上次课问题

补

(1) 证明 $T(X)=XT$ 之后，如何说明 T 为正交阵？

(为什么证明 T 为线性变换就够了)

由于 T 保持距离，$\forall P, Q$，有 $d(P,Q)=d(T(P),T(Q))$

而 $d(P,Q)=\sqrt{\langle \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ}\rangle}=\sqrt{\langle \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\rangle}=\sqrt{\langle Q-P,Q-P\rangle}$

故有 $\langle Q-P,Q-P\rangle=\langle T(Q-P),T(Q-P)\rangle$, $\forall P,Q$

$\Rightarrow \langle P,P\rangle=\langle T(P),T(P)\rangle$, $\forall P$

即 $PP^t=PTT^tP^t$, $\forall P$ $\Rightarrow TT^t=Id$.

(2) 在定理的证明中，为什么能求导？(对 $T(tX)=tT(X)$ 求导？)

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 保距离 $\Rightarrow d(T(P),T(Q))=d(P,Q)$

($\Rightarrow$ T 是 Lipschitz 连续 $\xRightarrow{\text{Rademacher Thm}}$ 几乎处处可微)

在我们的证明中，我们假定了 T 为 C^1。如不用此条件，可讨论如下.

~~结论~~ 注意 $d(P,Q)=\sqrt{\langle Q-P,Q-P\rangle}=\sqrt{\langle Q,Q\rangle+\langle P,P\rangle-2\langle P,Q\rangle}$

$\Rightarrow d^2(P,Q)=d(Q,O)^2+d(P,O)^2-2\langle P,Q\rangle$

而 $d^2(T(P),T(Q))=d(T(Q),O)^2+d(T(P),O)^2-2\langle T(P),T(Q)\rangle$

$d(P,Q)=d(T(P),T(Q))$, $T(O)=O$. $\Rightarrow \langle P,Q\rangle=\langle T(P),T(Q)\rangle$

在 $\mathbb{R}^3$ 中选标准正交基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 记 $T(e_i):=w_i$

则 $d(w_i,O)^2=\langle w_i,w_i\rangle=d(e_i,O)^2=1$

$\langle w_i,w_j\rangle=\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$.

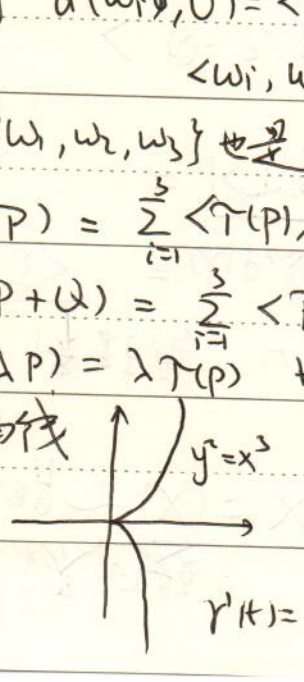
故 $\{w_1,w_2,w_3\}$ 也是标准正交基.

$T(P)=\sum_{i=1}^{3}\langle T(P),w_i\rangle w_i=\sum_{i=1}^{3}\langle P,e_i\rangle w_i$

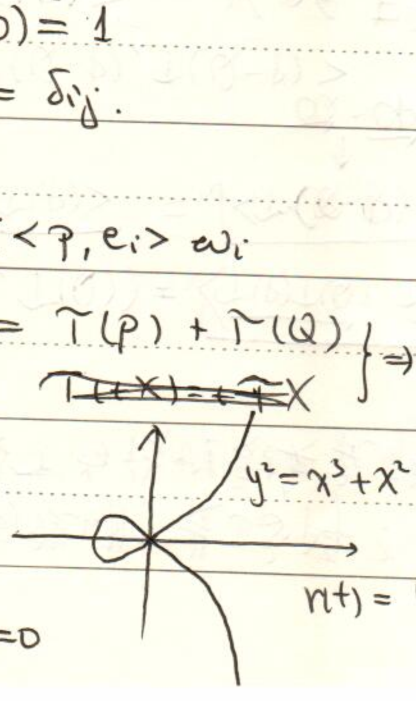
$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow T(P+Q)=\sum_{i=1}^{3}\langle P+Q,e_i\rangle w_i=T(P)+T(Q)\\&T(\lambda P)=\lambda T(P)\quad\forall\lambda\end{aligned}\right\}\Rightarrow T \text{ linear.}$$

