$= \langle \Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial x^\eta}, \frac{\partial \gamma}{\partial x^\beta} \rangle + \langle \frac{\partial \gamma}{\partial x^\alpha}, \Gamma_{\beta\gamma}^{\eta} \frac{\partial \gamma}{\partial x^\eta} \rangle$$

$g_{\alpha\beta}(p) = \delta_{\alpha\beta}$

$$= \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}(p) + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}(p).$$

所以，为证定理中的第二式，只须证明在p点处 Christoffel symbols

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(p)=0,\ \forall\ \alpha,\beta,\gamma=1,2.$

为此目的，我们来考查法坐标系下的过p点的测地线的方程

我们知道，一般地，这个方程为：测地线 $r(\rho)=r(x^1(\rho),x^2(\rho))$，$\begin{cases}x^1=\rho\cos\theta_0\\ x^2=\rho\sin\theta_0\end{cases}$

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\rho^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\rho}\frac{dx^\gamma}{d\rho}=0,\quad \alpha=1,2.$$

再注意到 $\frac{d^2x^\alpha}{d\rho^2}=0$，我们有

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\rho\cos\theta_0,\rho\sin\theta_0)\frac{dx^\beta}{d\rho}\frac{dx^\gamma}{d\rho}=0,\quad \alpha=1,2$$

沿测地线 $\theta=\theta_0$ 成立。令 $\rho\to0$，我们有

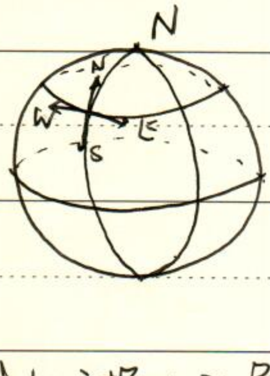
$$\underbrace{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(p)}_{\text{不依赖于}\theta_0}\ \underbrace{\frac{dx^\beta}{d\rho}\Big|_{\rho=0}\ \frac{dx^\gamma}{d\rho}\Big|_{\rho=0}}_{\cos\theta_0\ \text{or}\ \sin\theta_0}=0,\quad \alpha=1,2$$

由于 $\theta_0$ 可任意选取，我们就有 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(p)=0,\ \forall\alpha,\beta,\gamma=1,2.$

从而 $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(p)=0,\ \forall\ \alpha,\beta,\gamma=1,2$ 得证. □

上述定理告诉我们法坐标系在一点处具有很简洁的形式，使该点处的计算变得什么简洁.

下面我们再来考查测地极坐标系。先来看一个例子：




考查以球面上北极点N为原点的测地极坐标系，ρ线即为N点出发的大圆弧（经线），测地圆（θ线）就是纬线圈。

这个例子中有这样的现象，即θ线与ρ线在相交点正交!! 换言之，

$\langle r_\rho, r_\theta \rangle = 0$.

当然，由 $\rho$ 是弧长参数，我们还有 $\langle r_\rho, r_\rho \rangle = 1$.

Gauss (1827) 的一个重要观察，就是上述现象在一般曲面上都对。

定理 5.2 (Gauss' lemma) 从 $p \in M$ 点出发的测地线与以 $p$ 为中心的测地圆彼此正交。

推论：在测地极坐标系下，第一基本形式 $I = d\rho^2 + G(\rho,\theta)\,d\theta^2$.

证明：在测地极坐标 $(\rho,\theta)$ 下，记 $I = E\,d\rho\,d\rho + 2F\,d\rho\,d\theta + G\,d\theta\,d\theta$.

注意因为 $\rho$ 线是以 $\rho$ 为弧长参数的测地线，我们有

$$E = \langle r_\rho, r_\rho \rangle = 1.$$

为证定理 5.2，只须证明 $F = 0 = \langle r_\rho, r_\theta \rangle$

我们知道 $r_\rho$ 是单位切向量，而 $r_\theta$ 在法坐标系下可写作

$$r_\theta = \frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\cos\theta) + \frac{\partial r}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\sin\theta)$$

$$= -\rho\sin\theta\frac{\partial r}{\partial x^1} + \rho\cos\theta\frac{\partial r}{\partial x^2}$$

$$= \rho\left(-\sin\theta\frac{\partial r}{\partial x^1} + \cos\theta\frac{\partial r}{\partial x^2}\right)$$

可见 $\lim\limits_{\rho\to 0} r_\theta = 0$，故 $\boxed{\lim\limits_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = 0. \qquad \langle 1 \rangle}$

下边我们说明，实际上 $F$ 不依赖于变量 $\rho$ !! 考查极坐标下的测地线方程：回忆一般参数曲线 $r(\rho) = r(u^1(\rho), u^2(\rho))$ 为测地线 $\Leftrightarrow$

$$\frac{d^2u^\alpha}{d\rho^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{d\rho}\frac{du^\gamma}{d\rho} = 0, \quad \alpha = 1,2.$$

应用到曲线 $u^1 = \rho$, $u^2 = \theta_0$ ($\rho$ 线)，则有

$$\Gamma^\alpha_{11} = 0, \ \alpha = 1,2. \text{ 在 } \rho \text{ 线上}$$

回忆，$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{EG-F^2}\left(\frac{G}{2}\frac{\partial E}{\partial u^1} + \frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2} - F\frac{\partial F}{\partial u^1}\right)$

$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{EG-F^2}\left(-\frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial u^1} - \frac{E}{2}\frac{\partial E}{\partial u^2} + E\frac{\partial F}{\partial u^1}\right)$.

