与向量$(-\sin\beta e_1+\cos\beta e_2)$做内积，得

$$0=\frac{d\beta}{ds}+\frac{\omega_1^2}{ds}$$

也即 $d\beta=-\omega_1^2$.

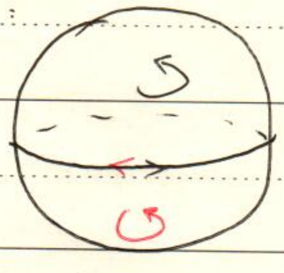
回忆 $d\alpha+\omega_1^2=k_g ds$. 其$\alpha$为 $C(s)$的单位切向量和e_1夹角的连续性选取. 故有:

$$\beta(L(c))-\beta(0)=\oint_C d\beta=-\oint_C\omega_1^2=\oint_C(d\alpha-k_g ds)=2\pi-\oint_C k_g ds$$

$$\overset{\text{Gauss-Bonnet}}{=}\iint_\square K\,dV. \qquad \square$$

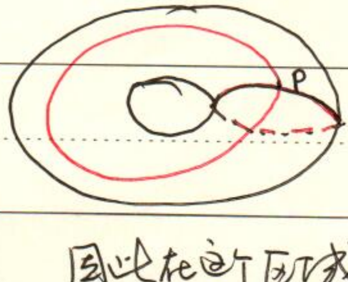
§8 整体 Gauss-Bonnet 公式

注意到有些曲面，如球面、环面是没有边界的。自然地要问在它们上高斯曲率的积分是多少？我们当然还可以用"积小成大"的方法:

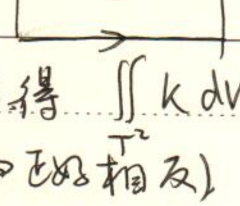


球面可用赤道分成两个半球面，每一个都微分同胚于$\mathbb{R}^2$中的单连通开区域，故可分别应用定理7.3. 但由于它们的共有边界(赤道)光滑(没有角点)，且分别由两个半球面上定向诱导的定向相反，故沿边界的积分消掉(实际上赤道是测地线，$k_g=0$. 但我们也可选其它纬线圈判分球面)。因此我们有:

$$\iint_{S^2} K\,dV=2\pi\times2=4\pi.$$



环面沿左图红线裁开，所得区域微分同胚于$\mathbb{R}^2$中



因此在这个区域上可应用定理得得 $\iint_{T^2} K\,dV+2\pi=2\pi$

(指向的对边诱导定向正好相反) (角点的角和)

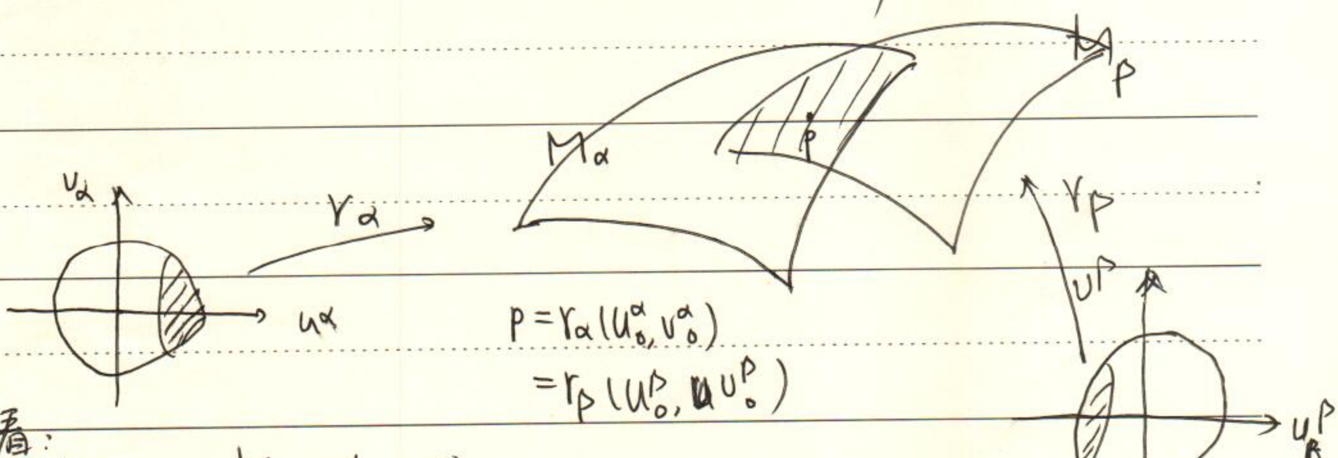
故 $\iint_{T^2} K\,dV = 0$.