~~$T(tX)=tTX$~~

(3) 正则曲线



(cuspidal cubic)



(nodal cubic)

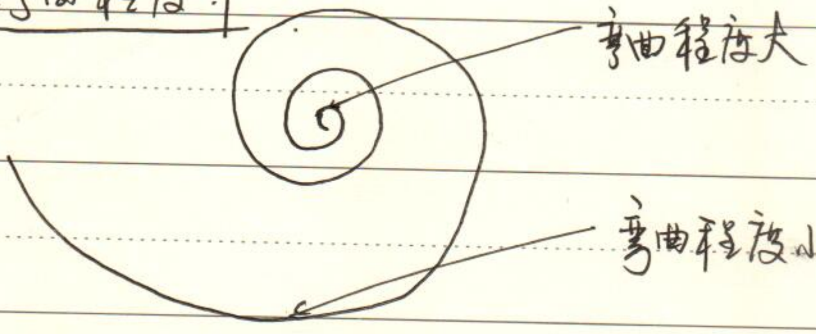
$r(t)=(t^2,t^3)$ $\quad r'(t)=(2t,3t)$ $\quad |r'(0)|=0$

$r(t)=(t^2-1,t(t^2-1))$

取弧长参数的曲线处处有 单位切向量

记号 $r(s)$ 弧长参数 $\frac{dr}{ds} = \dot{r}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$.

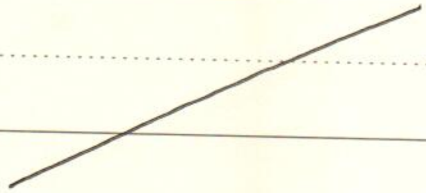
如何量化弯曲程度?



基本"共识":

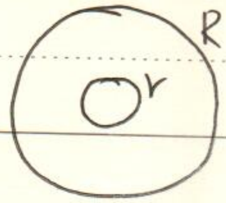
量化

(a) 直线不弯曲.



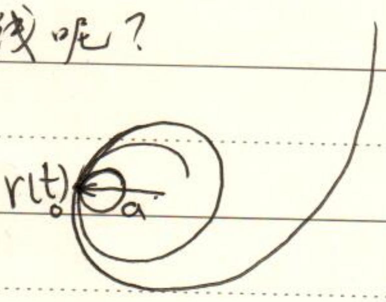
0

(b) 半径R的圆比半径 $r<R$ 的圆弯曲程度小



$\frac{1}{r}$

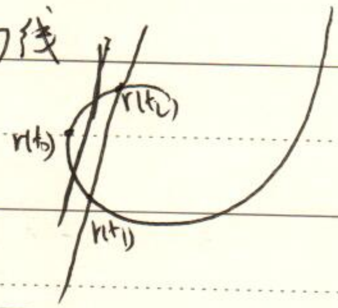
一般曲线呢?



密切圆 osculating circle

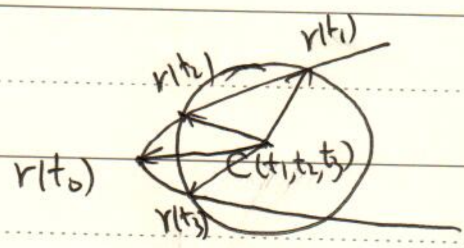
如何找到?

类比找切线



$t_1, t_2 \to t_0$

找密切圆: 用三点



$t_1, t_2, t_3 \to t_0$

· 由于 $\left|\frac{dr}{dt}\right| > 0$，局部 1-1，当 t_1, t_2, t_3 充分靠近 t_0，各不相同时，点 $r(t_1), r(t_2), r(t_3)$ 也会不相同

不妨设 $t_1 < t_2 < t_3$.

我们假设 $r(t_1), r(t_2), r(t_3)$ 三点不共线，这样，它们唯一确定一个圆通过所有三点，记其圆心为 $C(t_1, t_2, t_3)$

· 考虑如下的函数：

$$t \longmapsto \langle r(t) - C(t_1,t_2,t_3),\ r(t) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle$$

它在 t_1, t_2, t_3 三点处取值相等，故存在 $\xi_1 \in (t_1, t_2)$
$\xi_2 \in (t_2, t_3)$

使得 $0 = \langle r'(\xi_i),\ r(\xi_i) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle$, $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$, $i = 1, 2$.

