

§7 局部 Gauss - Bonnet 公式.

上节讨论看似十分依赖于 n 边形的边边为测地线。这其实并不那么麻烦，上节证明中关键一步是证明 (**)

$$\left[\frac{d\varphi}{ds} = - (NG)_p \frac{d\theta}{ds} \right] \quad (**)$$

实际上，我们在哪里并没有把这个事情弄得很清楚：先来再看 φ 这个量。

在测地极坐标中，坐标曲线为 p -线，和 θ -线， φ 不过是一条曲线 α 与 p -线的夹角。回忆这个量出现在测地曲线中的 Liouville 公式中。

(检查测地极坐标下 p -线和 θ -线正交，故 Liouville 公式可用)
Liouville 公式告诉我的曲线 α 在测地曲率

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds} + (k_g)_p \cos \varphi + (k_g)_\theta \sin \varphi.$$

但是 p -线是测地线说明 $(k_g)_p = 0$ 。因此有

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds} + (k_g)_\theta \sin \varphi = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{2E} \frac{\partial \ln G}{\partial \theta} \sin \varphi$$

此时有 $E=1$.

$$= \frac{d\varphi}{ds} + \frac{G_\theta}{2G} \sin \varphi$$

上节已说明 $\sin \varphi = \sqrt{G} \frac{d\theta}{ds}$ (along the curve α)

(实际上，在证 Liouville 公式时，我们有另一种计算 $\sin \varphi$ 的办法：考虑

$$\alpha(s) \text{ 在 } L \text{ 上} \quad \alpha'(s) = r_p \frac{dp}{ds} + r_\theta \frac{d\theta}{ds} = r_p \cos \varphi + \frac{r_\theta}{\sqrt{G}} \sin \varphi$$

$r(p(u), \theta(u))$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{G} \frac{d\theta}{ds}.$$

($r_p, \frac{r_\theta}{\sqrt{G}}$) 正交基。

$\hat{e}_1, \hat{e}_2$

故有

$$\left[k_g = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{G_\theta}{2\sqrt{G}} \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} + (\sqrt{G})_\theta \frac{d\theta}{ds} \right] \quad (**)$$

只不过，上节我们取了 α 为测地线，所以有 $k_g = 0$ ，而得 (**)。

有了上面的理解，我们就可以处理一般分段光滑(简单)曲线围成区域上的 Gauss 定理了。这步推广归功于法国数学家 Pierre Ossian

Bonnet (1819-1892). 实际上 Bonnet 引入了测地曲率概念, 并说明在一般情况下高斯的公式需要修正, 只需要加上一项沿边界的关于测地曲率的积分。现在把这种公式称为 Gauss-Bonnet formula。
(Bonnet 在 1844-1867 发表了一系列曲面微分几何的文章。Bonnet 1848 年引入了测地曲率的概念。实际上 Ernst Ferdinand Adolf Minding (1806-1885) 1830 年也引入了相同的概念, 但用了不同的名字。Bonnet 和 Minding 都证明了测地曲率是内蕴几何量。但实际上, Gauss 1825 年就证明了这些结果, 早于 Bonnet 和 Minding, 但是 Gauss 没有发表他的结果。)

定理 7.1 (Gauss-Bonnet I) 假设设三角形 $\triangle ABC$

包含在以 A 为原点的测地极坐标域内。

如右所示连接三点的曲线分别记为 α, β, γ 。

其中 β, γ 为测地线。记 $\angle A, \angle B, \angle C$ 分

别为曲线 β 和 γ , γ 和 α , α 和 β 在 A, B, C 点

所夹的角。~~即与线角~~ 假设 α 在以 A 为原点的测地极坐标下坐标可写成 $(f(\theta), \theta)$

$$\iint_{\triangle ABC} K dV + \int_{\alpha} k_g ds = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

其中 f 为 $\theta \in [0, \angle A]$ 的函数。
 $f: [0, \angle A] \rightarrow \mathbb{R}_0$