我们看到球面和环面有完全不同的结果。

为了进一步研究上述现象，~~也为了把上述~~我们需要先引入整体曲面的概念。实际上我们面临着研究一整体闭曲线也时类似的问题：高斯曲率如何成为在曲面（如：球面、环面）上整体定义的量？

§8.1 整体曲面的定义

我们一直在讨论（正则）曲面片的几何。但是一个曲面片不能描述像球面、环面这一类的曲面。自然地，一个曲面片不够用，我们可以用多个曲面片把整张曲面覆盖。但这时就产生了问题：若有的点 $p\in M$ 属于多于一个曲面片，那么在这点的高斯曲率等量还是不是良定的？换言之，在不同曲面片上定义的高斯曲率等量是否"相容"？



从 M_α 看：$K(p) = K(u_0^\alpha, v_0^\alpha)$

从 M_β 看：$K(p) = K(u_0^\beta, v_0^\beta)$

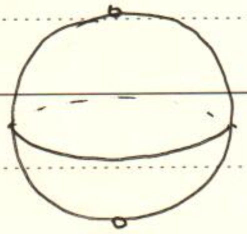
这两个要相容。

从前面的讨论我们知道，$K(p)$ 在光滑的参数变换下是不变的。所以，只要保证参数变换 $(u^\alpha, v^\alpha) \to (u^\beta, v^\beta)$ 是光滑的即可，也即映射 $r_\beta^{-1}\circ r_\alpha$ 要是光滑的。

定义8.1 (整体曲面) M 称为 E^3 中的光滑曲面，如果
$$M=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$$
满足 (1) 每个 M_α 是一个正则曲面片：即存在参数区域
$$D_\alpha=\{(u^\alpha,v^\alpha)\}$$
和光滑映射 $r_\alpha: D_\alpha\longrightarrow E^3$ 使得
$$r_\alpha(D_\alpha)=M_\alpha \quad 且 \quad \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\alpha}\wedge\frac{\partial r_\alpha}{\partial v^\alpha}\neq 0.$$

(2) 如果 $M_\alpha\cap M_\beta\neq\emptyset$，则对于 $M_\alpha\cap M_\beta$ 上的两种参数表示 (u^α,v^α) 和 (u^β,v^β) 之间存在光滑映射
$$r_\beta^{-1}\circ r_\alpha: r_\alpha^{-1}(M_\alpha\cap M_\beta)\longrightarrow r_\beta^{-1}(M_\alpha\cap M_\beta)$$

例子.



单位球面可由两个正则曲面片覆盖：
$$S^2_+ := \{(x,y,z)\in S^2 : z>-1\}$$
$$S^2_- := \{(x,y,z)\in S^2 : z<1\}$$
每一片上均可取球极投影坐标，可以验证在
$$S^2_+\cap S^2_- = \{(x,y,z)\in S^2 : -1<z<1\}$$
上相应映射光滑（练习）. □

我们始终假定曲面是连通的。则每一片上定义好的第一基本形式、高斯曲率、测地曲率等内蕴几何量均可以定义在整个曲面 M 上.

因为第二基本形式在保定向的参数变换下不变，因此只有在曲面 M 上存在 $M=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$ 满足 $M_\alpha\cap M_\beta\neq\emptyset$ 时相应映射保持定向时，第二基本形式才可以在整个曲面 M 上定义. 但并不是每个曲面上这一点都可做到的!!

