在测地极坐标下，$u=\rho$，$v=\theta$，$E=1$，$F=0$，我们就有

$$4G^2\cdot K = (G_\rho)^2 - 2G\cdot G_{\rho\rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{(G_\rho)^2}{4G^2} - \frac{G_{\rho\rho}}{2G}}$$

实际上通过一个直接的运算可验证

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

利用这个简洁的表达式，我们可以研究 Gauss曲率为常数的曲面

回忆期中考试时，我们算过一个例子说明，存在两个曲面，存在映射使Gauss曲率保持，但这两个曲面即使局部也不是等距的。

下面我们的讨论会说明，如果两个曲面的Gauss曲率为常值且相等，则局部可以建立这两个曲面间的等距变换!!

实际上，我们就在测地极坐标上，求解二阶常系数常微分方程

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}} = C \iff (\sqrt{G})_{\rho\rho} + C\sqrt{G} = 0$$

来说明对固定的 c，第一基本形式在测地极坐标下 $I = d\rho^2 + G\,d\theta^2$ 具有相同的形式。

为此目的，我们先作些技术上的准备。我们想了解测地极坐标下关于 G 的更多信息。

定理5.4 测地极坐标系 $r(\rho,\theta)$ 下，$G=\langle r_\theta, r_\theta\rangle$ 有如下性质：

(i) $\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0$

(ii) $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$.

证明：首先要理解 $\sqrt{G}$ 这一项是什么，它实际上就是曲面上的面积元

$$\sqrt{G} = \sqrt{EG-F^2}, \quad E=1,\ F=0$$

如果把坐标换为法坐标系，面积元为 $\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}$，其中 $I = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$

为法坐标系下之第一基本形式．回忆在坐标变换下面积元之变换规则为

$$\sqrt{G} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \rho} & \frac{\partial x^2}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \theta} & \frac{\partial x^2}{\partial \theta} \end{pmatrix} \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}$$

$$= \rho\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}$$

因此我们有 $\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0$.

又可计算 $(\sqrt{G})_\rho = \frac{\partial}{\partial\rho}(\sqrt{G}) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}\right)$

$$= \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} + \rho\,\frac{1}{2\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}}\,\frac{\partial}{\partial\rho}(\det g_{\alpha\beta})$$

$$= \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} + \rho\,\frac{1}{2\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}}\left[\cos\theta\frac{\partial}{\partial x^1}\det(g_{\alpha\beta}) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial x^2}\det(g_{\alpha\beta})\right]$$

当 $\rho\to 0$ 时，$\det(g_{\alpha\beta}) \to \det(\delta_{\alpha\beta}) = 1$,

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\det(g_{\alpha\beta}) = \frac{\partial}{\partial x^1}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$$

$$= g_{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1}\cdot g_{22} - 2g_{12}\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \longrightarrow 0.$$

同理 $\frac{\partial}{\partial x^2}\det(g_{\alpha\beta}) \to 0$

因此，$\lim\limits_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$. □

下面我们回到方程在测地极坐标(ρ,θ)下 $\boxed{(\sqrt{G})_{\rho\rho} + K\sqrt{G} = 0}$ 作讨论.

<1> 高斯曲率 $K=0$. 由 $(\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0$ 知 $(\sqrt{G})_\rho$ 不依赖于ρ

故可设 $(\sqrt{G})_\rho = f(\theta)$

但由定理 5.4 (ii)，$\lim\limits_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$，知 $f(\theta)\equiv 1$.

从而 $(\sqrt{G})_\rho = 1 \Rightarrow \sqrt{G} = \rho + g(\theta)$.

再由定理 5.4 (i) 知 $\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0 \Rightarrow g(\theta)\equiv 0$.

也就是说在这种情形下， $\sqrt{G}=\rho$.

所以在此局部坐标上，第一基本形式 $I=d\rho d\rho+\rho^2 d\theta d\theta$.

〈2〉. $K=\frac{1}{a^2}>0$. 解方程 $(\sqrt{G})_{\rho\rho}+\frac{1}{a^2}\sqrt{G}=0$.

通解为 $\sqrt{G}=f(\theta)\cos\frac{\rho}{a}+g(\theta)\sin\frac{\rho}{a}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0=f(\theta),\\ \lim\limits_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=\lim\limits_{\rho\to 0}\left(-\frac{1}{a}f(\theta)\sin\frac{\rho}{a}+\frac{1}{a}g(\theta)\cos\frac{\rho}{a}\right)=\frac{1}{a}g(\theta)=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$f(\theta)=0,\quad g(\theta)=a. \quad\Rightarrow \sqrt{G}=a\sin\frac{\rho}{a}.$$

第一基本形式为 $I=d\rho d\rho+a^2\sin^2\frac{\rho}{a}d\theta d\theta$.