证明 = 只需注意到, 在定理 6.1 的证明中用到的等式: 当 α 为测地线时,

$$\frac{dp}{ds} = -(\sqrt{G})_{\theta} \frac{d\theta}{ds}$$

在 α 为一般曲线时变为 (由 (**))

$$\frac{dp}{ds} - k_g = -(\sqrt{G})_{\theta} \frac{d\theta}{ds} \quad (***)$$

则有计算
$$\iint_{\triangle ABC} K dA = \iint_D \left(\theta - \frac{(\sqrt{G})_{\theta}}{\sqrt{G}} \right) \sqrt{G} d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{\angle A} \int_0^{f(\theta)} -(\sqrt{G})_{\theta\theta} d\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\angle A} (1 - (\sqrt{G})_{\theta\theta}(f(\theta), 0)) d\theta$$

$$\stackrel{(***)}{=} \angle A + \int_0^{\angle A} d\varphi - \int_0^{\angle A} k_g ds(f(\theta), 0)$$

$$= \angle A + \angle B + \angle C - \pi - \int k_g ds \quad \square$$

$$\left(\int_0^{\angle A} (-\sqrt{G})_{\theta\theta}(f(\theta), 0) d\theta = \int_0^{\angle A} (-\sqrt{G})_{\theta\theta}(f(\theta(s)), 0(s)) \frac{d\theta}{ds} ds \right.$$

$$\left. = \int_0^{\angle A} \left(\frac{d\varphi}{ds} - k_g \right) ds = \int_0^{\angle A} \frac{d\varphi}{ds} ds - \int_0^{\angle A} k_g ds \right).$$

作为直接推论, 我们可以计算边界为分段光滑曲线在凸多边形内部角和:

推论 7.1 (Gauss-Bonnet II)

假设凸多边形 (即记所围区域为 $\square_{A_1 \dots A_n}$, 边界为 $\partial \square_{A_1 \dots A_n}$) 落在以某点其内部某点

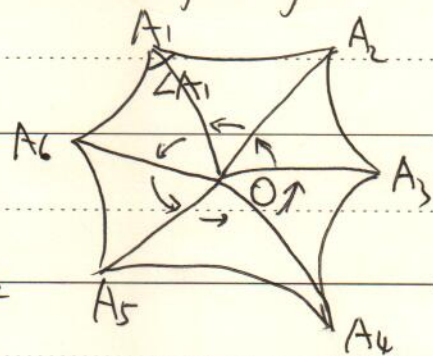
O 为原点的测地极坐标区域内, 且每边

$A_i A_{i+1}$ 可表示为 $(f_i(\theta), 0)$, f_i 是个函数.

记 $\angle A_i$ 为顶点 A_i 处两条边曲线夹角, 则有:

$$\begin{aligned} \iint_{\square_{A_1 \dots A_n}} k dA + \int_{\partial \square_{A_1 \dots A_n}} k_g ds &= \sum_{i=1}^n \angle A_i - (n-2)\pi. \\ &= 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \angle A_i) \end{aligned}$$

↗ 内角. ↘ 外角.

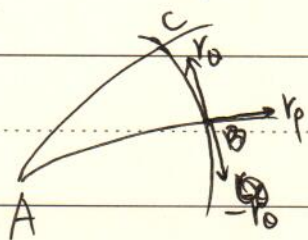


证明: 引从 O 出发经过 A_i 的测地线, 对每个 $\triangle O A_i A_{i+1}$ 应用定理 7.1, 即得. □

注意在推论 7.1的公式中, ~~这时~~ ~~在~~沿边界积分处, 边界 $\partial\Omega_{A_1, \dots, A_n}$ 有一个选定的定向, 这个定向由 dA 的定向继承而来.

回忆在定理 7.1的证明中, 我们有.

$$\iint_{\Delta ABC} k dV = \iint_0^1 \frac{(-\sqrt{G})_{pp}}{\sqrt{G}} p dp d\theta = \int_0^{\angle A} \int_0^{f(\theta)} (-\sqrt{G})_{pp} p dp d\theta$$



这里 $dA = \sqrt{G} dp d\theta = \sqrt{G} dp d\theta$ 实际上用了 $\{r_p, r_0\}$ 给定的定向.

最终所得 k_g 的积分 $\int_0^{\angle A} k_g ds$ 是在边界 α 上取了 r_0 给的定向.