定义8.2 (可定向曲面) 如果曲面 M 有 $M_\alpha=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$，使每个

正则曲面片上 M_α 上可选一个单位法向量 n_α 满足

当 $M_\alpha \cap M_\beta \neq \emptyset$ 时，在 $M_\alpha \cap M_\beta$ 上 $n_\alpha = n_\beta$.

则称 M 是可定向的 (orientable)

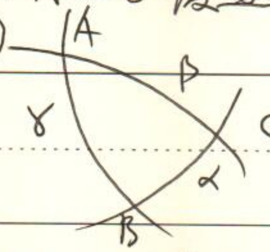
例子：球面、柱面、环面均可定向，Möbius 带不可定向.

定义8.3 (紧致无边曲面, closed surfaces) 曲面 M 称为紧致无边的，如果 M 是 E^3 中无边的有界闭集.

注意 E^3 中紧致性 $\Leftrightarrow$ 有界闭 $\Leftrightarrow$ 任一无限点列有极限点 $\Leftrightarrow$ 任一开覆盖必有有限子覆盖

曲面的三角剖分

与 R^2 中单连通开区域微分同胚的

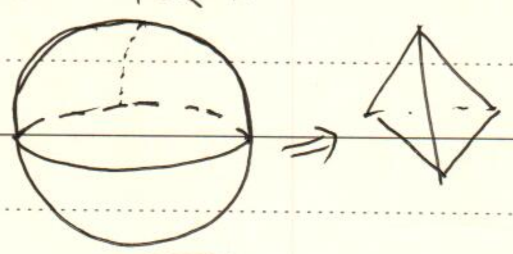


曲面上一个三边形所围区域，我们称为一个2维的面. 它的边 (α, β, γ) 我们称为它的一维的面. 它的角点 (A, B, C) 我们称为它的零维的面.

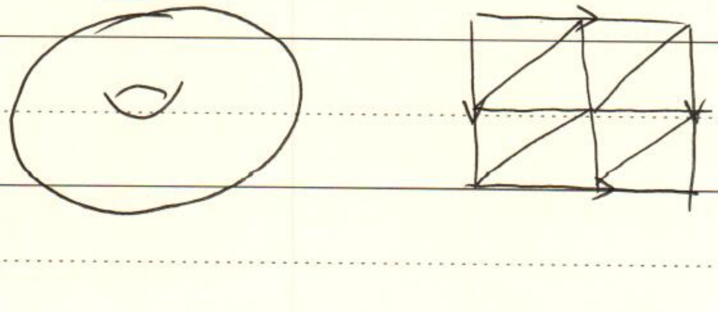
我们把曲面 M 划分成这样的三边形区域 $\{T_\lambda\}$，如果 $T_{\lambda_1} \cap T_{\lambda_2} \neq \emptyset$，则 $T_{\lambda_1} \cap T_{\lambda_2}$ 是 T_{λ_1} 的和 T_{λ_2} 共有的一个 k-维的面，且 $k=1$ 或者 0，则称这个划分为 M 的一个三角剖分.

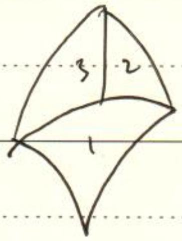
进一步，我们假定三角剖分的局部有限性：对一角点 A，包含它的三边形区域 T_λ 的个数有限.