〈3〉 $K=-\frac{1}{a^2}<0$, 解方程 $(\sqrt{G})_{\rho\rho}-\frac{1}{a^2}\sqrt{G}=0$

通解为 $\sqrt{G}=f(\theta)\cosh\frac{\rho}{a}+g(\theta)\sinh\frac{\rho}{a}$.

同样由 $\lim\limits_{\rho\to 0}\sqrt{G}=f(\theta)=0$

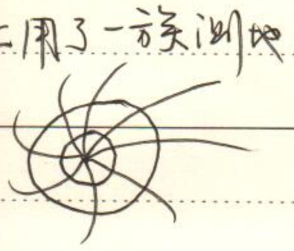
$$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{1}{a}f(\theta)\sinh\frac{\rho}{a}+\frac{1}{a}g(\theta)\cosh\frac{\rho}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{a}g(\theta)=1$$

$$\Rightarrow f(\theta)=0,\ g(\theta)=a \Rightarrow \sqrt{G}=a\sinh\frac{\rho}{a}.$$

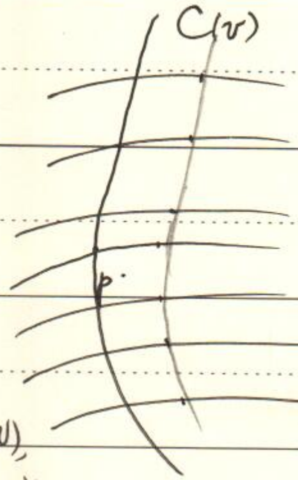
第一基本形式 $I=d\rho d\rho+a^2\sinh^2\frac{\rho}{a}$. □

注记：回想测地极坐标系的构造：我们实际上用了一族测地线"覆盖"了一个区域，然后另一族坐标曲线取作处处与这族测地线正交的曲线



一族坐标曲线是测地线 $\Rightarrow$ $E=1=\langle r_u, r_u\rangle$
另一族坐标曲线与之正交 $\Rightarrow$ $F=0$
$\Big\}\Rightarrow I = dudu + G\,dvdv.$

其实，我们还可构造其它类似的坐标系.



过 p 点取曲线 C，取弧长参数 v, s.t. $C(0)=p$.
过 C 上每点作与 C 正交的测地线
每条这样的测地线就取弧长参数 u
这样我们就有一族测地线，取
它们为坐标 u-线. 坐标 v-线，$u=0$ 时取作 $C(v)$
对一般的 u，取每条测地线上参数 u 对应点的连线.
这样我们得到 p 点附近曲面的一个参数化 $r=r(u,v)$.
可以验证 (u,v) 是正则参数（需要证明，我们在这里就不详细讨论了）.

同样，因为 u-线为测地线，有 $E=\langle r_u, r_u\rangle=1$.
另一方面，由取法知这族测地线与 $C(v)$ 正交，即

$$F(0,v)=\langle r_u, r_v\rangle\big|_{u=0}=0. \quad ①$$

观察到 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=\langle r_{uu}, r_v\rangle+\langle r_u, r_{vu}\rangle$

其中 r_{uu} 为 u-线的曲率向量. 测地线说明测地曲率也即 r_{uu} 在曲面切平面投影为 0，换言之，对测地线，r_{uu} 只有法向部分，特别地 $\langle r_{uu}, r_v\rangle=0$.

而 $\langle r_u, r_{vu}\rangle=\langle r_u, r_{uv}\rangle=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\langle r_u, r_u\rangle=0$.

这也就是说，$\dfrac{\partial F}{\partial u}=0$. ②

结合 ① ② 说明: $F\equiv 0$.

故在这个坐标系下，第一基本形式 $I = dudu + G\,dvdv$.

上述结论 $F=0$，实际上是 Gauss' lemma 的一个推广。Gauss (1827) 在证明 Gauss' lemma 后立即给出了这样的推广

定理 5.5 (Gauss' lemma (II)) 设 C 为曲面 M 上的一条曲线，

过C上每一点取与之正交的测地线，得一族测地线，~~[illegible]~~ 这这族测地线在C同一侧到与C有等弧长相等的点所得曲线与这族测地线正交。

可以看到，当C退化为一点时，上述定理就是前述的Gauss lemma 定理5.2（227页）

回到上面坐标系的讨论，为了让G具有好的性质，我们可取C为过p的一条测地线。这样在$u=0$，我们有

以v为弧长参数 $G(0,v) = \langle r_v, r_v\rangle|_{u=0} = 1$

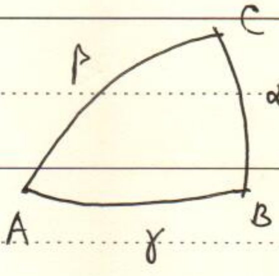
这种~~测地~~坐标称作 测地平行坐标系 □

§6 测地三角形内角和

经过前面几节关于测地线的讨论，我们已经准备好回到本章开始提到的问题，也就是Gauss（1827）中的最重要的一个结果，Gauss认为这应该算作曲面理论中最优雅（elegant）的定理：关于测地三角形内角和与高斯曲率的结果。（注意，Gauss称他的绝妙定理为最productive的定理）。