如果我们在 dA 取 $\{r_p, -r_0\}$ 的定向, 则有.

$$\iint_{\Delta ABC} \frac{(-\sqrt{G})_{pp}}{\sqrt{G}} \sqrt{G} dp d\theta = \iint_{\Delta ABC} k dV = \int_0^0 \int_{\angle A}^{f(\theta)} (-\sqrt{G})_{pp} p dp d\theta$$

↑ 取了相反定向

$$= \dots = - \int_{\angle A}^0 (1 - \sqrt{G})_p d\theta$$

$$= -\angle A + \int_{\angle A}^0 dy - \int_{\angle A}^0 k_g ds$$

↑ 继承了相反定向

$$= -\angle A + (\pi - \angle B) - \angle C - \int_{\angle A}^0 k_g ds$$

$$= \pi - (\angle A + \angle B + \angle C) - \int_{\angle A}^0 k_g ds$$

因此实际上, 在推论 7.1中, 由于要计算 $\iint k dA$, 我们要对 dA 取一个统一的定向. 比如就取作 $\{r_p, r_0\}$. 然后, 边界的定向由其诱导而来, 就取作逆时针方向.

再来看我们关于边界的技术性条件: 假如好 $\partial\Omega$ 有表为 $(f(\theta), 0)$.

这个条件只是^{为了便于}把~~面积~~面积分化为线积分时, 也即用在等式:

$$\begin{aligned}\iint_D (-\sqrt{G})_{pp} dp d\theta &= \int_0^{2\pi} (1 - \sqrt{G})_p d\theta \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} (-\sqrt{G})_p d\theta.\end{aligned}$$

或是在命题 7.1 中, 记 $\tilde{D} = \{(p, \theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < p < f(\theta)\}$

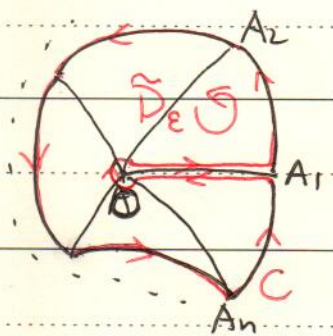
$$\iint_{\tilde{D}} (-\sqrt{G})_{pp} dp d\theta = 2\pi + \int_0^{2\pi} (-\sqrt{G})_p d\theta \quad (1)$$

这实际上是 Green 公式的一个特例. 所以我们的技术对定理的设置可以被放宽的. 回忆 Green 公式: 讲平面上一条定向的, 分段光滑的, 简单闭曲线 (即曲线除起点和终点重合外, 没有自交点) C , 设它在平面上围成区域为 D , 则对于定义在含 D 的一个开区域上的光滑函数 f, g , 有:

$$\oint_C (f dx + g dy) = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$

方程 (1) ^{通过}将 Green 公式应用到区域 (如右图红曲线 C 所围区域上)

$$\iint_{\tilde{D}_\varepsilon} (-\sqrt{G})_{pp} dp d\theta = \int_{\partial \tilde{D}_\varepsilon} (-\sqrt{G})_p d\theta.$$



当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\textcircled{1}$ 由于 $\lim_{p \rightarrow 0} (-\sqrt{G})_p = -1$. (绕 O 点的逆时针方向) (注意其定向为逆时针方向)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(\tilde{D}_\varepsilon)_1} (-\sqrt{G})_p d\theta = (-1) \cdot (-2\pi) = 2\pi.$$

~~靠近~~ OA_1 部分由边界正好消掉 (因定向相反) 故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\tilde{D}_\varepsilon} (-\sqrt{G})_{pp} dp d\theta = \iint_{\tilde{D}} (-\sqrt{G})_{pp} dp d\theta = 2\pi + \int_{\partial \tilde{D}} (-\sqrt{G})_p d\theta$$

下面的计算就和原来的相同了,

$$\int_{\partial D} (\sqrt{G})_p d\theta = \int_{\partial D} (d\varphi - k_g ds)$$

$$= \left(\sum_i \angle A_i - n\pi \right) - \int_{\partial D} k_g ds$$

从而在此种情形下, 也有

$$\iint_{\square A_1 \dots A_n} K dA + \int_{\partial \square A_1 \dots A_n} k_g ds + \sum_i (\pi - \angle A_i) = 2\pi.$$