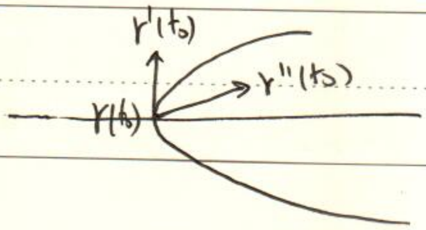
同样，函数 $t \mapsto \langle r'(t), r(t) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle$
在某 $\eta \in (\xi_1, \xi_2)$ 处导数为 0，也就是

$$0 = \langle r''(\eta), r(\eta) - C(t_1,t_2,t_3)\rangle + \langle r'(\eta), r'(\eta)\rangle.$$

· 假设 $C(t_1, t_2, t_3) \longrightarrow C$ as $t_1, t_2, t_3 \to t_0$
我们由上述分析得到

$$\begin{cases} \langle r'(t_0), r(t_0) - C\rangle = 0 & (1) \\ \langle r''(t_0), r(t_0) - C\rangle = -\langle r'(t_0), r'(t_0)\rangle & (2). \end{cases}$$

由(1)知，所得圆切曲线于 $r(t_0)$，故 C ~~被限之~~ 只能存在于一条线上.



再由(2)知 若 $r''(t_0)$ 和 $r'(t_0)$ 不在同一条线上，C 的位置便由(2)唯一确定了. (若 $\exists\lambda$ s.t. $r''(t_0)=\lambda r'(t_0)$，我们有

$$\lambda\underbrace{\langle r'(t_0),r(t_0)-C\rangle}_{\overset{(1)}{=}0}=-\langle r'(t_0),r'(t_0)\rangle\underset{\text{正则}}{\neq}0 \quad ↯$$

故 C(t_1,t_2,t_3) 不存在极限点 as $t_1,t_2,t_3\to t_0$

下面我们看到，如果我们改用弧长参数，便可以把 C 明确地解出来

$r(s)$. 由 $\langle r'(s),r'(s)\rangle=1$

微分得 $\langle r''(s),r'(s)\rangle=0$.

垂直.

故 $r''(s)=\lambda r'(s)\Leftrightarrow$ ~~$\lambda=0$~~ $r''(s)=0$.

- 若 $r''(s)\neq0$. 由 记 $s_0:=s^{-1}(t_0)$
$$\begin{cases}\langle r''(s_0),r'(s_0)\rangle=0\\ \langle r'(s_0),r(s_0)-C\rangle=0 \quad \Leftarrow (1)\end{cases}$$

知 $r''(s_0)=a\cdot(r(s_0)-C)$ for some $a\in\mathbb{R}$, $\underset{(2)}{\Uparrow}\ a<0$.

从而(2)告诉我们

$$a\,|r(s_0)-C|^2=-1$$

注意 $|r''(s_0)|=-a\cdot|r(s_0)-C|$，故有

$$|r(s_0)-C|=\frac{1}{|r''(s_0)|}$$

或 $$|r''(s_0)|=\frac{1}{|r(s_0)-C|}.$$

也就是说能找一圆切曲线于 $r(s)$ 且半径为 $\frac{1}{|r''(s)|}$、

当然如果 $r''(s)=0$，$\frac{1}{|r''(s)|}=\infty$，因此此时圆心不存在，上述无意义

$\boxed{|r''(s)| \text{ 可为"曲率"定义}}$

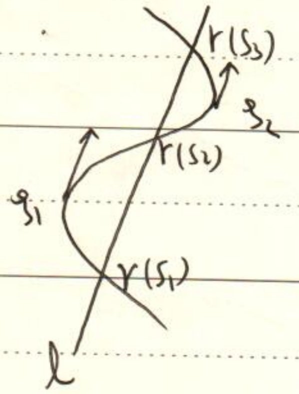
将上述讨论再精确化，我们有.