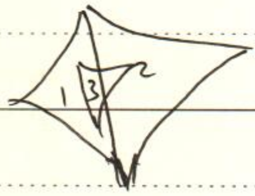
例子：



是三角剖分







在紧致曲面上，可以证明总存在一个有限的三角剖分（即二维面的个数有限），（紧性意味着任一开覆盖有有限子覆盖）

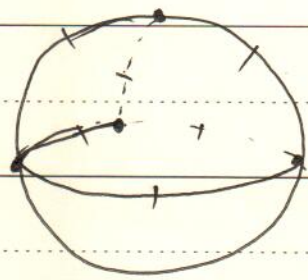
§8.2 Gauss-Bonnet 定理

给定一个紧致无边的曲面 M，和其上的一个三角剖分，我们记

V := 角点的个数

E := 边的个数

F := 2维面的个数

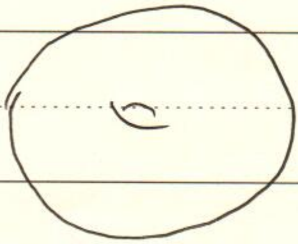


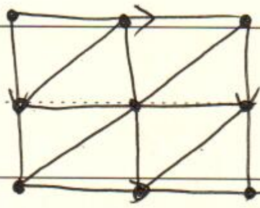
~~则 $V-E+F$ 为 M 的 欧拉示性数~~

如右所示球面的三角剖分有 $V=4$，$E=6$，$F=4$.

$$V-E+F = 4-6+4=2$$

大家可以尝试，无论你取 S^2 怎样的三角剖分，所得的 V, E, F 可能不同，但是 $V-E+F$ 这个数不会变！这个数称为曲面的 Euler 示性数





$V=1+2+1=4$

$E=8+4=12$

$F=8$

则有 $V-E+F=0$.

同样也尝试，无论取环面怎样的三角剖分 $V-E+F=0$ 总不变.

定理 8.1（Gauss-Bonnet 定理）设 M 为一个紧致无边 可定向的光滑曲面，M 高斯曲率函数记为 K，则有：

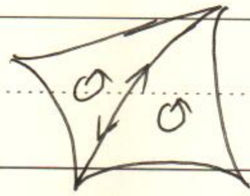
$$\iint_M K\, dV = 2\pi(V-E+F) =: 2\pi\chi(M).$$

证明：在 M 上取一三角剖分 $\{T_i\}$，记 T_i 的三个内角为 $\angle A_i, \angle B_i, \angle C_i$，对每一个 T_i 应用定理7.3，则有：

$$\iint_M k\,dV = \sum_{j=1}^{F}\int_{T_j} k\,dV = \sum_{j=1}^{F}\left(-\int_{\partial T_j} k_g\,ds + \angle A_i + \angle B_i + \angle C_i - 3\pi + 2\pi\right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{F}\int_{\partial T_j} k_g\,ds + \sum_{j=1}^{F}(\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i) - 3\pi F + 2\pi F.$$

其中因为由曲面定向诱导的 ∂T_j 上的定向有性质：两个共一条边三角形在公共边上诱导的定向相反。又注意到紧致无边曲面的三角剖分中每条边都唯一地属于两个三角形，故第一项



$$-\sum_{j=1}^{F}\int_{\partial T_j} k_g\,ds = 0.$$

对第二项 $\sum_{j=1}^{F}(\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i)$ 我们只要把"逐面"的数角变为"逐点"的数角，就看到

$$\sum_{j=1}^{F}(\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i) = 2\pi V.$$

又注意到 $3F$ 等于把数三角剖分中的边数，且每条边数两遍，即

$$3F = 2E.$$

因此，我们有：

$$\iint_M k\,dV = 0 + 2\pi V - 2\pi E + 2\pi F$$
$$= 2\pi(V - E + F).$$

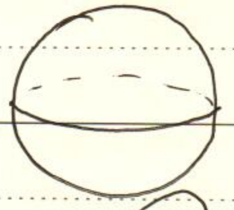
□

下面我们来欣赏一下这个定理：这个定理是说一个微分几何量（$\iint_M k\,dV$）等于一个和曲率无关的量（实际上和曲面的第一基本形式也无关，即与曲面的"度量"无关）。如果我们给定 M 的一个三角剖分，

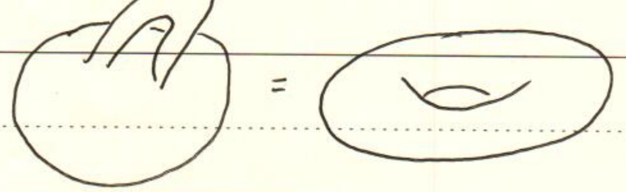
这个定理告诉我们 $\iint_M K\,dV$ 其实是一个不依赖于曲面上第一基本形式(也即度量)选取的一个量。也就是说，同一个曲面上，选不同的第一基本形式，所得的全曲率 $\iint_M K\,dV$ 始终相同.