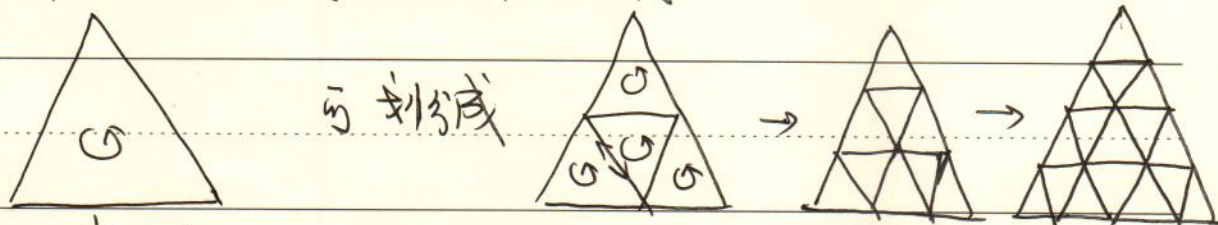
这时, 只要求 $\square A_1 \dots A_n$ 落入一个测地极坐标邻域内, 且其也为分段光滑、简单闭曲线. 因此有:

定理 7.2 (Gauss-Bonnet II) 设 C 是曲面 M 上一条分段光滑、简单闭曲线, 其所围区域 $\square$ 落入一个测地极坐标邻域中, 则有:

$$\iint_{\square} K dA + \oint_C k_g ds + \sum_i (\pi - \angle A_i) = 2\pi.$$

其中 $\angle A_i$ 为 C 的分段处的内角 (换言之, $\pi - \angle A_i$ 为该处外角) $\square$ (角点处)

这个形式的定理还有一个看起来不太自然的技术性条件: 即这个区域 $\square$ 要落入一个测地极坐标邻域中. 实际上这个限制也不太要紧. 因为如果它不能落入一个测地极坐标邻域中, 我们可以用能落入一个坐标邻域的小区域来拼成大区域. 比如,



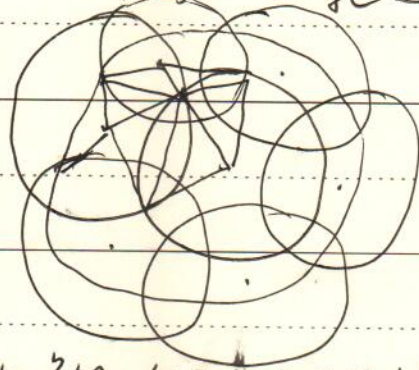
然后在每个小区域上应用 定理 7.2, 再把它们加起来即可. 注意每两个小区域共有边上由诱导之方向正好相反, 这上面的测地曲率积分就正好消掉.

定理 7.3 (Gauss-Bonnet IV) 设 C 是曲面 M 上一条分段光滑简单闭曲线, 其围成区域 Ω 与 $\mathbb{R}^2$ 上一个单连通的开区域微分同胚, 则有:

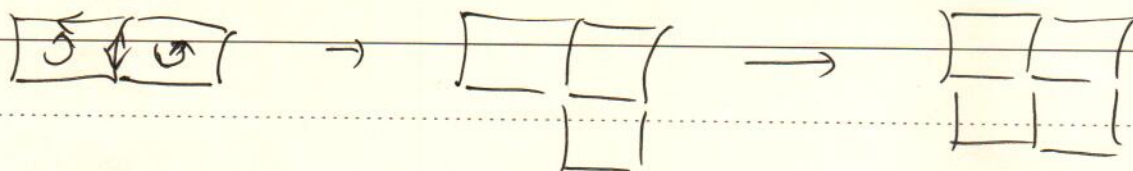
$$\iint_{\Omega} K dA + \oint_C k_g ds + \sum_i (\pi - \angle A_i) = 2\pi$$

其中 $\angle A_i$ 为 C 在角点处的内角.

证明: 如果曲线 C 所围区域 Ω 不能包含在一个测地极坐标区域内, 则总可以用分段光滑曲线将区域 Ω 分割成一些同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中开集的小区域. (即任一紧子集都有 Ω 的某一邻域都有一个测地坐标邻域, 它们能构成 Ω 的一个开覆盖. 则 Ω 的任一紧子集都有一个有限子覆盖, 根据这个覆盖, 就总可构造上述要求的分割)



那现在我们就从一个小区域开始, 每次加一个和它有公共边界的区域, 这样逐次加下去.