定理 2.1. 设 $r:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ 是一条弧长参数的正则曲线

(i) 如果 $r''(s)\neq 0$，那么当 s_1, s_2, s_3 与 s 充分近时，$r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 三点不共线。并且当 $s_1, s_2, s_3 \to s$ 时，由三点 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 唯一确定的圆收敛到一个通过点 $r(s)$ 的圆，其半径为 $\frac{1}{|r''(s)|}$，其圆心在过 $r(s)$ 点且与 $c(s)$ 处切向垂直的直线上.

(ii) 如果 $r''(s)=0$，即使三点 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 不共线，其确定的圆也不收敛.

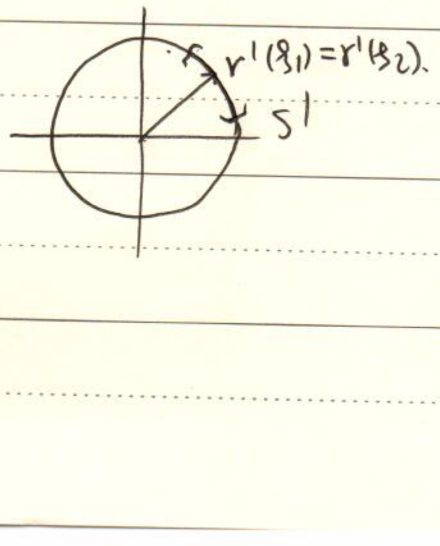
证明：(i) $r''(s)\neq 0$:



如果 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 三点共线，则由 Cauchy 中值定理，$\exists\ \xi_i \in (s_i, s_{i+1})$，$i=1,2$.

s.t. $r'(\xi_i)$ 和直线平行.

故 $r'(\xi_1)=r'(\xi_2)$.



考虑 $r'(s)$ 在 S^1 上的曲线 $s\in[\xi_1,\xi_2]$

当 ξ_1, ξ_2 充分靠近 s，$r'|_{[\xi_1,\xi_2]}$ 不会是整个 S^1. 故 $\exists\ \eta$ s.t. $r'(\eta)$ 离 $r'(\xi_i)$ 最远.

由光滑性 $r''(\eta)=0$.

这与 $r''(s)\neq 0$ 且 s_1, s_2, s_3 充分靠近 s 矛盾.

下证收敛性。当$r'(s)\neq 0$时. 我们由方程

$$(*)\begin{cases}\langle r'(s),\ r(s)-C\rangle = 0\\ \langle r''(s),\ r(s)-C\rangle = -\langle r'(s), r'(s)\rangle = -1\end{cases}$$

可唯一确定点C。几何角度之前因已经解释过了。也可代数地看：

设 $r(s)=(x(s),y(s))$. 记 $r(s)-C=(a(s),b(s))$

我们有 $(*)\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x'(s) & y'(s)\\ x''(s) & y''(s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a(s)\\ b(s)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}.$$

当 $r''(s)\neq 0$ 即 $r''(s)$ 和 $r'(s)$ 不共线时, $\det\begin{pmatrix}x'(s) & y'(s)\\ x''(s) & y''(s)\end{pmatrix}\neq 0$.
故有唯一解 $(a(s),b(s))$. 从而唯一确定C.

对 $s_1<s_2<s_3$ 靠近 s, 记 $C(s_1,s_2,s_3)$ 为过它们的唯一圆的中心。
为证其收敛，我们证其收敛到点C.
回忆 $C(s_1,s_2,s_3)$ 满足

$$(**)\begin{cases}\langle r'(\xi_i),\ r(\xi_i)-C(s_1,s_2,s_3)\rangle = 0,\ \xi_i\in(s_i,s_{i+1}),\ i=1,2\\ \langle r''(\eta),\ r(\eta)-C(s_1,s_2,s_3)\rangle=-1,\ \eta\in(\xi_1,\xi_2).\end{cases}$$

这可以写成

$$\begin{cases}\overbrace{\langle r'(\xi_i), r(\xi_i)-r(s)\rangle}^{\to 0}+\overbrace{\langle r'(\xi_i), r(s)-C\rangle}^{\to 0}+\langle r'(\xi_i), C-C(s_1,s_2,s_3)\rangle=0\\ \underbrace{\langle r''(\eta), r(\eta)-r(s)\rangle}_{\to 0}+\underbrace{\langle r''(\eta), r(\eta)-C\rangle}_{\to -1}+\langle r''(\eta), C-C(s_1,s_2,s_3)\rangle=-1\end{cases}$$