我们考虑可落入一个测地极坐标邻域的测地三角形

定理6.1 假设测地三角形△ABC包含在某点附近存在测地极坐标系的邻域内。~~[illegible]~~ 记



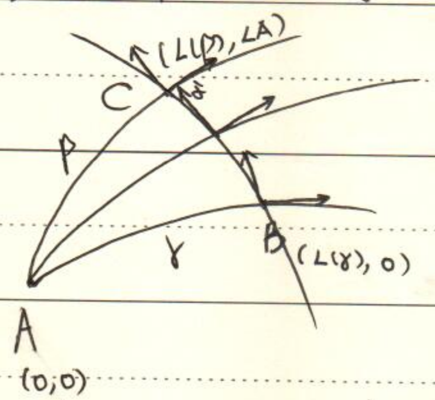
如右所示连接三点的测地线分别为α，β，γ。

记∠A为β，γ在A点的夹角，~~[illegible]~~ ∠B为γ，α在B点夹角，∠C为α，β在C点夹角，那么我们有

$$\iint_{\triangle ABC} K\,dV = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

为和角A，点区分，我们把面积元dA记作dV.

注意，有些时候，测地极坐标邻域可以很大，如在球面上，在 S^2 除south pole 上可引入以 North pole 为原点的测地极坐标。下面我们讨论的证明基本和 Gauss 的原证明吻合。



证明：$r=r(\rho,\theta)$

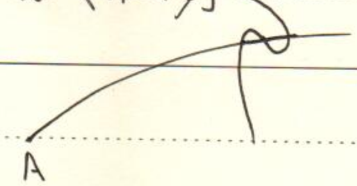
我们可取测地极坐标使 A, B, C 三点的坐标分别为

$(0,0)$，$(L(\gamma),0)$，$(L(\beta),\angle A)$

沿测地线 α（以连接 B 和 C），s 弧长参数，我们引入函数 $\varphi(s)$ 为 $\alpha(s)$ 处，$\alpha'(s)$ 和过 $\alpha(s)$ 点的 ρ-线的切向 $r_\rho|_{\alpha(s)}$ 的夹角，即

$$\cos\varphi(s)=\langle\alpha'(s),\ r_\rho|_{\alpha(s)}\rangle$$

注意 α 不会和从 A 点出发的同一条测地射线相交多于一次



故可 $\alpha(s)$ 可在测地极坐标下表为

$\cancel{(\theta, f(\theta))}$ $(f(\theta),\theta)$

这里 $f(\theta)$ 就取为与 γ 在 A 处夹 θ 角的测地射线从 A 到和 α 相交点的长度。

这样 φ 又可看作 θ 的函数，$\varphi(0)=\varphi|_{\theta=0}=\pi-\angle B$

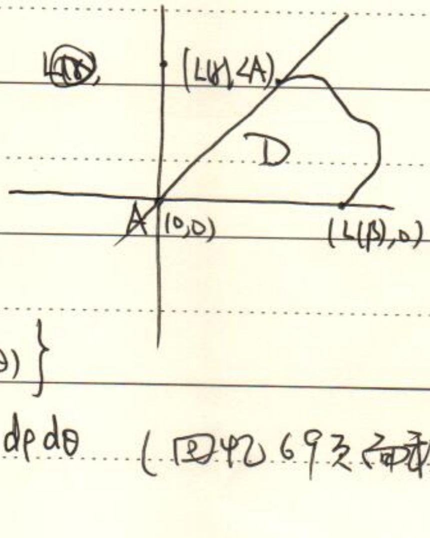
$$\varphi(\angle A)=\varphi|_{\theta=\angle A}=\angle C$$