可以用归纳法. 对第一个取定的小区域 Ω_0 , 我们有

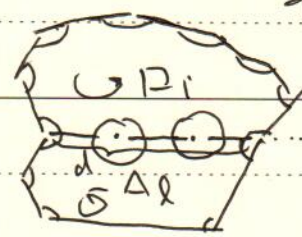
$$\iint_{\Omega_0} K dA + \oint_{\partial\Omega_0} k_g ds = \text{内角和}_{\Omega_0} - (n-2)\pi.$$

假定 Ω_0 与 Ω_1 有公共边界的区域第 i 个后, 得到一个 m 边形, 或记

$$\iint_{\Omega_i} K dA + \oint_{\partial\Omega_i} k_g ds = \text{内角和}_{\Omega_i} - (m-2)\pi$$

现在把 Ω_i 和一个与之共有 d 条边的 d 边形 Δ 合并

注意由于整个区域单连通, 我们总可以做到再找一个小区域 Δ_l 与 $\square_i$ 共有 d 条边是相接的 d 条边. (如图) 如果 $\square_i$ 的边界曲线可连续收缩到一点, 则我们取上端点为 Δ_l 形为 Δ_l .)



$$\iint_{\square_i} k d\mathbf{w} + \oint_{\partial \square_i} k_g ds = \text{内角和 } \square_i - (m-2)\pi$$

$$\iint_{\Delta_l} k d\mathbf{w} + \oint_{\partial \Delta_l} k_g ds = \text{内角和 } \square_l - (l-2)\pi$$

新形成的 $(m-d+l-d) = (m+l-2d)$ 边形, 记为 $\square_{i+1}$, 则有:

$$\iint_{\square_{i+1}} k d\mathbf{w} + \oint_{\partial \square_{i+1}} k_g ds = \iint_{\square_i} k d\mathbf{w} + \iint_{\Delta_l} k d\mathbf{w} + \oint_{\partial \square_i} k_g ds + \oint_{\partial \Delta_l} k_g ds$$

因为公共边在 $\partial \square_i$ 和 $\partial \Delta_l$ 中的方向相反, 故消掉了.

$$= \text{内角和 } \square_i + \text{内角和 } \Delta_l - (m+l-4)\pi$$

$$= \text{内角和 } \square_{i+1} + (d-1) \cdot 2\pi - (m+l-4)\pi = \text{内角和 } \square_{i+1} + (m+l-2d-2)\pi$$

将公共边上产生 $d-1$ 个 2π 角

因此, 归纳法可继续. 得证. $\square$

这样形式的 Gauss-Bonnet 定理 (定理 7.3) 就是非常“干净”的一个局部定理了.

前面提到的 Green 公式 $\oint_C (f dx + g dy) = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$

实际上可用外微分形式的积分表示. $\omega = f dx + g dy$ 为 1-形式外微分形式, 则 $d\omega = \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

这种意义的 Green 公式可写作: $\oint_C \omega = \iint_D d\omega$

其中 C 为 D 的边界且定向由 D 的定向诱导而来. 这实际上是 Stokes 公式的一个特殊情况.

从这个角度讲，正交活动标架是研究 Gauss-Bonnet 公式的语言。下面我们就从这个角度来讨论一下 Gauss-Bonnet 公式。

设 $\square$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中单连通开集的区域，其边界 $\partial\square := C$ 为分段光滑简单闭曲线。则 $\square$ 上存在如下选取的正交活动标架：取 $e_1 = \frac{r_{x_1}}{|r_{x_1}|}$

e_3 为曲面的法向。

$$e_2 = e_3 \wedge e_1$$

回到正交标架下高斯方程告诉我们

告诉我们

$$d\omega_1^2 = -k \underbrace{\omega_1' \wedge \omega_1^2}_{\text{有向面积元}} = -k dV$$

故而
$$\iint_{\square} k dV = - \iint_{\square} d\omega_1^2 = - \oint_C \omega_1^2$$