Let $s_1,s_2,s_3\to s$, we have

$$\begin{cases}\lim\limits_{s_i\to s}\langle r'(\xi_i),\ C-C(s_1,s_2,s_3)\rangle=0\\ \lim\limits_{s_i\to s}\langle r''(\eta),\ C-C(s_1,s_2,s_3)\rangle=0\end{cases}$$

记 $C-C(s_1,s_2,s_3)=(\zeta_1(s_1,s_2,s_3),\ \zeta_2(s_1,s_2,s_3))$.

我们有.

$$\begin{pmatrix} x'(\xi_i), & y'(\xi_i) \\ x''(\eta), & y''(\eta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1(s_1,s_2,s_3) \\ \zeta_2(s_1,s_2,s_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(s_1,s_2,s_3) \\ \varepsilon_2(s_1,s_2,s_3)\end{pmatrix}$$

where $\lim\limits_{s_i\to s} \varepsilon_1(s_1,s_2,s_3) = \lim\limits_{s_i\to s} \varepsilon_2(s_1,s_2,s_3) = 0$.

Since $\langle x'(s), x''(s)\rangle = 0$, 当 s_i 和 s 充分近时,

$$\begin{pmatrix} x'(\xi_i), & y'(\xi_i) \\ x''(\eta) & y''(\eta) \end{pmatrix}$$ 可逆

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \zeta_1(s_1,s_2,s_3) \\ \zeta_2(s_1,s_2,s_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(\xi_i), & y'(\xi_i) \\ x''(\eta), & y''(\eta) \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \varepsilon_1(s_1,s_2,s_3) \\ \varepsilon_2(s_1,s_2,s_3)\end{pmatrix}$$

因此我们有 $\lim\limits_{s_i\to s} C - C(s_1,s_2,s_3) = 0$.

也就是说 $C(s_1,s_2,s_3)$ 收敛到 C.

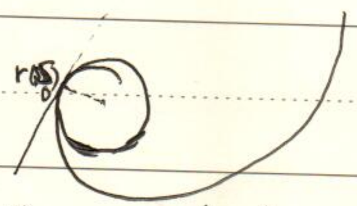
由于 (*) 成立, 收敛到的圆 有半径 $\frac{1}{|r''(s)|}$, 圆心在过 $r(s)$ 点且与 $C(s)$ 处切向垂直的直线上.

若 $r''(s)=0$, 则如果当 s_1,s_2,s_3 都和 s 充分近时 $r(s_1), r(s_2), r(s_3)$ 不共线, 假设 $C(s_1,s_2,s_3)$ 收敛到 C, 则 可对 (**) 取 极限 $s_i\to s$. 我们有

$$\begin{cases} \langle r'(s), r(s)-C\rangle = 0 \\ \underbrace{\langle r''(s), r(s)-C\rangle}_{=0} = -\langle r'(s), r'(s)\rangle = -1 \end{cases}$$

⚡

故 $C(s_1,s_2,s_3)$ 不收敛. □



密切圆 osculating circle

$r(s)$ 点处"最好"的逼近圆

回忆切线 (由向量 $r'(s)$ 给出) 是曲线在 $r(s)$ 点处的一阶近似

更进一步可考虑曲线在 $r(s)$ 点处的二阶近似.

将 $r(s)$ 在 $s=s_0$ 做 Taylor 展开:

$$r(s) = r(s_0) + \dot{r}(s_0)(s-s_0) + \frac{1}{2}\ddot{r}(s_0)(s-s_0)^2 + \cdots$$

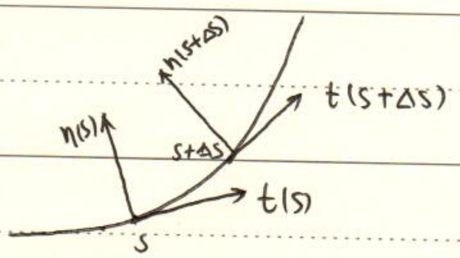
曲率 curvature

可以定义 $|\ddot{r}(s)|$ 为曲线 $r(s)$ 在 s 处的曲率.