回忆在此坐标系下 $I=d\rho d\rho+G\,d\theta d\theta$，且高斯曲率

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}$$

下面计算

$$\iint_{\triangle ABC} K\,dV$$



我们可在参数区域 $\{(\rho,\theta)\}$ 上看 $\triangle ABC$：记相应区域为

$$D:=\{(\rho,\theta)\mid 0\le\theta\le\angle A,\ 0\le\rho\le f(\theta)\}$$

则 $\displaystyle\iint_{\triangle ABC} K\,dV=\iint_D -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}\,|r_\rho\wedge r_\theta|\,d\rho\, d\theta$ （回忆69页面积讨论）

$$= \iint_D -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}\underbrace{\sqrt{EG-F^2}}_{=\sqrt{G}}\,d\rho\, d\theta = \iint_D -(\sqrt{G})_{\rho\rho}\,d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{\angle A}\left(\int_0^{f(\theta)}(-\sqrt{G})_{\rho\rho}\,d\rho\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\angle A}(-\sqrt{G})_\rho\Big|_0^{f(\theta)}d\theta \overset{\lim_{\rho\to0}(\sqrt{G})_\rho=1}{=} \int_0^{\angle A}\left(1-(\sqrt{G})_\rho(f(\theta),\theta)\right)d\theta$$

$$= \angle A - \int_0^{\angle A}\frac{\partial}{\partial\rho}(\sqrt{G})\,(f(\theta),\theta)\,d\theta.$$

引理. 在测地极坐标下. ($I = d\rho d\rho + G\, d\theta d\theta$), Christoffel 符号有

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial \rho}$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\rho}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial\theta}.$$

其它 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$.

证明: 练习. □

注意. α 为测地线, 由上述引理, 我们知道, 特别地它满足方程 ($\alpha = (\rho(s),\theta(s)) = (f(\theta(s)),\theta(s))$)

$$0 = \frac{d^2\rho}{ds^2} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = \frac{d^2\rho}{ds^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\rho}\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$$

又因为 $\cos\varphi = \langle \alpha'(s), r_\rho|_{\alpha(s)}\rangle$

$$= \left\langle \frac{d}{ds}(r(\rho(s),\theta(s))), r_\rho|_{\alpha(s)}\right\rangle$$

$$= \left\langle r_\rho\frac{d\rho}{ds} + r_\theta\frac{d\theta}{ds}, r_\rho|_{\alpha(s)}\right\rangle = \frac{d\rho}{ds}$$

故而 $\dfrac{d^2\rho}{ds^2} = \dfrac{d}{ds}\cos\varphi(s) = -\sin\varphi(s)\dfrac{d\varphi}{ds}$.

代入测地线方程有 $-\sin\varphi(s)\dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial G}{\partial\rho}\left(\dfrac{d\theta}{ds}\right)^2$. (#)

~~因规定θ的取法, $\frac{d\theta}{ds} > 0$ 故有~~

~~$-\sin\theta(s) = \frac{1}{2} G_\rho \frac{d\theta}{ds}$ (*)~~

又看到 $\sin\varphi(s)$ 是 $\alpha'(s)$ 和 $r_\rho|_{\alpha(s)}$ 张成的平行四边形面积

故 $\sin\varphi(s) = |\alpha'(s) \wedge r_\rho| = |r_\theta \frac{d\theta}{ds} \wedge r_\rho| = \frac{d\theta}{ds}\sqrt{G}(s)$

代入(*)式有 $-\sqrt{G}(s)\,\frac{d\theta}{ds}\,\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2} G_\rho \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2$

因规定θ的取法, $\frac{d\theta}{ds} > 0$. 故有

$$-\sqrt{G}(s)\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2} G_\rho \frac{d\theta}{ds}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{G_\rho}{2\sqrt{G}}\frac{d\theta}{ds}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{ds} = -(\sqrt{G})_\rho \frac{d\theta}{ds}} \quad (**)$$

回到原计算, $\iint_{\Delta ABC} K\,dV = \angle A - \int_0^{\angle A} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\rho}(f(\theta),\theta)\,d\theta$

$$= \angle A - \int_0^{\angle A} (\sqrt{G})_\rho\, d\theta$$

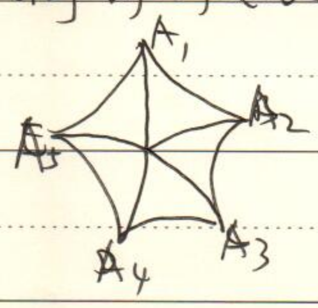
$$= \angle A + \int_0^{\angle A} d\varphi$$

$$= \angle A + \varphi(\angle A) - \varphi(0)$$

$$= \angle A + \angle C - (\pi - \angle B) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi \quad \Box$$

就Gauss (1827) 在他文章中提到的, 这个结果可立即推广到测地n边形

可以用测地三角形拼成测地n边形 则立即有



$$\iint K\,dV = \left(\sum_{i=1}^{n}\angle A_i + 2\pi\right) - n\pi$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\angle A_i - (n-2)\pi.$$