如果我们取 $\bar{e}_1$ 为 C 的单位切向量，设 s 为 C 的弧长参数， $t(s)$ 为其单位切向量，设 $t(s)$ 与 $e_1(s)$ 的夹角为 $\alpha(s)$ ，则

$$t(s) = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2$$

故有 C 的测地曲率 $k_g = \left\langle \frac{dt(s)}{ds}, e_3 \wedge t(s) \right\rangle$

$$= \left\langle (-\sin\alpha e_1 + \cos\alpha e_2) \frac{d\alpha}{ds} + \cos\alpha \frac{de_1}{ds} + \sin\alpha \frac{de_2}{ds}, e_3 \wedge (\cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{d\alpha}{ds} (-\sin\alpha e_1 + \cos\alpha e_2) + \cos\alpha \frac{\omega_1^2}{ds} e_2 + \sin\alpha \frac{\omega_1^1}{ds} e_1, \cos\alpha e_2 - \sin\alpha e_1 \right\rangle$$

$$= \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\omega_1^2}{ds}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_g ds = \omega_1^2 + d\alpha}$$

事先假定: C 光滑.

(247)

为了使测地曲率在曲线 C 上有整体定义, 我们需要映射 $t(s)$ 光滑:

$$t: [0, L(C)) \rightarrow S^1$$

(若曲线 C 闭, 就取 $[0, L(C))$)

可定义 t 如下: ~~$t: [0, L(C)) \rightarrow S^1$~~
 $t(s) \in T_{C(s)} M$

在 $T_{C(s)} M$ 和 $\mathbb{R}^2$ 之间有唯一的线性映射把 $e_1(s)$ 映到 $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

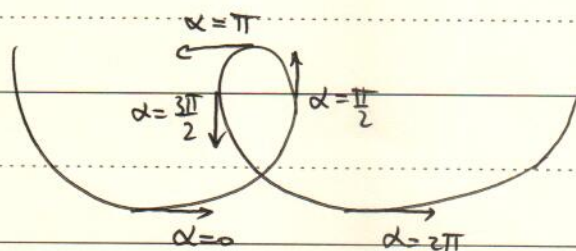
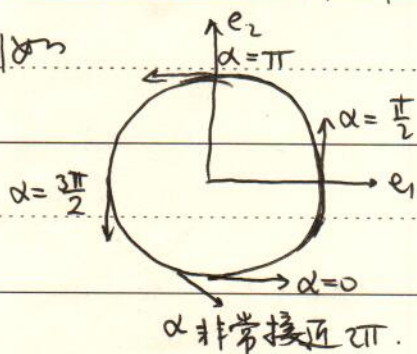
这样 $t(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)) \in S^1$.

$$[0, L(C)) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R} \xrightarrow{\mu} S^1$$

$\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ μ 是光滑的

我们要适当地选取角度 $\alpha(s)$ 使 $\alpha: [0, L(C)) \rightarrow \mathbb{R}$ 光滑且 $\mu \circ \alpha = t$.

例如



我们称 $\alpha(s)$ 为 $t(s)$ 和 $e_1(s)$ 所夹角度的一个“连续性选取” (a continuous choice of the angle between $t(s)$ and $e_1(s)$). 可以证明这样的选取存在, 且如 α_1, α_2 是两个这样的选取, 必有 $\alpha_1 - \alpha_2$ 为 2π 的整数倍. (可参见 Spivak II, 17页 Proposition 5).

如此, 当 C 为光滑简单闭曲线, 所围区域微分同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中单连通区域时, 有:

$$\iint_D K dV = - \int_C \omega_1^2 = - \int_C k_g ds + \int_C d\alpha. \quad (1)$$

由 Gauss-Bonnet 定理 7.3 $\iint_D K dV + \int_C k_g ds = 2\pi. \quad (2)$

由 (1), (2) 知 $\int_C d\alpha = 2\pi$. (注意 C 具有 α 诱导的定向).

这样, 我从特别从 Gauss-Bonnet 定理推得了关于曲线的一些整体性质:

定理 7.4 (Hopf Umlaufsatz) 设 C 为一条光滑简单闭曲线^{平面}.

$$\text{则} \quad \frac{1}{2\pi} \oint_C K(s) ds = \pm 1 = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\alpha \quad \text{平面曲线总转角}$$

证明: 当 C 为平面曲线时, 由 Gauss-Bonnet 定理 7.3 告诉我们

$$\oint_C K(s) ds = 2\pi.$$

(此时 $K=0$, $k_g=K(s)$), 此处 C 定向由其所围区域^{平面}的定向诱导. 如果 C 具有相反的定向, 则有 $\oint_C K(s) ds = -2\pi$.