注意，在我们的情形 $u^1=\rho$, $u^2=\theta$。, $E=1$. 故有

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{G-F^2}\left(-F\cdot\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)=0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{G-F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)=0$$

由第二式，知道 $\frac{\partial F}{\partial \rho}=0$. 即 $F$ 不依赖于 $\rho$.

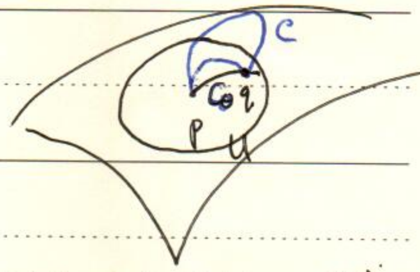
这时再由 $\lim\limits_{\rho\to 0}F(\rho,\theta)=0$，就知道 $F=0$. □

现在我们就可以证明测地线的局部最短性了。

定理5.3（测地线的局部最短性）设 $p\in M$ 是曲面 $M$ 的一点，则存在 $p$ 点的一个小邻域 $U$，使得对任意 $q\in U$，在 $U$ 内联接 $p,q$ 两点的测地线长度在所有联接这两点的曲面曲线中最短.

证明：

设 $\{W\in T_pM, |W|<\varepsilon\}$ 上 $\exp_p$ 均有定义. 就取




$$U=\{\exp_p(W) : W\in T_pM, |W|<\varepsilon\}$$

取 $U$ 上测地极坐标系 $r(\rho,\theta)$. 则对任一 $q=r(\rho_0,\theta_0)\in U$, $\rho$ 线

$$C_{\theta_0}:=\{\theta=\theta_0,\ 0\le\rho\le\rho_0\}$$

是联接 $p,q$ 的测地线，长度为 $\rho_0<\varepsilon$. 下面我们证它是所有联接 $p,q$ 两点的曲面曲线中最短的.

设 $C$ 是联接 $p,q$ 的任意曲面曲线，参数表示为 $r(t)$　$t\in[0,t_0]$

有 $r(0)=p$, $r(t_0)=q$.

(i) 当曲线 $r(t)$ 完全落入 $U$ 内时，可表 $C$ 为 $r(t)=r(\rho(t),\theta(t))$

由于 $\frac{dr}{dt}=r_\rho\frac{d\rho}{dt}+r_\theta\frac{d\theta}{dt}$

$$\Rightarrow \left\langle\frac{dr}{dt},\frac{dr}{dt}\right\rangle=\langle r_\rho,r_\rho\rangle\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+2\langle r_\rho,r_\theta\rangle\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}+\langle r_\theta,r_\theta\rangle\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

高斯引理（定理5.2及推论）告诉我们

$$\left|\frac{dr}{dt}\right|^2 = \left\langle \frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right\rangle = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \geq \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$$

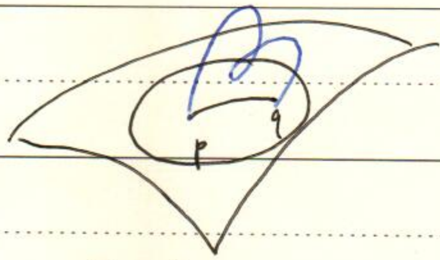
所以曲线C的长度

$$L(C) = \int_0^{t_0} \left|\frac{dr}{dt}\right| dt \geq \int_0^{t_0} \left|\frac{d\rho}{dt}\right| dt \geq \int_0^{t_0} \frac{d\rho}{dt} dt$$

$$= \rho(t_0) = \rho(q) = \rho_0 = L(C_{\theta_0})$$

(ii) 当曲线C不完全落入U中时，

设 $t_1 \in [0, t_0]$ 是C第一次与U的边界 $\partial U$ 相交，（于 $r(t_1) \in \partial U$ 点），则




$r(t), t \in [0, t_1)$ 完全落入U中

~~此时~~ 均可参数化为 $r(t) = r(\rho(t), \theta(t)), t \in [0, t_1)$

则对任意 $0 < t_2 < t_1$，有

$$L(r|_{[0,t_2]}) = \int_0^{t_2} \left|\frac{dr}{dt}\right| dt \geq \int_0^{t_2} \frac{d\rho}{dt} dt = \rho(t_2)$$

令 $t_2 \to t_1$，就有 $L(C) \geq \lim_{t_2 \to t_1} L(r|_{[0,t_2]}) = \lim_{t_2 \to t_1} \rho(t_2) = \varepsilon$

$$> \rho_0 = L(C_{\theta_0}). \qquad \square$$

注意到，在测地极坐标下，第一基本形式有极简单的形式

$$I = d\rho d\rho + G(\rho, \theta) d\theta d\theta$$

可以想象，在这个坐标下，Gauss曲率有较简洁的表达式。实际上，回忆Gauss绝妙定理告诉我们

$$\begin{aligned}4(EG-F^2)^2 K(p) = &E\left(E_v G_v - 2F_u G_v + (G_u)^2\right)\\ &+F\left(E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_u\right)\\ &+G\left(E_u G_u - 2E_u F_v + (E_v)^2\right)\\ &-2(EG-F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}).\end{aligned}$$