这样直线有零曲率 半径为 a 的圆有曲率 $\frac{1}{a}$.

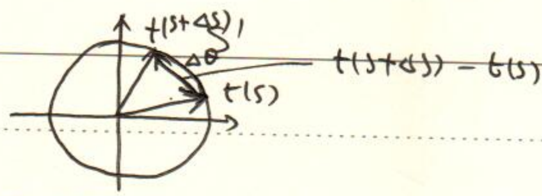
注记: 虽然表达式 $|\ddot{r}(s)|$ 已蕴含在 E^3 中选定坐标标架, 以及对曲线选定弧长参数. 但它表示的是 $r(s)$ 点处密切圆半径的倒数, 故这个定义是不依赖于标架和参数选取的. 选取坐标, 选取参数只是手段、工具。

运动学理解: 当一质点沿曲线以单位速率前进时, 方向向量转动的快慢.



给定 $r(s)$

记 切向量 $t(s) := \dot{r}(s)$



性质: 设 $\Delta\theta$ 为 $t(s)$ 和 $t(s+\Delta s)$ 之间的夹角, 则

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \left|\frac{dt}{ds}\right| = |\ddot{r}(s)|$$

证明: $$\left|\frac{dt}{ds}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|t(s+\Delta s)-t(s)|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\left|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right|}{|\Delta s|} = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

(注意 $|t(s+\Delta s)-t(s)|$ 为角 $\Delta\theta$ 所对应弦长
角 $\Delta\theta$ 也即其所对应弧长) □

换言之，考虑映射

$$f:\ \overset{\text{曲线}}{r} \longrightarrow S^1$$
$$r(s) \longmapsto t(s)$$

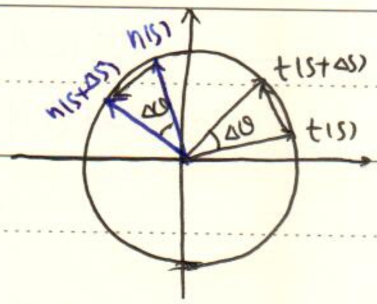
把曲线 r 的一段弧映为 S^1 的一段弧，其长度比值的极限即为曲率.

为了与后来谈到的曲面高斯映射统一，我们这里可等价地考虑映射

$$g:\ r \longrightarrow S^1$$
$$r(s) \longmapsto n(s)$$

这里 $n(s)$ 是 $r(s)$ 处的单位法向量，且 $\{t(s), n(s)\}$ 与 $\{i, j\}$ 定向相同. 故 $n(s)$ 由 $t(s)$ 唯一确定。

我们显然有



$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = |\dot t(s)| = |\dot n(s)|$$

$\boxed{\text{Frenet 标架及带符号曲率}}$

注意到在曲线的每一点处我们有标架 $\{r(s);\ t(s), n(s)\}$

称 $\{r(s);\ t(s), n(s)\}$ 为沿曲线 r 的 Frenet 标架

标架随参数 s 的变化?

考查 $\dot t(s) = \ddot r(s)$.

因为 $\langle \ddot r(s), \dot r(s)\rangle = 0$，$\langle n(s), \dot r(s)\rangle = 0$. 故存在数 $\kappa(s)\in\mathbb{R}$

s.t. $\ddot r(s) = \kappa(s)\, n(s)$.

$\Rightarrow\quad \dot t(s) = \kappa(s)\, n(s)$.

这里 $|k(s)| = |\dot{t}(s)| = |\ddot{r}(s)|$

$\ddot{r}(s)\neq 0$. 当 $\ddot{r}(s)=\dot{t}(s)$ 与 $n(s)$ 同向时，$k(s)>0$

$\ddot{r}(s)=\dot{t}(s)$ 与 $n(s)$ 反向时，$k(s)<0$.

故 $k(s)$ 为带符号曲率.