另一方面，给定曲面的一个第一基本形式，这个定理告诉我们，给定曲面M的两个三角剖分，量 $V-E+F$ 始终不变，即 $V-E+F$ 不依赖于曲面三角剖分的选取.(这给出了紧致无边可定向曲面上 $V-E+F$ 不依赖于三角剖分选取的一个证明)。实际上 $\chi(M)=V-E+F$ 是一个拓扑不变量.

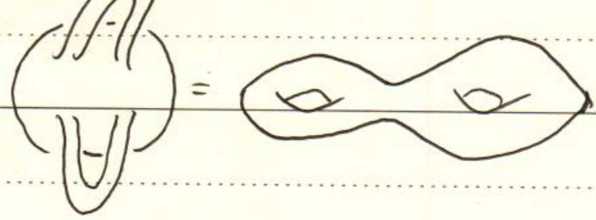
实际上，所有紧致无边可定向曲面都同胚于球面 S^2 上加 g 个"柄"



S^2 $g=0$, $\chi=2-2g=2$. $\iint K\,dV=4\pi$.



$g=1$, $\chi=2-2g=0$, $\iint K\,dV=0$.



$g=2$, $\chi=2-2g=-2$, $\iint K\,dV=-4\pi$.

换一个角度来看这个问题：如果一个紧致无边可定向曲面上，存在一个第一基本形式(度量)使得，

(i) $\iint K\,dV>0$ (或更强一些 $K>0$ 处处成立)，则曲面必同胚于球面.

(ii) $\iint K\,dV=0$ (或更强一些 $K=0$ 处处成立)，则曲面必同胚于环面

(iii) $\iint K\,dV<0$ (或更强一些 $K<0$ 处处成立) 则曲面必同胚于一个球面加 $g\geq 2$ 个"柄".

换言之，一个曲面上某些特殊度量的存在性可以反映它的拓扑.

Gauss-Bonnet 定理是一个极深刻的定理。它也有许多深刻地应用.

我们只举一例：一个紧致无边可定向曲面M上有没有处处非零的光滑切向量场？

如果M上有这样一个切向量场，我们可以逐点将它归一化得一光滑的单位切向量场e_1，又由M可定向，我们有一光滑的法向量场$e_3=n$。从而可取$e_2=e_3\wedge e_1$，这样整个曲面上就有一个活动正交标架$\{e_1,e_2\}$。

回忆高斯方程讲　$KdV=K\omega^1\wedge\omega^2=-d\omega_1^2$

故　$\iint_M KdV=-\iint d\omega_1^2 \overset{\text{Stokes公式，因为M无边}}{=} 0$

Gauss-Bonnet定理告诉我们　$\iint_M KdV=2\pi\chi(M)$

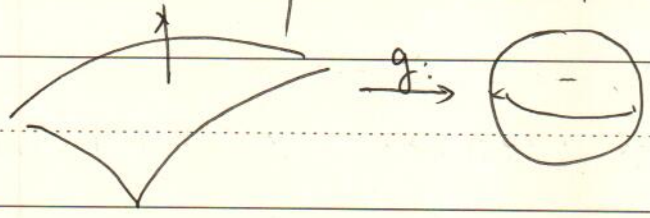
因此$\chi(M)=0 \Rightarrow M$同胚于环面。

结论：在紧致无边可定向曲面中，只有环面上存在处处非零光滑切向量场。

特别地，球面上不存在处处非零的光滑切向量场："地球上至少一处不刮风"