由①式, $\frac{1}{2\pi} \oint_C K(s) ds = \frac{1}{2\pi} \oint_C d\alpha$ 为闭曲线 C 的切向量的旋转指数. $\square$

$\frac{1}{2\pi} \oint_C K(s) ds$ 也称曲线 C 的旋转指数 (rotation index).

在结束本节讨论之前, 我们再来讨论 Gauss-Bonnet 公式的一个应用:

曲面上向量沿闭曲线平移所产生的角差计算

在球面上沿纬线圆平行移动的向量的角差我们前面计算过为 $2\pi \sin \varphi$, φ 为纬度. 下面我们给出一般公式.

命题 7.1 设 C 为曲面 M 上光滑的简单闭曲线, 所围区域^{平面}微分同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中单连通的开集. 设 C 参数化为 $r=r(s)$, s 弧长参数.

设 $V: [0, L(C))$ 为沿 C 平行的切向量场, 且

$$V(s) = \cos \beta(s) e_1(s) + \sin \beta(s) e_2(s)$$

其中 $\{e_1, e_2\}$ 为 M 上正交标架, $\beta(s)$ 为 $V(s)$ 和 $e_1(s)$ 夹角的一个“连续性选择”.

$$\text{则有} \quad \beta(L(C)) - \beta(0) = \iint_C K dV.$$

证明: $V(s)$ 平行 $\Rightarrow 0 = \frac{DV}{ds} = \frac{d\beta}{ds} (-\sin \beta e_1 + \cos \beta e_2) + \frac{\omega_1^2}{ds} (\cos \beta e_2 - \sin \beta e_1)$

与向量 $(-\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2)$ 做内积, 得

$$0 = \frac{dp}{ds} + \frac{\omega_1^2}{ds}$$

也即 $dp = -\omega_1^2$.

因此 $d\alpha + \omega_1^2 = k_g ds$. 其 α 为 $C(s)$ 的单位切向量和 e_1 夹角的连续选取. 故有:

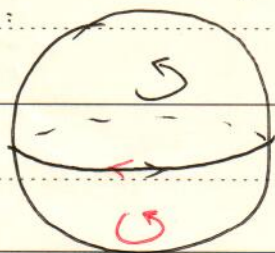
$$\beta(L(C)) - p_0 = \oint_C dp = - \oint_C \omega_1^2 = \oint_C (d\alpha - k_g ds) = 2\pi - \oint_C k_g ds$$

$$\stackrel{\text{Gauss-Bonnet}}{=} \iint_{\square} K dV.$$

□

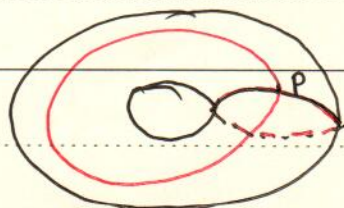
§8. 整体 Gauss-Bonnet 公式.

注意到有些曲面, 如球面、环面是没有边界的. 自然地要问在它们上高斯曲率的积分是多少? 我们当然还可以用“积小成大”的办法:

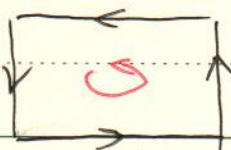


球面可用赤道分成两个半球面, 每一个都微分同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中的单连通开区域, 故可分别应用定理 7.3. 但由于它们一共有边界(赤道)光滑(没有角点), 且分别由两个半球面上定向诱导的定向相反, 故沿边界的积分抵消(实际上赤道是测地线, $k_g = 0$, 但我们也可选其它纬线圈划分球面). 因此我们有:

$$\iint_{S^2} K dV = 2\pi \times 2 = 4\pi.$$



环面沿左图红线裁开, 所得区域微分同胚于 $\mathbb{R}^2$ 中



因此在这个区域上应用定理 4.3 得 $\iint K dV + 2\pi = 2\pi$
(~~由于~~ 对边诱导定向正好相反, (角点角和))