另一方面 $\langle n(s), n(s)\rangle = 1 \Rightarrow \langle \dot{n}(s), n(s)\rangle = 0$

$\langle n(s), t(s)\rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{n}(s), t(s)\rangle = -\langle \dot{t}(s), n(s)\rangle$

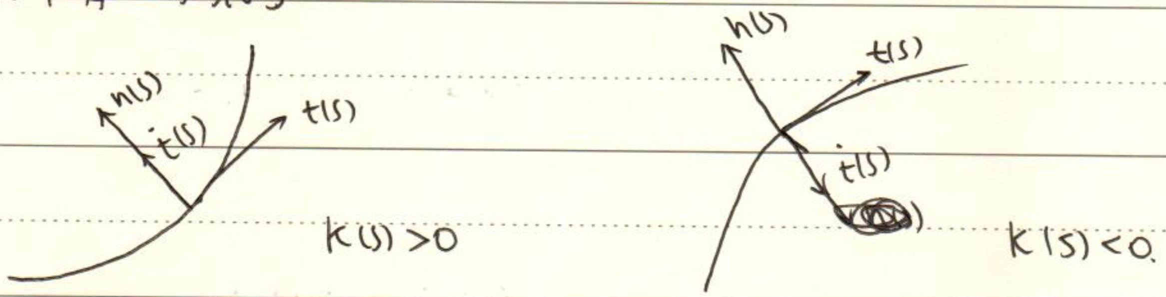
$= -k(s)$

从而 $\dot{n}(s) = -k(s)\,t(s)$.

所以我们有

$$\begin{cases} \dot{t}(s) = k(s)\,n(s) \\ \dot{n}(s) = -k(s)\,t(s) \end{cases} \quad \text{or} \quad \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k(s) \\ -k(s) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \end{pmatrix}.$$

再来看 $k(s)$ 符号



注记：反射不保 $k(s)$ 的符号

例子：圆 $r(s) = (\cos s, \sin s)$ 参数 s 逆时针

$t(s) = (-\sin s, \cos s) \Rightarrow n(s) = (-\cos s, -\sin s)$

$\dot{t}(s) = (-\cos s, -\sin s) = n(s) \Rightarrow k(s) = 1$

圆 $r(s) = (\cos(-s), \sin(-s))$ 参数 s 顺时针

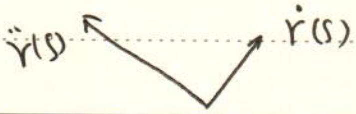
$t(s) = (\sin s, -\cos s) \Rightarrow n(s) = (\cos s, \sin s)$

$\dot{t}(s) = (\cos s, \sin s) = -n(s) \Rightarrow k(s) = -1$

k(s) 的显式表达式:

给定 $r(s) = (r_1(s), r_2(s))$, $|k(s)| = |\ddot{r}(s)| = \sqrt{\ddot{r}_1(s)^2 + \ddot{r}_2(s)^2}$

注意 $\dot{r}(s)$ 是单位向量



故 $|k(s)|$ 是 $\dot{r}(s)$ 和 $\ddot{r}(s)$

张成平行四边形之面积.

$k(s)$ 实际上是其有向面积 (即 $\{\dot{r}(s), \ddot{r}(s)\}$ 与 $\{i, j\}$ 定向相同时, 面积为正, 否则, 面积为负). 故有

$$k(s) = \det\begin{pmatrix} \dot{r}_1(s) & \ddot{r}_1(s) \\ \dot{r}_2(s) & \ddot{r}_2(s) \end{pmatrix} = (\dot{r}_1 \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 \dot{r}_2)(s).$$

作业: 设曲线 $r(t) = (x(t), y(t))$. (一般参数!)

证明其曲率为

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2017. 09. 12

曲率 k(s) 的合理性检测

前面已经看到, 我们引入的曲率 $k(s)$ 对直线处处取值为 0, 对圆为处处半径之倒数。那么, 直线、圆是不是唯一满足这种弯曲性质的全曲线呢? (弧长参数)

答案是是的. 给定曲线 $r(s)$, 如果 $\ddot{r}(s) = 0$, $\forall s$ 我们有 $\dot{r}(s)$ 是常向量. 积分知 $r(s)$ 必为直线.

如果 $\ddot{r}(s) = \dot{t}(s) = a n(s)$ 则考虑向量

$$\dot{n}(s) = -a t(s).$$

$$r(s) + \frac{1}{a} n(s)$$

求导知 $\frac{d}{ds}\left(r(s) + \frac{1}{a} n(s)\right) = \dot{r}(s) + \frac{1}{a}\dot{n}(s) = \dot{r}(s) - t(s) = 0.$