$\boxed{\text{Gauss-Bonnet定理的高维推广}}$

虽然Gauss曲率由曲面第一基本形式内蕴的定义，但它也可以外蕴的通过高斯映射来定义：回忆Gauss曲率实际上是高斯映射下相应有向面积元的比



从这个角度来看量

$$\iint_M kdv$$

其实就相当于在高斯映射的像球面S^2上作其面积元积分。（这里可以直接看出为什么球面上有$\iint_{S^2}kdv=\iint_{S^2}dv=4\pi$）实际上

$$\iint_M kdv=\underbrace{\deg(g)}_{\text{映射}g\text{的度}}\cdot\iint_{S^2}\underbrace{d\sigma}_{\text{球面上有向面积元}}=\deg(g)\cdot 4\pi.$$

当然这样的证明只适用于当M上的第一基本形式是由把M嵌入E^3中时，从E^3上诱导而来的情形。

Heinz Hopf (1925) (Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen, Math. Ann. 95 (1925) 340–367) 就是沿用这种方法证明了 n维超曲面 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$，n为偶数，上

$$\int_{M^n} K_n dV = \deg(g) \cdot \mathrm{vol}(S^n) = \frac{\mathrm{vol}(S^n)}{2} \cdot \chi(M_n).$$

Allendoerfer (1940) (The Euler number of a Riemannian manifold, Amer. J. Math. 62 (1940), 243–248) 和 Fenchel (1940) (On the total curvatures of Riemannian manifolds: I., J. London. Math. Soc. 15 (1940), 15–22) 独立证明了当 M^n上的度量由嵌入 $M^n \subset \mathbb{R}^{n+N}$ 诱导时的 Gauss-Bonnet 定理。(注意：Nash 的嵌入定理直到 1950s 才出现)

Allendoerfer 和 Weil (1943) (The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943), 101–129) 证明了所有解析 (C^ω) Riemann 流形上 Gauss-Bonnet 定理。

如果结合 Nash 的嵌入定理，Allendoerfer (1940) 和 Fenchel (1940) 的结果意味着 Gauss-Bonnet 定理对 C^∞ Rie. 流形都对。

抛开 Nash 定理的复杂性不谈，上述证明方法有其根本上不令人满意的地方：用外蕴的方法证明一个内蕴的定理。

1944年 陈省身发表了他的结果 (A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, Ann. of Math. 45 (1944), 747–752)：用内蕴的办法证明了这个内蕴的定理。这是内蕴几何的伟大胜利。陈省身用了 Cartan 的活动标架法，和曲面M的单位切丛 (是一个 2n-1 维流形)。"一举成名天下知" → 永垂不朽

现在称陈的定理为 Gauss-Bonnet-Chern 定理。

大家学完这门课，脑子里要理解到两个观念：

(1) 什么是内蕴弯曲及内蕴几何？~~[illegible]~~ 这个观念告诉我们，既使我们

飞跳不到更高维的空间来"俯瞰"我们所存在的这个空间，我们也可以通过了解所在空间的度量结构来理解它的几何。

(2) 从局部到整体的几何方法 (local-to-global)：我们讨论弯曲，是一点附近的局部性质，但是每个局部结合起来，就能推断整体的性质（如空间的拓扑性质）

换句话讲，历代伟大的几何学家创造的这门学问是我们了解所存在空间的基本方法，是人类智慧的胜利和光荣，提振人类认识世界的基本信心。这就是为什么历代伟大几何学家的思想会永垂不朽！

杨振宁先生在1975年曾向陈省身先生感叹"你们数学家居然能凭空想象出那些概念。"陈先生立即反对说："不，不，这些概念不是想象出来的。它们是自然而真实的。"（杨振宁追忆陈省身先生）

让我们以杨振宁先生当时震惊于数学的"自然而真实"而写的一首诗来作结：

欧高黎嘉陈
千古寸心事
四力纤维能
造化爱几何
广邃妙绝伦
浑然归一体
匠心裁剪成
天衣岂无缝

Euclid (Euler), Gauß, Riemann, Cartan, 陈省身